



# **Comportement visco-hyperélastique endommageable d'élastomères SBR et PU : prévision de la durée de vie en fatigue**

Agathe Robisson

## **► To cite this version:**

Agathe Robisson. Comportement visco-hyperélastique endommageable d'élastomères SBR et PU : prévision de la durée de vie en fatigue. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Ecole des Mines de Paris, 2000. Français.  $\langle$ NNT :  $\rangle$ .  $\langle$ tel-01727666 $\rangle$

**HAL Id: tel-01727666**

**<https://minesparis-psl.hal.science/tel-01727666v1>**

Submitted on 22 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization



ECOLE DES MINES  
DE PARIS

Collège doctoral

## **T H E S E**

pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris**  
Spécialité "Sciences et Génie des Matériaux"

présentée par

**Agathe ROBISSON**

Soutenue le 21 Avril 2000

**COMPORTEMENT VISCO-HYPERELASTIQUE ENDOMMAGEABLE  
D'ELASTOMERES SBR et PU:  
PREVISION DE LA DUREE DE VIE EN FATIGUE**

*Directeurs de thèse : PIQUES Roland, LAIARINANDRASANA Lucien*

### **Jury**

M. Jacques VERDU, ENSAM  
M. Gilles ORANGE, Rhodia  
M. François SIDOROFF, Ecole Centrale de Lyon  
M. Alain BURR, ESPCI  
M. Adnane BOUKAMEL, ESIM Marseille  
M. Jean Luc CHAVEROT, Centre Technique du Cuir  
M. Lucien LAIARINANDRASANA, Ecole des Mines de Paris  
M. Roland PIQUES, Ecole des Mines de Paris

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

**Centre des Matériaux P.M. Fournier de l'Ecole des Mines de Paris,  
B.P. 87, 91003 Evry Cedex**

---

# Remerciements

Cette thèse a été réalisée au centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris. Je tiens à remercier son directeur M. Trottier ainsi que l'ensemble du personnel, administratif et technique qui m'a permis de travailler dans de bonnes conditions.

Je remercie également Patrick Ienny de l'Ecole des Mines d'Ales pour avoir réalisé les essais de mesure de champs de déplacement ainsi que M. Dohet de L'Ecole des Mines de Douai pour ses coupes au jet d'eau.

Je garderai un souvenir agréable des discussions, parfois très animées, menées autour d'un café dans le 'bocal'. Merci donc aux thésards et permanents qui continuent d'y participer.

Je remercie Manu, Myriam et Stéphane, avec qui j'ai partagé les bureaux, et les bons moments associés.

Je tiens à remercier Anne Laurent, pour son aide et son soutien, lors des nombreuses difficultés d'ordre technique et parfois moral. Je remercie également les techniciens de l'équipe Gérard, Michel et René. Je remercie chaleureusement Fazilay Laraba-Abbes pour sa généreuse contribution, lors de la rédaction et de la préparation de l'exposé, ainsi que pour ses encouragements constants.

J'ai une pensée émue pour Nicolas André, qui m'a accueillie dans le laboratoire et m'a initiée au 'monde des élastomères'. Il a fait preuve de patience et de gentillesse toutes les fois où je suis arrivée dans son bureau pour le questionner. Son intelligence, sa finesse et sa rigueur intellectuelle m'ont impressionnée.

Je remercie également Gaetan, Nicolas et Rodolphe pour les moments, nombreux et agréables, passés ensemble, soit dans le laboratoire, soit devant un verre, ou un concert...

Je remercie le Centre Technique du Cuir, de la Chaussure et de la Maroquinerie qui m'a engagée pendant trois ans pour travailler sur ce sujet. Je tiens à citer mes interlocuteurs : F. Nicolas, B. Vuillermet et G. Gavend. Je remercie les techniciens du laboratoire d'essais physiques, qui m'ont toujours accueillie agréablement : William, Paul, Noël, Bernadette et surtout Didier et Michel qui ont été particulièrement disponibles et attentifs à mes exigences de 'chercheuse'. Je remercie Bernard Michel, pour les nombreuses et intéressantes discussions que nous avons eues.

Je remercie enfin Jean Luc Chaverot, qui a supervisé la thèse du point de vue industriel. Il a manifesté ses encouragements et sa bonne volonté tout au long du travail.

Les soucis de communication qui se sont présentés entre les deux laboratoires universitaire et industriel ont été source de prises de conscience certaines chez les uns et chez les autres. Ceci est bien évidemment positif.

Je n'aurais pas eu la chance de développer ce sujet sans Roland Piques, qui m'a accueillie dans son équipe Comportement des Polymères. Sa grande ouverture d'esprit, sa capacité d'écoute et sa confiance m'ont permis de chercher dans d'excellentes conditions. Je le remercie particulièrement pour le respect qu'il manifeste toujours à l'égard de la personnalité de ses thésards, de leur rythme de travail, ainsi que de leurs envies et revendications. Ses grandes compétences scientifiques m'ont largement aiguillée tout au long de la recherche.

La complexité de la modélisation du comportement mécanique m'aurait rapidement découragée si Lucien Laiarinandrasana n'était pas intervenu. Son engouement et son implication ont été une source de motivation constante. Notre très bonne communication a été d'un grand secours les nombreuses fois où nous avons discuté de modélisation. Je tiens à rendre hommage à son sang-froid, qui, pendant la période délicate où j'ai travaillé sur l'identification des lois de comportement a contrebalancé intelligemment ma spontanéité. En un mot, le travail de modélisation n'aurait pas vu le jour sans son aide et son soutien.

Je remercie enfin messieurs Boukamel, Burr, Orange, Sidoroff et Verdu, qui ont étudié ce mémoire et contribué à sa publication. Leurs remarques étaient dirigées vers la construction et l'évolution de ce thème de recherche. Leurs critiques 'ouvertes' ont été encourageantes pour moi-même et pour le laboratoire. Je les en remercie vivement.

# Sommaire

Introduction générale .....	1
Chapitre 1 - Propriétés physico-chimiques du SBR chargé de silice et du PU cellulaire .....	7
1.1 - Les élastomères – Généralités .....	9
1.2 - Les élastomères dans les semelles.....	9
1.3 - Le SBR chargé de silice .....	10
1.4 - Le Polyuréthane cellulaire(PU) .....	18
1.5 - Conclusion.....	20
Bibliographie .....	21
Chapitre 2 - Comportement mécanique - Résultats expérimentaux .....	23
2.1 - Procédure expérimentale.....	25
2.2 - Résultats expérimentaux– Cas du SBR.....	35
2.2.1 - Essais mécaniques uniaxiaux.....	35
2.2.2 - Essais mécaniques multiaxiaux .....	48
2.3 - Résultats – Cas du PU .....	55
2.3.1 - Essais mécaniques uniaxiaux.....	55
2.3.2 - Essais mécaniques multiaxiaux .....	64
2.4 – Influence des charges – Cas du SBR.....	69
2.4.1 - Le renforcement et l'adoucissement – Eléments de bibliographie.....	69
2.4.2 – Essais mécaniques – Comparaison SBR chargé / non chargé .....	73
2.4.3 – Etude de l'influence des charges sur l'endommagement.....	78
2.4.3.1 - Mise en évidence de l'endommagement sur le SBR chargé .....	78
2.4.3.2 – Observation de l'endommagement au MEB - Essais de traction in situ .....	84
2.5 - Conclusions .....	95
Bibliographie .....	97
Chapitre 3 - Modélisation du comportement mécanique .....	99
3.1 - Rappels mécaniques sur le cadre des transformations finies.....	101
3.2 - Les lois de comportement .....	107
3.2.1 - Les lois hyperélastiques quasi-incompressibles.....	107
3.2.2 - Les lois hyperélastiques compressibles.....	115
3.2.3 - Les lois d'endommagement.....	116
3.2.4 - Les lois élasto-plastiques.....	123
3.2.5 - Les lois viscoélastiques : l'approche fonctionnelle .....	124
3.2.6 - Les lois viscoélastiques : l'approche par variables internes .....	131
3.2.7 - Conclusions.....	139
3.3 - Identification des lois de comportement.....	141
3.3.1 - Identification de la loi hyperélastique viscoélastique endommageable du SBRA - Cas de l'intégrale héréditaire.....	141
3.3.2 - Identification du PU A - Cas de l'intégrale héréditaire .....	154
3.3.3 - Identification du SBRA - Cas de l'approche par variables internes.....	161
3.3.4 – Comparaison des deux approches viscoélastiques : approche fonctionnelle et approche par variables internes.....	171
3.4 – Simulation des essais multiaxiaux et validation de la loi de comportement.....	175
3.4.1 – Cas du SBR chargé – Approche fonctionnelle.....	175
3.4.2 – Cas du SBR chargé – Approche par variables internes.....	186
3.4.3 – Comparaison des deux approches viscoélastiques .....	191
3.5 – Conclusion.....	193



Bibliographie.....	195
--------------------	-----

Chapitre 4 - Comportement en endurance du SBR chargé de silice .....	199
--	-----

4.1 - Conditions d'essais - Résultats .....	201
4.1.1 – Mise en oeuvre des essais .....	201
4.1.2 – Les résultats.....	203
4.1.3 – Les tendances.....	209
4.2 – Mécanismes d'endommagement.....	215
4.2.1 – Observations des faciès de rupture sur éprouvette plot .....	215
4.2.2 – Observations des éprouvettes 'AE' .....	230
4.3 – Calculs des paramètres mécaniques en fond d'entaille.....	237
4.4 – Synthèse des résultats.....	241
4.4.1 – Les paramètres mécaniques pertinents .....	241
4.4.2 –Diagramme de fatigue .....	248
4.4.3 – Modélisation du critère de durée de vie.....	252
4.5 – Conclusion.....	257

Bibliographie.....	259
--------------------	-----

Chapitre 5 - Application industrielle : L'essai Bennewart 'virtuel'.....	261
--	-----

5.1 – Présentation des essais Bennewart 'matériel' et 'virtuel' .....	263
5.2 – Etude cinématique de l'essai bennewart .....	265
5.3 – Instrumentation de l'essai Bennewart .....	268
5.4 – Essais mécaniques de flexion effectués sur la machine d'essai Bennewart.....	271
5.5 – Calcul numérique de flexion de plaques de SBR sur l'essai Bennewart.....	272
5.6 – Conclusion.....	275

Conclusion générale.....	277
--------------------------	-----

## Annexes

Annexe 1A - Microstructure et composition des SBR B et C - Comparaison avec le SBR A
Annexe 2A - Essais mécaniques – Calculs d'erreur
Annexe 2B – Influence de la mise en forme - Cas du SBR
Annexe 2C - Indexation des essais
Annexe 2D - Comportement mécanique des SBR B et C - Résultats expérimentaux
Annexe 2E – Influence de la mise en forme sur le comportement - Cas du PU
Annexe 3A – Expression de la contrainte dans le cas d'un essai de traction uniaxiale à partir du potentiel de Rivlin généralisé
Annexe 3B - Le modèle de Poyting-Thomson généralisé aux grandes transformations - Détermination des équations d'état et complémentaire
Annexe 3C - Identification du SBR de nuance A - Construction du cycle d'endommagement
Annexe 3D - Identification du SBR de nuance A - Détail de la procédure
Annexe 3E - Identification des nuances B et C de SBR
Annexe 3F -Identification du PU de nuance A - Détail de la procédure
Annexe 3G - Fichiers de mise en données des calculs par éléments finis
Annexe 4A - Résultats des essais de fatigue effectués sur les nuances SBR B et C
Annexe 4B - Mesure de la température au sein de l'éprouvette plot sollicitée en traction-compression
Annexe 5A – Etude cinématique de l'essai

## LISTE DES FIGURES

### Chapitre 1 – Propriétés physico-chimiques du SBR chargé de silice et du PU cellulaire

**Figure 1.1** – Composition du SBRA - Analyse par WDS d'une zone de 1 mm<sup>2</sup>

**Figure 1.2** – SBR A – Les différentes éprouvettes utilisées pour la caractérisation de comportement mécanique

**Figure 1.3** – SBR A – Surface plane observée au MEB : gomme, charges de silice (en clair) et de noir de carbone (en noir)

**Figure 1.4** – SBR A – Charges de silice observée au MEB – Analyse EDS

**Figure 1.5** – SBR A – Agglomérat de silice

**Figure 1.6** – SBR A - Analyse EDS de la matrice (en sombre) superposée à l'analyse d'une charge de silice (en clair)

**Figure 1.7** – SBR A – Agglomérat de noir de carbone

**Figure 1.8** – SBR A – Charge de talc

**Figure 1.9** – SBR A – Cartographies en éléments C, S, Zn, O, Si, Mg, Al, K (analyses WDS)

**Figure 1.10** - SBR A – Dosage quantitatif par WDS en éléments C, O, Si, S, Zn, Al, Mg, Ca sur une surface de 1 mm<sup>2</sup> (analyse 'globale') et par pointés sur des charges de silice et sur des charges de noir de carbone

**Figure 1.11** – PU A – Données du fournisseur

**Figure 1.12** – PU A – Schéma des porosités dans la plaque injectée

**Figure 1.13** – PU A – Observation MEB d'une coupe plane – Distribution des tailles de pores

**Figure 1.14** – PU A – Observation MEB d'une coupe plane – Matrice entre les pores

### Chapitre 2 – Comportement mécanique – Résultats expérimentaux

**Figure 2.1** – Machine d'essais utilisée pour les essais de traction uniaxiale : dynamomètre + extensomètre + système de pilotage et d'acquisition, située au CTC

**Figure 2.2** – Machine d'essais utilisée pour les essais de traction uniaxiale – Détails du mors et de l'extensomètre

**Figure 2.3** – Géométrie de l'éprouvette haltère

**Figure 2.4** – Le dispositif expérimental d'extensométrie laser bidimensionnelle

**Figure 2.5** – Essai de compression libre – Eprouvette, plateaux et extensomètres

**Figure 2.6** – Schéma de l'essai de compression eudiométrique

**Figure 2.7** – Machine électromécanique de fatigue en traction-compression

**Figure 2.8** – Géométrie de l'éprouvette plot

**Figure 2.9** – Défauts de surface de l'éprouvette plot : gravures et point d'injection

**Figure 2.10** – Machine de fatigue en torsion

**Figure 2.11** – Géométrie de l'éprouvette AE

**Figure 2.12** – Défauts de surface de l'éprouvette AE : joint

**Figure 2.13** – Schéma de l'ensemble des essais effectués et décrits dans ce chapitre

**Figure 2.14** – SBRA – Essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture – Effet de la vitesse de déformation

**Figure 2.15** – SBRA – Essai de traction uniaxiale – Variation volumique

**Figure 2.16** – SBRA – Essai de compression uniaxiale - Influence de la vitesse de sollicitation

**Figure 2.17** – SBRA – Essais de relaxation en traction uniaxiale

**Figure 2.18** – SBRA – Reconstitution d'une courbe de traction uniaxiale – Illustration de l'effet de vitesse de déformation

**Figure 2.19** – SBRA – Essais de relaxation en traction uniaxiale – Contrainte 'normée' - Influence de l'élongation sur la relaxation des contraintes

**Figure 2.20** – SBRA – Essai de relaxation en traction uniaxiale – Evolution de la variation de volume

**Figure 2.21** – SBRA – Essai de relaxation en traction uniaxiale – Evolution des élongations longitudinale et transversale dans la zone utile

**Figure 2.22** – SBRA – Essais de relaxation en compression uniaxiale – Comparaison avec la traction uniaxiale

**Figure 2.23** – SBRA – Essai de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.5$

**Figure 2.24** – SBRA – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.1$  à  $3 - 1^{\text{ers}}$  cycles des essais

**Figure 2.25** – SBRA – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.1$  à  $3 - 5^{\text{èmes}}$  cycles des essais

**Figure 2.26** – SBRA – Récapitulatif des résultats de traction uniaxiale cyclique

**Figure 2.27** – SBRA – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $1^{\text{ers}}$  cycles de chargement  $\lambda_{1\max}=1.5$  – Influence de la vitesse de sollicitation

**Figure 2.28** – SBRA – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $5^{\text{èmes}}$  cycles de chargement  $\lambda_{1\max}=1.5$  – Influence de la vitesse de sollicitation

**Figure 2.29** – SBRA – Traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=2.8$  – Evolution de la variation de volume au cours de 2 cycles

**Figure 2.30** - SBRA – Essai de traction plane – Comparaison avec la traction uniaxiale

**Figure 2.31** – SBRA – Essai de compression eudiométrique – 3 cycles

**Figure 2.32** – SBRA – Essai de relaxation en compression eudiométrique (CE) – Comparaison avec la traction uniaxiale (TU)

**Figure 2.33** – SBRA – Essai cyclique de traction compression sur plot – Déplacement imposé sinusoïdal entre 0 et +20 mm –  $T=3s$

**Figure 2.34** – SBRA - Essai cyclique de traction compression sur plot - Déplacement imposé sinusoïdal entre +5 et +15 mm -  $T=3s$

**Figure 2.35** - SBRA - Essai cyclique de traction compression sur plot - Déplacement imposé sinusoïdal entre -10 et +15 mm -  $T=3s$

**Figure 2.36** – SBRA – Essai cyclique de torsion sur AE – Angle imposé entre 0 et +60 ° -  $T=4s$

**Figure 2.37** – SBRA – Essai cyclique de torsion sur AE – Angle imposé entre +10 et +40 ° -  $T=3s$

**Figure 2.38** – SBRA – Essai cyclique de torsion sur AE – Angle imposé entre -35 et +35 ° -  $T=4.5s$

**Figure 2.39** – PUA – Essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture

**Figure 2.40** – PUA – Essai de traction uniaxiale – Influence de la vitesse de déformation

**Figure 2.41** – PUA – Essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture – Mesure de la variation de volume

**Figure 2.42** – PUA – Essai de compression uniaxiale

**Figure 2.43** – PUA – Essai de relaxation en traction uniaxiale

**Figure 2.44** – PUA – Reconstitution d'une courbe de traction uniaxiale – Influence de la vitesse

**Figure 2.45** – PUA – Essai de relaxation en traction uniaxiale – Contrainte normée – Influence de l'élongation sur la relaxation des contraintes

**Figure 2.46** – PUA – Traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.5$

**Figure 2.47** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.2$  à  $2.5 - 1^{\text{ers}}$  cycles

**Figure 2.48** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.2$  à  $2.5 - 5^{\text{èmes}}$  cycles

**Figure 2.49** – Tableau récapitulatif des essais de traction uniaxiale cyclique

**Figure 2.50** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.5 - 5^{\text{èmes}}$  cycles – Influence de la vitesse

**Figure 2.51** – PUA – Essai de compression eudiométrique – Résultat expérimental et calcul de la contribution de la pression de l'air dans les porosités

**Figure 2.52** – PUA – Essais de compression eudiométrique – Influence du niveau d'élongation

**Figure 2.53** – PUA – Essais de compression eudiométrique – Contrainte normée – Comparaison avec la traction uniaxiale

**Figure 2.54** – Illustration de la théorie de Dannenberg

**Figure 2.55** – Essais de traction uniaxiale jusqu'à rupture – Comparaison SBR chargé et pur – Influence de la vitesse de sollicitation

**Figure 2.56** – Essais de relaxation en traction uniaxiale - Comparaison SBR chargé et non chargé – Influence du niveau d'élongation sur la relaxation des contraintes

**Figure 2.57** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max} = 1.5$  et  $2.5$  – Comparaison SBR chargé et non chargé

**Figure 2.58** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max} = 1.5$  et  $2.5$  5<sup>èmes</sup> cycles – Comparaison SBR chargé et non chargé

**Figure 2.59** – Essais de traction uniaxiale cyclique – Tableau récapitulatif des essais

**Figure 2.60** – SBRA – Essais de traction uniaxiale - Influence d'un préchargement – Recouvrance de 48 heures

**Figure 2.61** – Détail du calcul des élongations et contraintes du 2<sup>ème</sup> chargement par rapport au 1<sup>er</sup> chargement

**Figure 2.62** – SBRA – Essai de traction uniaxiale - Influence d'un préchargement – Recouvrance de 2 mois

**Figure 2.63** – SBRA – Essais de traction uniaxiale - Influence d'un préchargement – Contrainte et élongation normalisées - Recouvrance de 48 heures et 3 mois

**Figure 2.64** – SBRA – Influence d'un préchargement sur le comportement dans la direction transverse – Recouvrance de 48 heures

**Figure 2.65** – Détail du calcul des élongations et contraintes du 2<sup>ème</sup> chargement par rapport au 1<sup>er</sup> chargement – Cas d'une 2<sup>ème</sup> traction dans la direction transverse

**Figure 2.66** – SBRA – Essais de traction uniaxiale - Influence de la vitesse du préchargement – Recouvrance de 2 mois

**Figure 2.67** – SBRA – Faciès d'une éprouvette rompue en traction uniaxiale – Observation des cavités formées autour des charges de silice

**Figure 2.68** – SBRA – Faciès d'une éprouvette rompue en traction uniaxiale

**Figure 2.69** – SBRA – Schéma de la coupe d'une éprouvette rompue en traction uniaxiale

**Figure 2.70** – SBRA – Coupe d'une éprouvette rompue en traction uniaxiale – Observation de l'endommagement

**Figure 2.71** – Platine de traction in situ

**Figure 2.72** – Schéma de l'éprouvette de traction in situ

**Figure 2.73** – Observation de la surface d'une éprouvette de traction in situ prélevée dans une plaque

**Figure 2.74** – Observation de la surface d'une éprouvette de traction in situ prélevée dans une plaque –  $\Delta L = 16\text{mm}$

**Figure 2.75** – Eprouvette de traction in situ prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 1.1$  – Observation de décohésion au sein des agglomérats de silice et de cavitation par décohésion autour des agrégats.

**Figure 2.76** – Eprouvette de traction in situ prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 1.5$

**Figure 2.77** – Eprouvette de traction in situ prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 2$

**Figure 2.78** – Eprouvette de traction in situ prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 3$

## Chapitre 3 – Modélisation du comportement mécanique

**Figure 3.1** – Rappels des notations utilisées pour la description des tenseurs de déformation et de contrainte en grandes transformations

**Figure 3.2** – Comparaison du modèle de Flory et du modèle à huit chaînes (ou de Arruda & Boyce) - Simulation de la rigidification du caoutchouc grâce au modèle à huit chaînes

**Figure 3.3** – Schéma des conditions limites de l'essai de traction uniaxiale

**Figure 3.4** – Schéma des conditions limites de l'essai de traction plane

**Figure 3.5** – Décomposition du réseau : contributions des chaînes entre nœuds de réticulation et des chaînes inter-particulaires à l'énergie libre - [Govindgee et al., 1991]

**Figure 3.6** – Schéma des liaisons entre particules lors d'une sollicitation : les chaînes les plus courtes se détachent de la surface de la particule - [Govindgee et al., 1991]

**Figure 3.7** – Schéma de liaisons qui maintiennent la cohésion dans un agglomérat : liaison entre particules et liaison entre particules et chaînes - [Kilian et al., 1994]

**Figure 3.8** – Cycles de cisaillement pur - Illustration du modèle d'endommagement discontinu (courbes en traits pleins) selon [Miche, 1995]

**Figure 3.9** – Cycles de cisaillement pur - Illustration du modèle d'endommagement continu (courbes en traits pleins) selon [Miche, 1995]

**Figure 3.10** – Illustration du modèle d'endommagement discontinu utilisé dans ce travail – Deux cycles de traction uniaxiale avec des élongations maximales égales à 1.5 puis 2

**Figure 3.11** – Illustration du modèle de [Miche et al., 00] en 1 dimension

**Figure 3.12** – Illustration du modèle rhéologique de Prantl généralisé par [Kalske et al., 98, 99] en trois dimensions et en grandes transformations

**Figure 3.13** – Transport de  $T^t(t-t')$  de  $C^t$  dans  $C^{t-t'}$

**Figure 3.14** – Illustration du modèle rhéologique de Maxwell généralisé

**Figure 3.15** – Modèle viscoélastique avec approche fonctionnelle – Simulation d'un essai de traction uniaxiale cyclique

**Figure 3.16** – Schéma du modèle rhéologique de Poynting-Thomson

**Figure 3.17** – Illustration du modèle viscoélastique de Poynting-Thomson généralisé avec approche par variables internes – Simulation d'un essai de traction uniaxiale cyclique

**Figure 3.18** – Les lois de comportement citées et/ou étudiées pour représenter le comportement du SBR chargé de silice et du PU réticulé cellulaire

**Figure 3.19** – Tableau des dérivées des contraintes de traction uniaxiale  $k_{TU}$  et traction plane  $k_{TP}$  par rapport aux coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$

**Figure 3.20** – Etude de l'influence des coefficients  $C_{10}$  et  $C_{01}$  sur les contraintes de traction uniaxiale (TU) et traction plane (TP) – Expression de la dérivée de la contrainte en fonction de l'élongation

**Figure 3.21** – Etude de l'influence des coefficients  $C_{11}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{02}$  sur les contraintes de traction uniaxiale (TU) et traction plane (TP) – Expression de la dérivée de la contrainte en fonction de l'élongation

**Figure 3.22** – Etude de l'influence des coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{02}$  sur les contraintes de compression uniaxiale – Expression de la dérivée de la contrainte en fonction de l'élongation

**Figure 3.23** – Simulation d'un essai de relaxation – Influence des paramètres  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  sur la relaxation des contraintes

**Figure 3.24** – Simulation d'un essai de traction uniaxiale cyclique – Influence du paramètre  $g_1$  sur l'hystérèse

**Figure 3.25** – Essais de traction et compression uniaxiales rapides – Essais utilisés pour l'identification des paramètres de la loi hyperélastique

**Figure 3.26** – Courbe 'idéale d'endommagement' reconstitué à partir des essais de traction uniaxiale cyclique lents – Représentation de l'hystérésis d'endommagement

**Figure 3.27** – Schéma-résumé de l'identification des paramètres hyperélastiques – viscoélastiques – endommageables du comportement du SBR A – Comparaisons des résultats numériques et expérimentaux

**Figure 3.28** – Simulations de l'essai de traction plane - Résultats numériques et expérimentaux

**Figure 3.29** – Etude de l'influence des coefficients  $(m_1, m_2)$  sur les réponses simulées en traction uniaxiale - Simulations de chargements de traction uniaxiale avec  $(m_1, m_2)$  égaux à  $(1,0)$ ,  $(10,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(0, 10)$

**Figure 3.30** – Etude de l'influence du coefficient  $m_3$  sur les réponses simulées en compression uniaxiale - Simulations de chargements de compression uniaxiale avec  $m_3$  égal à 5 et 10

**Figure 3.31** – Etude de l'influence du coefficient  $m_3$  sur les réponses simulées en compression eudiométrique - Simulations de chargements de compression eudiométrique avec  $m_3$  égal à 1, 5 et 10

**Figure 3.32** – Schéma de la procédure d'optimisation du PU A – Illustration des optimisations par les graphes accolés qui présentent les essais expérimentaux et les résultats des calculs.

**Figure 3.33** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.34** – Simulation de l'essais de compression eudiométrique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.004 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.35** – Schéma du modèle de Poynting-Thomson

**Figure 3.36** – Influence de la valeur de  $f_a$  sur la relaxation des contraintes – Simulations d'essais de relaxation avec  $\lambda_1 = 2$

**Figure 3.37** – Influence de la valeur de  $C_{10}^a$  sur la relaxation des contraintes – Simulations d'essais de relaxation avec  $\lambda_1 = 2$

**Figure 3.38** – Influence de la valeur de  $f_a$  sur l'hystérèse des cycles de traction uniaxiale –  $(C_{10}^a, C_{01}^a) = (0,0)$  – Simulations d'essais de traction uniaxiale cyclique avec  $\lambda_{1\max} = 2$  et  $T = 0.01, 0.1, 1, 100, 1000 \text{ s}$

**Figure 3.39** – Influence de la valeur de  $f_a$  sur l'hystérèse des cycles de traction uniaxiale –  $(C_{10}^a, C_{01}^a) = (1,0)$  - Simulations d'essais de traction uniaxiale cyclique avec  $\lambda_{1\max} = 2$  et  $T = 0.01, 0.1, 1, 100, 1000 \text{ s}$

**Figure 3.40** – Résultats de la 1<sup>ère</sup> itération - Optimisation des coefficients  $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$  et  $f_a$  – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.41** – Résultats de la 2<sup>sde</sup> itération - Optimisation des coefficients  $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$  et  $C_{20}^e$ ,  $d_\infty$  et  $\eta$  – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.42** – Résultats de la 2<sup>sde</sup> itération - Optimisation des coefficients  $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$  et  $C_{20}^e$ ,  $d_\infty$  et  $\eta$  – Simulation des essais de compression uniaxiale  $\dot{\epsilon} = 1.3 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.43** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$  – Jeu de coefficients final n°1 -  $\lambda_{1\max} = 2.5$  et 3

**Figure 3.44** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ s}^{-1}$  – Jeu de coefficients final n°1

**Figure 3.45** – Simulation d'un essai de relaxation en traction uniaxiale – Jeu de coefficients final n°1

**Figure 3.46** – Résultats de la 2<sup>sde</sup> itération – Jeu final n°2 – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.47** – Résultats de la 2<sup>sde</sup> itération – Jeu final n°2 – Simulation de l'essai de compression uniaxiale  $\dot{\epsilon} = 1.3 \text{ s}^{-1}$

**Figure 3.48** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon}=0.01 \text{ s}^{-1}$  – Jeu de coefficients final n°2

**Figure 3.49** – Simulation d'un essai de traction uniaxiale avec  $\lambda_{1\max}=1.1$  ou  $E_{1\max}=0.12$  - Comparaisons des résultats numériques obtenus avec les deux approches viscoélastique,  $T = 3\text{s}$

**Figure 3.50** – Simulation d'un essai de traction uniaxiale avec  $\lambda_{1\max}=2.0$  ou  $E_{1\max}=1.5$  - Comparaisons des résultats numériques obtenus avec les deux approches viscoélastique,  $T = 3\text{s}$

**Figure 3.51** – Simulation avec les deux approches viscoélastique d'un essai de compression uniaxiale,  $T = 3\text{s}$

**Figure 3.52** – Maillage de l'éprouvette 'plot' – Schéma des conditions limites de déplacement

**Figure 3.53** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre 0 et 20 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience

**Figure 3.54** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre 5 et 20 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience

**Figure 3.55** – Simulation d'un chargement de traction-compression cyclique entre -10 et 15 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience

**Figure 3.56** – Cartographie des isovaleurs  $E_{22}$  (déformation de Green-Lagrange) sur l'éprouvette 'plot' testée entre 0 et 20 mm – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement - Déplacement global =20 mm

**Figure 3.57** – Cartographie des isovaleurs  $T_{22}$  (contrainte de Cauchy) sur l'éprouvette 'plot' testée entre 0 et 20 mm – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement - Force résultante =3 400N

**Figure 3.58** – Maillage 2D de l'éprouvette 'AE'

**Figure 3.59** – Maillage 3D de l'éprouvette 'AE'

**Figure 3.60** – Simulation d'un chargement de torsion entre 0 et 60 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience

**Figure 3.61** – Simulation d'un chargement de torsion entre 30 et 60 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience

**Figure 3.62** – Simulation d'un chargement de torsion entre -35 et 35 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience

**Figure 3.63** – Cartographie des isovaleurs  $E_{p1}$  (déformation principale n°1 de Green-Lagrange) sur l'éprouvette 'AE' testée entre 0 et 40 ° – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement  $\alpha=40^\circ$

**Figure 3.64** – Cartographie des isovaleurs  $T_{p1}$  (contrainte principale n°1 de Cauchy) sur l'éprouvette 'AE' testée entre 0 et 40 ° – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement  $\alpha=40^\circ$

**Figure 3.65** – Schéma de la face inférieure (ou de symétrie) de l'éprouvette AE – Position du nœud 11 par rapport au repère d'explicitation des contraintes et des déformations

**Figure 3.66** – Evolution des composantes  $E_{33}$  et  $E_{23}$  du tenseur des déformations de green Lagrange et des composantes  $T_{22}$  et  $T_{23}$  du tenseur des contraintes de Cauchy sur le nœud 11 en fonction du temps

**Figure 3.67** – Simulation d'un essai de traction-compression sur éprouvette 'plot' déplacement imposé entre 0 et 20mm –Jeu n°1 ( $f_a=47$ )

**Figure 3.68** – Simulation d'un essai de traction-compression sur éprouvette 'plot' déplacement imposé entre 0 et 20mm – Jeu n°2 ( $f_a=10$ )

**Figure 3.69** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre 5 et 20 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience – Jeu n°2 ( $f_a=10$ )

**Figure 3.70** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre -5 et 10 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience - Jeu n°2 ( $f_a=10$ )

**Figure 3.71** – Simulation d'un chargement de torsion entre 0 et 60 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience – Jeu n°2 ( $f_a=10$ )

**Figure 3.72** – Simulation d'un chargement de torsion entre 10 et 40 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience – Jeu n°2 ( $f_a=10$ )

**Figure 3.73** – Simulations de l'essai de traction –compression sur 'plot' 0/10 mm – Comparaison de la force résultante sur le plot entre les deux approches viscoélastiques

**Figure 3.74** – Simulations de l'essai de traction –compression sur 'plot' 0/10 mm– Comparaison de la contrainte de Cauchy  $T_{22}$  (axiale) en fond d'entaille entre les deux approches viscoélastiques

**Figure 3.75** – Simulations de l'essai de traction-compression sur 'plot' 0/10 mm – Comparaisons de la déformation de Green Lagrange  $E_{22}$  (axiale) en fond d'entaille entre les deux approches viscoélastiques

## Chapitre 4 – Comportement en endurance du SBR chargé de silice

**Figure 4.1** – Terminologie utilisée dans cette partie

**Figure 4.2** – Tableau récapitulatif des essais de traction-compression menés sur les éprouvettes 'plots'

**Figure 4.3** – Essai AP23 0-10mm – Evolution de la force résultante avec le nombre de cycles –  $N_i > 2.10^5$

**Figure 4.4** – Essai AP26 -5-15mm – Evolution de la force résultante avec le nombre de cycles –  $N_i = 6\ 000$

**Figure 4.5** – Essai AP26 -5-15mm – Cycles représentatifs du comportement viscoélastique à  $N = 2, 100, 1\ 000, 15\ 000$  et  $20\ 000$  –  $N_i = 6\ 000$

**Figure 4.6** – Tableau récapitulatif des essais de torsion menés sur les éprouvettes 'AE'

**Figure 4.7** – Essai AE34 -0/50° – Evolution du couple résultant avec le nombre de cycles –  $N_i = 3\ 000$

**Figure 4.8** – Essai AE24 -20/30° – Evolution du couple résultant avec le nombre de cycles – Aucun amorçage observé

**Figure 4.9** – Dimensions de l'éprouvette cylindrique assimilée au 'plot' pour le calcul des contraintes et des déformations normées

**Figure 4.10** – Dimensions de l'éprouvette cylindrique assimilée à l' 'AE' pour le calcul des contraintes et des déformations 'normées'

**Figure 4.11** – Synthèse des essais de fatigue sur 'plots et AE – Influence de la contrainte moyennée maximale sur le nombre de cycles à l'amorçage -  $N_i > 400\ 000$  cycles

**Figure 4.12** – Synthèse des essais de fatigue sur 'plots et AE – Influence de l'amplitude de contrainte moyennée sur le nombre de cycles à l'amorçage

**Figure 4.13** – Synthèse des essais de fatigue sur 'plots et AE – Influence de la déformation normée maximale sur le nombre de cycles à l'amorçage

**Figure 4.14** – Synthèse des essais de fatigue sur 'plots et AE – Influence de l'amplitude de la déformation normée sur le nombre de cycles à l'amorçage

**Figure 4.15** – Zone d'amorçage de fissure dans une éprouvette pré-fissurée - Vue globale et détail - Essai de fatigue à déplacement imposé

**Figure 4.16** – Zone de propagation de fissure dans une éprouvette fissurée - Vue globale - Essai de fatigue à déplacement imposé

**Figure 4.17** – Faciès du plot AP7 – Repérage des zones d'amorçage

**Figure 4.18** – Faciès du plot AP12 – Repérage des zones d'amorçage

**Figure 4.19** – Faciès du plot AP4 – Repérage des zones d'amorçage

**Figure 4.20** – Essai AP5 – Amorçage sur défauts de surface dû aux écritures gravées sur le moule

**Figure 4.21** – Essai AP7 – Amorçage sur le joint de moulage

**Figure 4.22** – Essai AP1 – Amorçage sur le point d'injection

**Figure 4.23** – Essai AP5 – Zone d'amorçage en 'haricot'

**Figure 4.24** – Essai AP11 – Zone d'amorçage en 'haricot' - Ligne centrale sombre



- Figure 4.25** – Essai AP12 – Zone d'amorçage en 'haricot' – Ligne centrale sombre
- Figure 4.26** – Essai AP26 – Zone d'amorçage en 'haricot' – Tâche claire au centre
- Figure 4.27** – Essai AP5 – Centre du haricot – Croix due à l'intersection de la ligne sombre et d'une 'marche' – Foyer de l'amorçage
- Figure 4.28** – Essai AP6 – Zones centrales du haricot correspondantes sur les deux faciès(a) et (b) – Mise en évidence de la rupture des agglomérats de silice – Foyer de l'amorçage
- Figure 4.29** – Essai AP7 – Centre du haricot – Plaquettes de kaolin
- Figure 4.30** – essai AP4 – Centre du haricot – Plaquettes de kaolin
- Figure 4.31** – Essai AP11 – Comparaison du centre du haricot (a) – gomme + plaquettes de kaolin - avec le bord (b) – gomme seule -
- Figure 4.32** – Cartographies d'analyses EDS des éléments Si, Al, S et Zn dans la zone centrale du 'haricot' – éprouvette AP4
- Figure 4.33** – essai AP26 – Zone centrale du haricot – Agrégats de silice
- Figure 4.34** – Essai AP26 – Zone centrale du haricot – Ligament de caoutchouc rompu
- Figure 4.35** – Cartographies d'analyses EDS des éléments Si, O et S dans la zone de la 'tâche claire' – éprouvette AP26 - (la cartographie de l'élément Si est décalée car l'analyse a été menée séparément)
- Figure 4.36** – Essais AP7(a) et AP9(b) -  $L_{\min}/L_{\max} = -2/13$  mm –  $N_i = 8\,000 / 28\,000$  – Illustration de l'influence de la taille du joint
- Figure 4.37** – Essai AP6 -  $L_{\min}/L_{\max} = -2/13$  mm –  $N_i = 500$ – Illustration de l'influence de la zone en 'haricot'
- Figure 4.38** – Essai AE7 – Orientation des fissures perpendiculaire à la direction de l'élongation principale
- Figure 4.39** – Essai AE16 – Vue globale de la zone d'amorçage sur le joint
- Figure 4.40** – Essai AE29 – Zone d'amorçage sur joint
- Figure 4.41** – Essai AE35 – Zone d'amorçage sur joint
- Figure 4.42** – Essai AE42 – Zone d'amorçage sur joint
- Figure 4.43** – AE3 – Zone d'amorçage – Vue globale et détail - Présence d'une fibre
- Figure 4.44** – AE2 – Détail de la zone d'amorçage – Présence de fibres
- Figure 4.45** – AE25 – Détail d'une zone dite 'fripée' – Défauts de surface correspondant à des bourrelets de caoutchouc
- Figure 4.46** – AE38 – Détail d'une zone dite 'fripée' – Filaments de caoutchouc en surface
- Figure 4.47** – Zones d'amorçage sur joint – Comparaison des éprouvettes AE29 (a) et AE36 (b)  $N_i = 3\,000 / 15\,000$  – Illustration de l'effet de la taille des joints sur le nombre de cycles à l'amorçage
- Figure 4.48** – Zones d'amorçage sur joint – Comparaison des éprouvettes AE21 (a) et AE32 (b)  $N_i = 5\,000 / 120\,000$  – Illustration de l'effet de la taille des joints sur le nombre de cycles à l'amorçage
- Figure 4.49** – Schéma de l'éprouvette plot et du repère d'explicitation des déformations.
- Figure 4.50** – Essais de traction-compression sur 'plot' - Expression de la déformation principale maximale  $E_{p1\max}$  calculée par éléments finis en fonction de la déformation normée maximale  $E_{\text{norm}}$
- Figure 4.51** – Schéma de l'éprouvette AE et du repère d'explicitation des déformations.
- Figure 4.52** – Essais de torsion sur 'AE' - Expression de la déformation principale maxiamale  $E_{p1}$ , calculée par éléments finis en fonction de la déformation moyennée maximale  $E_{\text{moy max}}$
- Figure 4.53** – Essai de traction AP12 +5/+20 mm - Evolution des déformations de Green-Lagrange et des déformations principales au cours du 3<sup>ème</sup> cycle – Estimation de l'amplitude de déformation principale  $\Delta E_p = E_{p1\max} - E_{p1\min}$
- Figure 4.54** – Essai de traction/compression AP29 -10/+15 mm - Evolution des déformations de Green-Lagrange et des déformations principales au cours du 3<sup>ème</sup> cycle – Estimation de l'amplitude de déformation principale  $\Delta E_p = E_{p1\max} - E_{p3\min}$

**Figure 4.55** – Schéma de l'éprouvette AE testée en torsion représentée pour un angle de torsion nul – Orientation de la fissure qui correspond à la facette du matériau qui subit l'endommagement maximal - nœud 11

**Figure 4.56** – Essai de torsion AE14 -35/+35° - Evolution des angles  $\delta$  et  $\delta'$ , respectivement égaux aux angles entre les déformations principales  $E_{p1}$  et  $E_{p3}$  par rapport à l'axe 2 au cours du 3<sup>ème</sup> cycle

**Figure 4.57** – Essai de torsion AE14 -35/+35° - Evolution de l'angle entre la déformation principale attachée à la facette du matériau qui s'endommage, c'est à dire perpendiculaire à la fissure , et la direction n°2

**Figure 4.58** – Essai de fatigue sur éprouvettes 'plot' et 'AE' testées en traction-compression et torsion - Evolution du second invariant du tenseur amplitude des déformations avec l'amplitude des déformations principales attachées à la même 'facette' du matériau

**Figure 4.59** – Synthèse des essais sur éprouvettes 'plot' et sur 'AE' – Mise en évidence de la déformation principale maximale comme paramètre pertinent pour décrire la durée de vie à l'amorçage d'une fissure

**Figure 4.60** – Synthèse des essais sur éprouvettes 'plot' et sur 'AE' – Mise en évidence du second invariant calculée à partir des amplitudes des déformations comme paramètre pertinent pour décrire la durée de vie à l'amorçage d'une fissure

**Figure 4.61** – Synthèse des essais d'endurance sur éprouvettes 'plot' et 'AE' – Tracé 'manuel' des isodurées de vie dans un diagramme ( $\Delta E_{II}$ ,  $E_{pmax}$ )

**Figure 4.62** – Caoutchouc NR – Diagramme de Haigh [Andre, 98]

**Figure 4.63** –Essais d'endurance sur éprouvettes 'AE' – Expression des couples minimaux et maximaux, du rapport R et du pourcentage d'énergie dissipée par rapport à l'énergie fournie.

**Figure 4.64** – Synthèse des essais d'endurance sur éprouvettes 'AE' – Tracé des isodurées de vie dans un diagramme ( $\Delta E_{II}$ ,  $E_{pmax}$ ) par régression d'une courbe polynomiale

**Figure 4.65** – Evolution de la valeur ( $\Delta E_{II}$ )<sub>0</sub> au sommet de la parabole en fonction du nombre de cycles à l'amorçage

**Figure 4.66** – Essai d'endurance sur éprouvettes 'AE' en torsion – Tracés des isodurées de vie selon le critère établi et superposition des points expérimentaux

**Figure 4.67** – AE – Comparaison entre le nombre de cycles à l'amorçage simulé  $N_{i\ sim}$  et le nombre de cycles expérimental  $N_{i\ exp}$ , - Enveloppe de la bande de dispersion

**Figure 4.68** – Essai d'endurance sur éprouvettes 'plot' en traction-compression – Tracés des isodurées de vie selon le critère établi et superposition des points expérimentaux

**Figure 4.69** – Plot – Comparaison entre le nombre de cycles à l'amorçage simulé  $N_{i\ sim}$  et le nombre de cycles expérimental  $N_{i\ exp}$ , - Enveloppe de la bande de dispersion

## Chapitre 5 – Application industrielle : l'essai Bennewart 'virtuel'

**Figure 5.1** – Photographie de l'essai Bennewart de fatigue-flexion

**Figure 5.2** – Schéma de l'essai Bennewart + éprouvette en flexion (zone hachurée)

**Figure 5.3** – Représentation schématique de l'essai Bennewart symétrisé – Le centre du repère est le centre de la rotule M.

**Figure 5.4** – Schéma de la semelle en flexion sur l'essai Bennewart

**Figure 5.5** – Plan de la pièce support constitutive de l'essai Bennewart sur laquelle est collée la jauge de contrainte

**Figure 5.6** - Mesure de la force résultante engendrée par l'empilement de plaques sollicitée en flexion sur l'essai Bennewart avec la cellule mise en place

**Figure 5.7** – Maillage d'une éprouvette sollicitée sur l'essai Bennewart

**Figure 5.8** – Calcul par éléments finis d'une semelle 'parallélépipédique' testée sur l'essai Bennewart  
– Cartographie des déformations de Green Lagrange  $E_{11}$

**Figure 5.9** - Calcul par éléments finis d'une semelle 'parallélépipédique' testée sur l'essai Bennewart  
– Evolution de la force résultante sur la semelle au cours des cinq premiers cycles

# Introduction générale

Ce mémoire de thèse est consacré à l'étude des points suivants :

- Modélisation du comportement hyperélastique incompressible-viscoélastique-endommageable d'un caoutchouc styrène butadiène SBR chargé en silice
- Modélisation hyperélastique compressible-viscoélastique d'une polyuréthane cellulaire
- Etude de l'influence des charges de silice sur le renforcement et l'endommagement
- Etude du comportement en fatigue du SBR chargé de silice

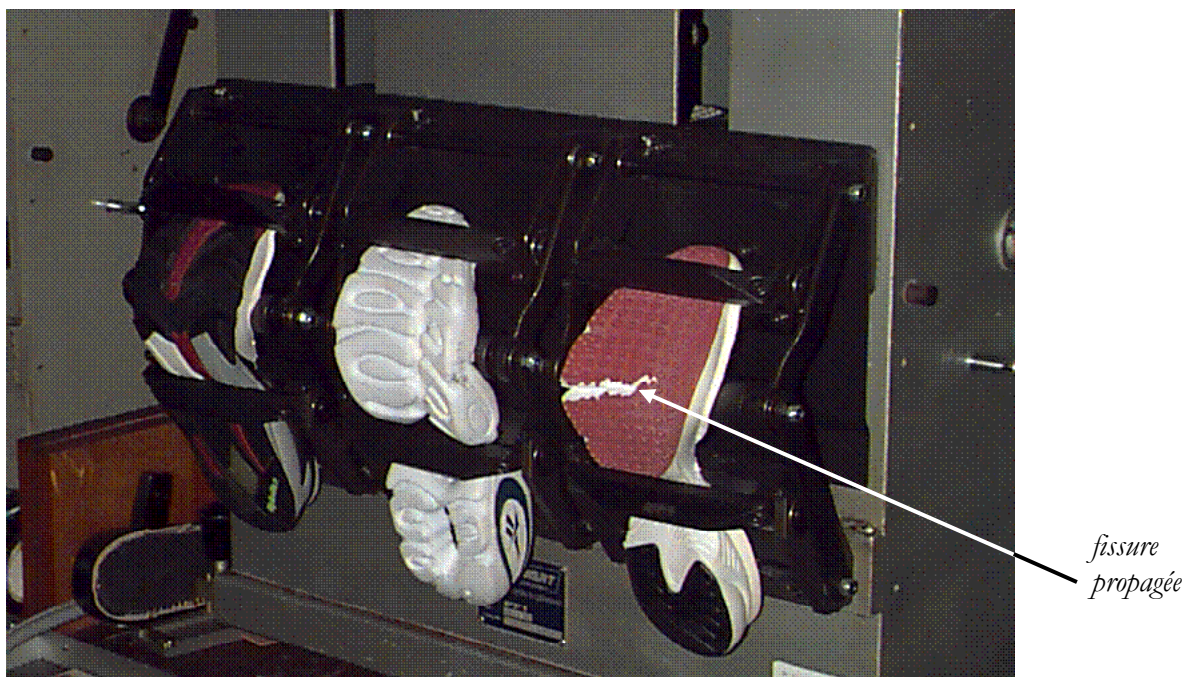
## Contexte industriel

Ce travail de thèse a été initié grâce à un contrat (CIFRE) entre le Centre Technique du Cuir, de la Chaussure et de la Maroquinerie (CTC) et le Centre des Matériaux de L'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris (CDM). Il s'intègre dans un projet plus global concernant la mise en œuvre d'un outil de conception de semelle de chaussure. Cet outil doit permettre de prévoir le comportement et la tenue en fatigue d'une semelle. Il fait intervenir un code de calcul par éléments finis associé à un post-processeur. Il a pour but d'assurer l'optimisation de la phase de conception d'une chaussure.

Les géométries critiques conduisant à l'endommagement prématuré de la semelle seront écartées après un essai 'virtuel' de fatigue. Le nombre de prototypes et d'essais mécaniques devrait être sensiblement réduit.

Le test actuellement utilisé dans le milieu industriel de la chaussure pour tester sa capacité à résister à l'amorçage d'une fissure en fatigue est un test de flexion. Ses conditions limites sont censées se rapprocher de la flexion du pieds. Il est appelé l'essai Bennewart – Fig. 1 - et sera souvent mentionné au cours de ce mémoire.

Notons que l'instrumentation de cet essai a été entreprise au cours de la thèse. Il est désormais possible de mesurer la force résultante sur la semelle.



**Figure 1** – Photographie de l'essai Bennewart de fatigue-flexion

Cet outil ne permettra pas, suite à ce travail, de prévoir le comportement de la semelle en environnement 'corrosif', ou sous des radiations U.V. Bref, nous ne nous intéressons pas au vieillissement de ces matériaux.

Le mémoire de thèse présente les résultats obtenus sur deux types d'élastomères : un caoutchouc styrène butadiène chargé de silice dit SBR et un polyuréthane réticulé cellulaire dit PU.

Plus généralement, il fournit une méthodologie de travail aboutissant à la modélisation du comportement et à l'établissement d'un critère de durée de vie sur un matériau donné.

Les lois de comportement et les critères d'endommagement en fatigue identifiées sur les matériaux cités plus haut peuvent être recalés sur d'autres matériaux élastomères.

## Contexte scientifique

La demande industrielle du Centre Technique du Cuir, qui vise à modéliser le comportement d'une semelle élastomère et à prévoir sa durée de vie à l'amorçage d'une fissure s'intègre dans la thématique de recherche du groupe Comportement des Polymères, dirigé par R.Piques et co-dirigé par L.Laiarinandrasana pour la partie numérique, du Centre des Matériaux.

L'équipe a déjà travaillé sur la modélisation hyperélastique d'élastomères et sur le comportement en fatigue de caoutchouc naturel chargé de noir de carbone [André, 1998]. Cette étude est donc tout à fait dans la continuité des recherches.

Les atouts essentiels de ce travail sont l'élargissement des possibilités de modélisation numérique du comportement des élastomères. Des lois de comportement hyperélastique-viscoélastique-endommageable ont en effet été mises en œuvre dans le code de calcul ZéBuLoN développé au Centre des Matériaux dans le cadre de ce travail. Cette étude a également conduit à l'amélioration des connaissances de l'influence des charges de silice sur le renforcement et l'endommagement du matériau.

## Démarche scientifique

L'expérience développée au laboratoire dans les dix dernières années ainsi que la prise en compte de la demande industrielle nous ont permis de proposer la démarche suivante:

### - identification d'une loi de comportement

La loi permet de calculer l'état local de contrainte et de déformation dans une structure sollicitée (semelle, éprouvette axisymétrique de fatigue)

L'identification de la loi est faite à partir d'essais simples de traction et de compression. Les trajets de chargements sont variables, les vitesses également.

Sa validité est ensuite testée par la modélisation d'essais plus complexes tels que la sollicitation en traction-compression et en torsion d'éprouvettes axisymétriques entaillées.

### - identification d'un critère de durée de vie

Le critère de durée de vie à l'amorçage d'une fissure est établi à partir de la corrélation entre un état de contrainte (ou de déformation) et un nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure.

Les essais d'endurance sont effectués sur des éprouvettes axisymétriques entaillées sollicitées en traction-compression et en torsion. Ces essais nous permettent d'imposer des chargements variés aux matériaux.

La synthèse des résultats fait apparaître les paramètres mécaniques influant sur l'amorçage d'une fissure. Elle met donc en avant les critères mécaniques pertinents pour décrire l'endommagement en fatigue des matériaux.

Ces deux étapes de travail conduisent, d'une part, à la connaissance de l'état de contrainte et de déformation, à partir de la loi de comportement identifiée, et d'autre part, à l'estimation du nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure en fonction du chargement mécanique local, grâce au critère défini.

Idéalement, la mise en place d'une loi de comportement adaptée et d'un critère de durée de vie pertinent doit donc permettre de prévoir la durée de vie de la structure semelle testée sur l'essai Bennewart.

Une attention particulière est portée sur l'influence des charges de silice contenus dans le SBR sur le comportement et sur l'endommagement de ce matériau.

## Plan

Le mémoire résume les étapes essentielles qui ont permis d'aboutir à l'objectif décrit.

La première étape concerne la modélisation du comportement mécanique. Elle a nécessité un travail important : caractérisation du comportement mécanique et identification des lois de comportement. Une grande partie du rapport lui est donc attribué.

La seconde étape concerne le comportement en fatigue des matériaux.

Les éléments de bibliographie spécifiques et nécessaires à la description du travail et à la discussion des résultats se trouvent dans les parties discutées elles-mêmes.

## CHAPITRE 1 – Propriétés physico-chimiques du SBR chargé de silice et du PU cellulaire

La **composition et la microstructure** des matériaux est intéressante à étudier. Leurs connaissances permet de préciser certaines propriétés physiques ou mécaniques.

## CHAPITRE 2 - Comportement mécanique – Résultats expérimentaux

Un **large gamme d'essais mécaniques simples** est effectuée :

- Traction uniaxiale
- Compression uniaxiale
- Compression eudiométrique
- Traction plane

Les trajets de chargements sont variables :

- Chargement monotone
- Relaxation
- Chargement cyclique

Les vitesses varient également.

Ces essais permettent d'identifier des loi des comportement adaptées au SBR et au PU.

Des essais mécaniques mettant en jeu des **sollicitations plus complexes** sont également décrits. Ils permettent de valider la loi de comportement.

Une étude complémentaire est menée sur **l'influence des charges de silice** contenues dans le SBR. Leur influence sur le comportement mécanique est étudiée. Le rôle qu'elles jouent dans l'endommagement du matériau est également observé à travers des essais mécaniques et des essais de traction in situ menés sur le SBR.

Deux annexes sont consacrées à l'étude de **l'influence de la mise en forme** sur les comportements du SBR et du PU. L'étendue de la dispersion du comportement selon la mise en forme (calandrage, moulage, injection) permet de confirmer ou d'infirmer la possibilité de calculer, par éléments finis, la réponse d'une éprouvette de SBR injectée avec une loi de comportement identifiée à partir du comportement des plaques calandrées de ce même matériau.

## CHAPITRE 3 – Modélisation du comportement mécanique

Un bref rappel sur le cadre mécanique des grandes transformations introduit ce chapitre.

Quelques **modèles** qui nous semblent adaptés à la description du comportement du SBR chargé de silice et du PU cellulaire sont présentés :

- Modèles hyperélastiques incompressibles (cas du SBR) et compressibles (cas du PU)
- Modèles d'endommagement (cas du SBR)
- Modèles élasto-plastiques (ou plasto-élastiques)
- Modèles viscoélastiques

Deux approches de modélisation de la viscoélasticité ont été mises en pratique : l'approche par intégrale héréditaire et l'approche par variables internes.

Les modèles hyperélastiques incompressibles et compressibles, un modèle d'endommagement et deux approches viscoélastiques sont alors mis en oeuvre dans le code de calcul développé au Centre des Matériaux (code ZéBuLoN [Zset, 1998]). Les modèles plastiques ne sont pas considérés dans le cadre de ce travail.

**L'identification des paramètres des lois** adaptées au SBR et au PU est alors menée.

Elle s'appuie sur les résultats de traction et compression uniaxiale (monotone, cyclique et de relaxation).

La démarche consiste à étudier l'influence des paramètres sur les valeurs des contraintes simulées, à choisir les essais mécaniques représentatifs, et à optimiser successivement les paramètres des lois.

La **validation de la loi** consiste à simuler des essais complexes. Les éprouvettes axisymétriques faiblement et fortement entaillées sont sollicitées en traction-compression et torsion. Le matériau qui constitue l'éprouvette subit donc un chargement multiaxial. Les valeurs globales mesurées expérimentalement sont alors comparées aux valeurs globales obtenues avec le calcul par éléments finis des éprouvettes.

## CHAPITRE 4 - Comportement en endurance du SBR chargé de silice

De nombreux **essais de fatigue** sont effectués sur deux types d'éprouvettes axisymétriques entaillées (faiblement et fortement). Ils permettent de solliciter les matériaux dans des conditions différentes.

Deux paramètres varient : l'élongation maximale imposée au matériau et l'élongation moyenne.

Les **faciès de rupture** et plus particulièrement les zones d'amorçage sont observées. Ce travail nous donne des informations précieuses sur les mécanismes d'endommagement et sur l'influence des charges ou des défauts de surface. La dispersion importante des résultats peut alors être expliquée.

La totalité des essais d'endurance est ensuite synthétisée sur différents **diagrammes de fatigue**.

Cette synthèse fait apparaître les paramètres mécaniques critiques de l'endommagement du matériau en fatigue. Le **critère de durée de vie à l'amorçage d'une fissure** peut alors être déterminé.

## CHAPITRE 5 – Application industrielle : l'essai Bennewart 'virtuel'

Ce chapitre applique les résultats mis au point au cours des chapitres précédents à l'essai de flexion sur semelles que constitue l'essai Bennewart.

Une étude cinématique est tout d'abord nécessaire pour connaître le chargement global appliqué à la semelle à travers cet essai.

La machine est ensuite instrumentée. La force résultante sur la semelle peut être mesurée. Cet essai devient alors un outil quantitatif pour étudier le comportement cyclique et la résistance à la fatigue des matériaux élastomères.

Ne disposant pas de semelles constituées des matériaux que nous avons étudiés, nous testons alors des éprouvettes parallélépipédiques.

Les résultats sont ensuite comparés aux calculs par éléments finis.

## Liste des notations utilisées

### Notations tensorielles

$\mathbb{A}$	tenseur d'Almansi
$\mathbb{C}$	tenseur droit de Cauchy-Green ou tenseur des dilatations
$\mathbb{B}$	tenseur gauche de Cauchy-Green
$\mathbb{E}$	tenseur de Green-Lagrange
$\mathbb{F}$	tenseur gradient de la transformation ou application linéaire tangente
$\mathbb{F}^e$	partie élastique de la décomposition multiplicative du tenseur gradient de la transformation
$\mathbb{F}^a$	partie anélastique de la décomposition multiplicative du tenseur gradient de la transformation
$\mathbb{D}$	tenseur eulérien de vitesse de déformation
$\dot{\mathbb{E}}$	tenseur lagrangien de vitesse de déformation
$\mathbb{H}$	tenseur de Kirchhoff
$\mathbb{K}$	tenseur de Piola-Kirchoff 1 ou tenseur de Boussinesq
$\mathbb{S}$	tenseur de Piola-Kirchoff 2 ou tenseur de Piola-Lagrange
$\mathbb{S}^e$	partie élastique du tenseur de Piola-Kirchoff 2
$\mathbb{S}^a$	partie anélastique du tenseur de Piola-Kirchoff 2
$\mathbb{T}$	tenseur de Cauchy

### Notations scalaires

$C_{ij}$	coefficients d'élasticité de la loi de Rivlin généralisée
$C_0$	configuration initiale
$C_t$	configuration actuelle
$d$	variable de dommage
$d_\infty$	terme de saturation du dommage
$e$	énergie interne par unité de masse
$E$	module d'Young
$E_1$	déformation nominale de Green Lagrange
$E_{\text{norm max}}$	déformation normalisée maximale
$E_{\text{norm min}}$	déformation normalisée minimale
$E_{p\text{max}}$	déformation de Green Lagrange principale maximale de Green Lagrange
$f_a$	paramètre de la loi de dissipation - loi viscoélastique (approche par variables internes)
$f_0$	pourcentage volumique de porosité
$g_i$	paramètres 'poids des temps de relaxation' - loi viscoélastique (approche fonctionnelle)
$G(t)$	terme de relaxation du module de cisaillement
$I_1$	1 <sup>er</sup> invariant du tenseur des dilatations
$I_2$	2 <sup>ème</sup> invariant du tenseur des dilatations
$I_3$	3 <sup>ème</sup> invariant du tenseur des dilatations
$K_1$	contrainte nominale (mixte, de Piola-Kirchoff n°1)
$K$	contrainte de Piola-Kirchoff n°1
$K_{\text{norm max}}$	contrainte normalisée maximale



$K_{\text{norm min}}$	contrainte normalisée minimale
$K(t)$	terme de relaxation du module de compressibilité
$m_i$	coefficients d'élasticité de la loi de Mooney
$M_c$	masse molaire moyenne entre nœuds
$N_i$	nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure
$r$	apport volumique de chaleur
$R$	rapport de charges
$V/V_0$	variation de volume
$W$	potentiel hyperélastique
$\Delta E_{\text{norm}}$	amplitude de déformation normalisée
$\Delta E_{II}$	second invariant du tenseur amplitude de déformation
$\Delta K_{\text{norm}}$	amplitude de contrainte normalisée
$\eta$	terme d'évolution du dommage
$\lambda_1$	élongation nominale
$\nu$	coefficient de Poisson
$\theta$	température
$\tau_i$	paramètres 'temps de relaxation' - loi viscoélastique (approche fonctionnelle)
$\Phi$	dissipation volumique d'énergie
$\phi$	pseudo-potentiel de dissipation

---

# Chapitre 1

## Propriétés physico-chimiques du SBR chargé de silice et du PU cellulaire

---

*Ce premier chapitre décrit les matériaux de l'étude d'un point de vue physico-chimique. Il commence par une brève introduction sur les élastomères. Les rappels indispensables à la bonne compréhension du travail sont faits.*

*Les matériaux que nous étudions sont ensuite situés dans le domaine plus vaste des matières utilisées pour fabriquer les semelles de chaussures.*

*Le troisième paragraphe s'attache à la description du premier type de matériau étudié : le caoutchouc styrène butadiène (SBR) de la nuance A (nuance la plus étudiée) : composition, microstructure. Il présente également les différentes géométries d'éprouvettes qui seront utilisées lors de la caractérisation de son comportement mécanique, ainsi que leur mise en forme respective.*

*Le quatrième et dernier paragraphe décrit le deuxième type de matériau étudié : le polyuréthane réticulé cellulaire PU de nuance A.*

L'annexe 1A décrit les microstructures et les compositions des deux autres nuances de SBR : les nuances

B et C. Rappelons que la nuance B est dite de qualité 'supérieure' et la nuance C de qualité 'inférieure',

selon la classification du fournisseur. La nuance A, la plus étudiée, est de qualité 'intermédiaire'.

## 1.1 - Les élastomères – Généralités

Les élastomères appartiennent à la famille des thermodurcissables ou hauts-polymères. Ils sont généralement définis comme étant des polymères réticulés qui présentent un état caoutchoutique à la température ambiante, très supérieure à la température de transition vitreuse ( $T_g$ ) du polymère.

A une température inférieure à  $T_g$ , l'élastomère est dans l'état vitreux : les chaînes sont figées les unes par rapport aux autres. Ces interactions proviennent des liaisons de type Van des Waals et hydrogène, dont les énergies sont respectivement de l'ordre de 4 kJ/mol et de 20 à 40 kJ/mol.

A une température supérieure à  $T_g$ , ces liaisons sont détruites. Les chaînes sont donc souples et non figées les unes par rapport aux autres. Les nœuds de réticulation empêchent toutefois l'écoulement. Un nouvel état de la matière est ainsi défini : l'état caoutchoutique [Flory et al., 1943], [Verdu, 1997].

Enfin, à très haute température, le matériau se dégrade.

Les particularités physiques décrites ci-dessus conduisent à un comportement mécanique particulier aux élastomères : l'élasticité entropique. Le matériau déformé présente une énergie d'origine entropique très supérieure à son énergie interne. Ainsi, la force de rappel est due à la diminution d'entropie (l'alignement des chaînes entraîne la diminution du nombre de conformations possibles) et non à l'augmentation de l'énergie interne. Prenons l'exemple d'un élastomère étiré. Si l'on augmente la température, la force de rappel augmente. En d'autres termes, la température permet au matériau de retrouver un état d'entropie plus élevé : les chaînes se replient sur elles-mêmes et la force de rappel augmente. Notons que ce comportement peut être modifié par l'ajout de charges [Clément, 1999].

La composition d'un élastomère industriel est souvent complexe et tenue secrète. On trouve en général, en plus du polymère initial, des charges (0 à 95%), un agent de réticulation, souvent le soufre et éventuellement un peroxyde, un activateur (souvent l'oxyde de zinc), un accélérateur, des plastifiants (souvent d'origine pétrolière), des agents de protection (rôle vis à vis de l'oxygène, de l'ozone, de la lumière, ..), etc... [IFOCA, 1990]. L'agent de vulcanisation permet de créer des nœuds chimiques (par liaisons covalentes) entre les chaînes polymères de façon à former un réseau tridimensionnel. Les charges peuvent être renforçantes, semi-renforçantes ou diluantes (inertes). Le caractère renforçant varie avec la nature de la charge, sa taille, sa morphologie, mais aussi ses interactions physiques et chimiques avec la matrice.

Des additifs particuliers sont ajoutés dans les polyuréthanes tels des catalyseurs, des agents tensioactifs (pour la fabrication des mousses), des agents d'expansion, des extenseurs de chaînes.

## 1.2 - Les élastomères dans les semelles

Les matériaux utilisés dans les semelles doivent être capables de subir de façon réversible des déformations importantes, de résister au fluage en compression, aux coupures dues à la flexion de la semelle et à l'abrasion [Zanni, 1995]. Ils doivent également résister aux UV, au vieillissement par l'ozone et par l'oxygène, et aux agressions chimiques.

Outre le cuir, deux types de matériaux répondent au cahier des charges :

- les thermoplastiques : PVC (polychlorure de vinyl) , TR (segments alternés de polybutadiène ou polyisoprène et polystyrène) , EVA (éthylène - vinyle acétate) , ...
- les thermodurcissables : NR (natural rubber) , SBR (butadiène styrene rubber) , CR (polychloroprène rubber) , NBR (butadiène-acrylonitrile rubber) , ...

La première classe de matériaux est peu résistante à la thermoabrasion car les chaînes polymères ne sont pas réticulées. La deuxième classe présente des propriétés mécaniques plus intéressantes. C'est à cette dernière qu'appartiennent les matériaux sélectionnés pour cette étude. Il s'agit d'un caoutchouc styrène butadiène (SBR) chargé de silice et d'un polyuréthane réticulé (PU) de densité 0.6.

## 1.3 - Le SBR chargé de silice

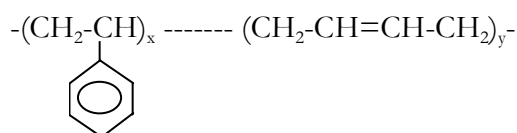
Le caoutchouc styrène butadiène (SBR) est utilisé de façon courante pour la fabrication des semelles de chaussures de ville.

Trois nuances de caoutchouc Styrène Butadiène chargé ont été choisies et étudiées. Ces trois nuances sont appelées SBR A (SBR 32860), SBR B (SBR 32963), SBR C (SBR 32726.18). La nuance A est spécifiée par le fournisseur de qualité et de coût courants et moyens, la nuance B de qualité et de coût supérieurs, la nuance C de qualité et de coût inférieurs.

Le travail a porté essentiellement sur la nuance « moyenne » : la nuance A. C'est cette nuance qui est décrite dans le mémoire. Les résultats obtenus sur les deux autres nuances (essais mécaniques, identification des lois de comportements) sont détaillés dans les annexes du mémoire.

### Généralités

La formule développée de la chaîne polymère correspond à une alternance de groupes styrène et butadiène. Elle s'écrit :



Ce polymère subit une réaction de vulcanisation par le soufre, à une température d'environ 180°C. Le matériau obtenu est alors constitué d'un réseau tridimensionnel de chaînes polymères reliées entre elles par des nœuds chimiques. Ces pontages se font grâce au soufre.

La littérature indique que la température de transition vitreuse ( $T_g$ ) du SBR est de l'ordre de -50°C.

Les liaisons rencontrées dans la chaîne sont de type covalent. Leur énergie est de l'ordre de 400 kJ/mol. Ces chaînes peuvent être coupées par l'oxygène, par l'ozone ou par la température. La liaison simple C ----- C est en rotation libre. Les chaînes peuvent ainsi avoir différentes conformations. De plus, les liaisons faibles de type hydrogène n'existant pas à température ambiante ( $T_{\text{amb}} \gg T_g$ ) entre les chaînes, ces dernières sont flexibles. Ainsi, non étirées, elles forment des pelotes.

La composition des SBR étudiés nous a été tenue secrète. Cependant, l'analyse quantitative par dispersion de longueur d'ondes (WDS) d'une surface représentative (1 mm<sup>2</sup>) du SBR A fait apparaître la composition suivante – Fig. 1.1 -.

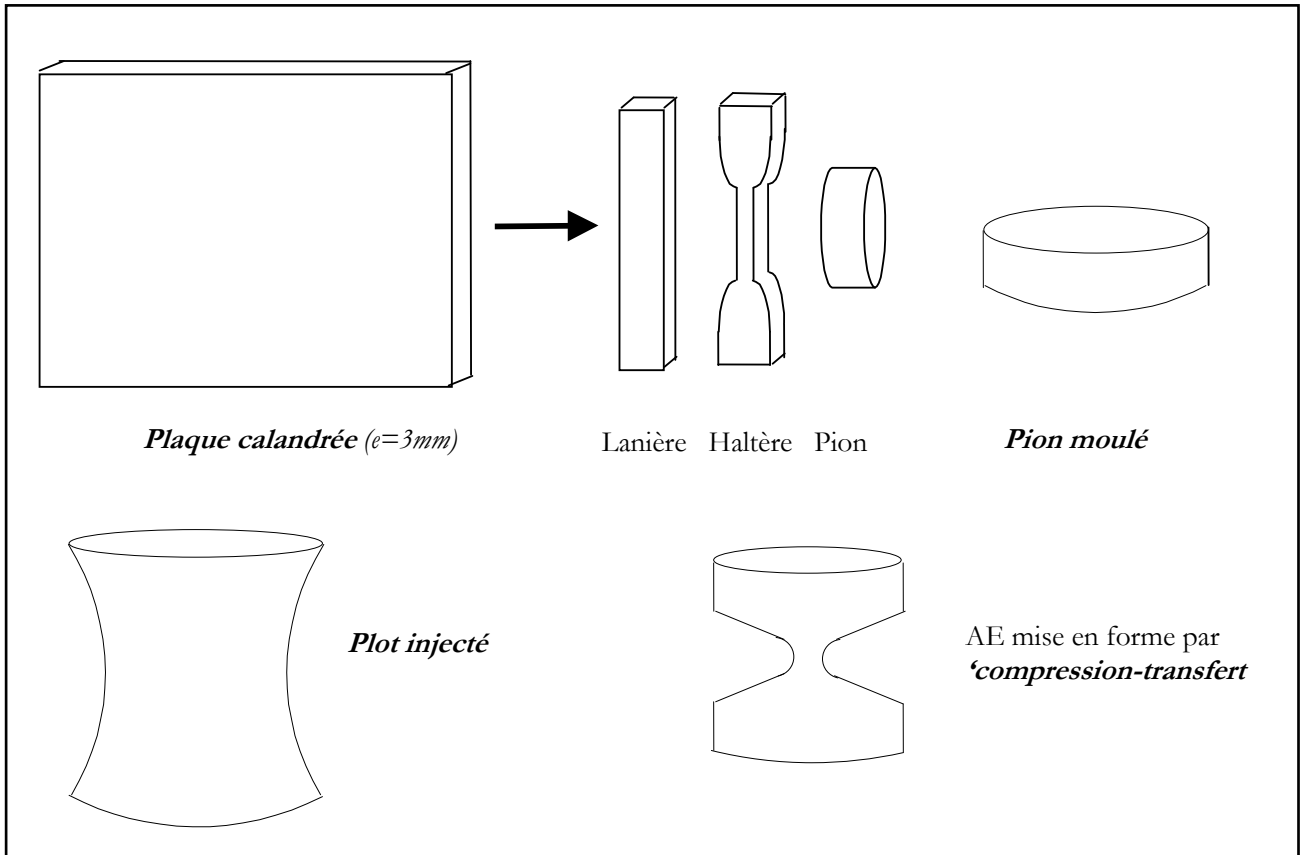
SBRA	global							
élément	C	O	Si	S	Zn	Al	Mg	Ca
% poids	64	21	12	1.6	1.3	0.6	0.03	0.03

**Figure 1.1** – Composition du SBRA - Analyse par WDS d'une zone de 1 mm<sup>2</sup>

Ces analyses sont rapportées plus précisément à la page 10 de ce mémoire.

### Mise en forme

L'étude du comportement mécanique du SBR et de ses propriétés de résistance à l'amorçage d'une fissure en fatigue nécessite la sollicitation de différentes éprouvettes. Le tableau de la Fig. 1.2 schématise les éprouvettes utilisées lors de cette étude, et explicite leur mise en forme. Les 'lanières' et 'haltères' sont découpées ou poinçonnées dans des plaques calandrées, dont les dimensions initiales sont de 700x800 mm<sup>2</sup>. Leur épaisseur avoisine les 3 mm. Les 'pions' sont moulés individuellement. Les 'plots', éprouvettes axisymétriques faiblement entaillées, sont injectées et les 'AE', éprouvettes axisymétriques plus fortement entaillées, sont mises en forme par compression-transfert.



**Figure 1.2** – SBR A – Les différentes éprouvettes utilisées pour la caractérisation de comportement mécanique

## Microstructure

La microstructure du SBR A a été observée au Microscope Electronique à Balayage (MEB). Les échantillons ont été découpés à l'aide d'un microtome à une température de  $-65^{\circ}\text{C}$ , métallisés par une couche de  $200 \text{ \AA}$  d'or et de palladium. Les éléments ont été analysés par EDS (spectrométrie par dispersion d'énergie) dans la chambre du MEB.

La surface observée à faible grossissement laisse apparaître de nombreuses tâches claires - Fig. 1.3 -. Ces dernières correspondent aux charges de silice. Leur taille varie de un à plusieurs dizaines de microns. Les agglomérats de noir de carbone apparaissent sous la forme de tâches sombres. Ils se trouvent en quantité beaucoup plus faible. Ce premier cliché illustre la mauvaise dispersion des particules dans la matrice.

Notons que les silices sont ajoutées en quantité importante car elles améliorent les propriétés à l'usure du caoutchouc.



**Figure 1.3** – SBR A – Surface plane observée au MEB : gomme, charges de silice (en clair) et de noir de carbone (en noir)

Les agglomérats de **silice** sont constitués d'un regroupement d'agrégats de silice de taille 1 micron environ – Fig. 1.4 et 1.5 -. On observe également des agrégats de silice dispersés dans la matrice (quelques uns sont indiqués par des flèches sur la Fig. 1.4). L'adhérence des agrégats et des agglomérats à la gomme semble mauvaise dans le SBR puisque le couteau du microtome a produit une décohésion au niveau de l'interface charges/gomme, et également, semble-t-il, au sein de l'agglomérat – Fig. 1.5 -. On verra plus loin (Fig. 1.7) que ce phénomène n'a pas eu lieu sur les agglomérats de noir de carbone. Ces observations, jointes à des considérations économiques, nous laisse penser qu'il s'agit d'une silice de précipitation et non de pyrogénéation.

Les silices de précipitation résultent de l'action d'un acide sur un silicate alcalin. Les silices de pyrogénéation, obtenues par réduction à très haute température du tétrachlorure de silicium, puis oxydation du silicium en silice, sont principalement utilisées comme charges dans les silicones. Les silices de précipitation peuvent avoir des tailles de particules comprises entre 10 et 500 nm. Leur surface spécifique est assez élevée (130 à 250 m<sup>2</sup>/gramme) [IFOCA, 1990]. Ces particules peuvent former des agrégats (quelques microns) qui peuvent à leur tour former des agglomérats (quelques dizaines de microns). En effet, la silice, qui est une charge polaire dans une matrice apolaire (la gomme) présente une forte tendance à se regrouper et à former des agglomérats. Ce phénomène de percolation peut être évité si l'on ajoute à la gomme un agent mouillant ou des silanes. Les silanes sont des chaînes polymères qui présentent une extrémité polaire (groupement type OH) qui peut alors former une liaison chimique avec la particule de silice, et une extrémité apolaire (groupement type CH<sub>3</sub>) qui peut se lier à la gomme. La présence d'agglomérats (taille de l'ordre de plusieurs dizaines de microns) laisse supposer qu'aucun agent n'a été ajouté à la gomme.

Le tableau accolé à la photographie montre le résultat d'une analyse EDS avec le faisceau pointé au milieu de la charge. Les éléments C, O, Si, S, Al ont été détectés. Le tableau indique leurs concentrations. La présence de carbone et de soufre, représentatifs de la matrice, tend à montrer que les agglomérats sont en fait constitués à la fois d'agrégats de silice et de gomme. La faible teneur en aluminium indique la présence de traces de kaolin (composés de base silicate d'aluminium Al<sub>2</sub>Si<sub>2</sub>O<sub>5</sub>(OH)<sub>4</sub>).

L'analyse EDS d'une charge de silice est superposée à l'analyse de la matrice – Fig. 1.6 -. Ce graphe confirme que l'agglomérat contient de la gomme et, inversement, que la matrice contient essentiellement de la gomme mais également de la silice dispersée, invisible aux grossissements utilisés.

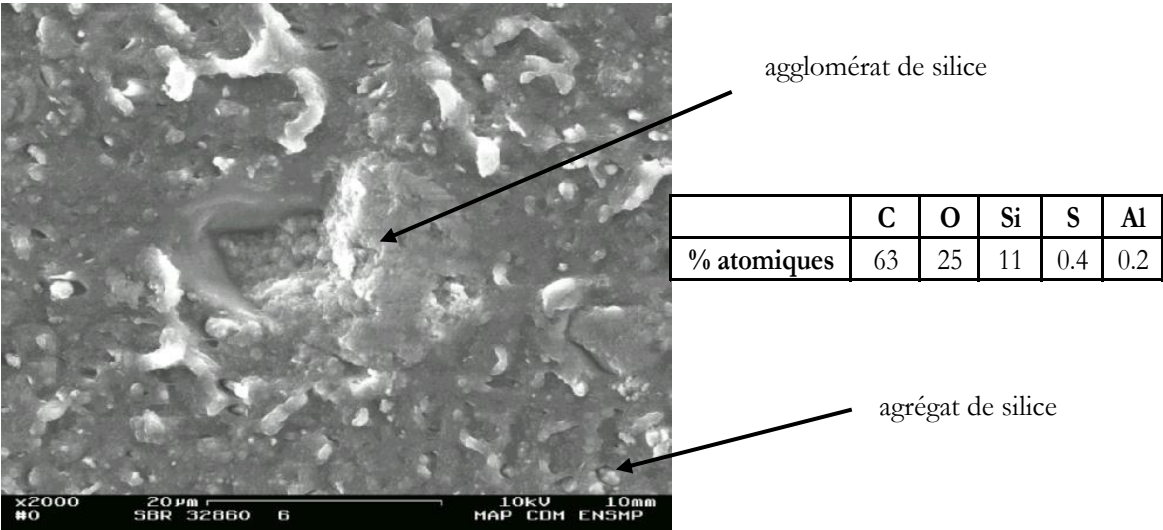


Figure 1.4– SBR A – Charges de silice observée au MEB – Analyse EDS

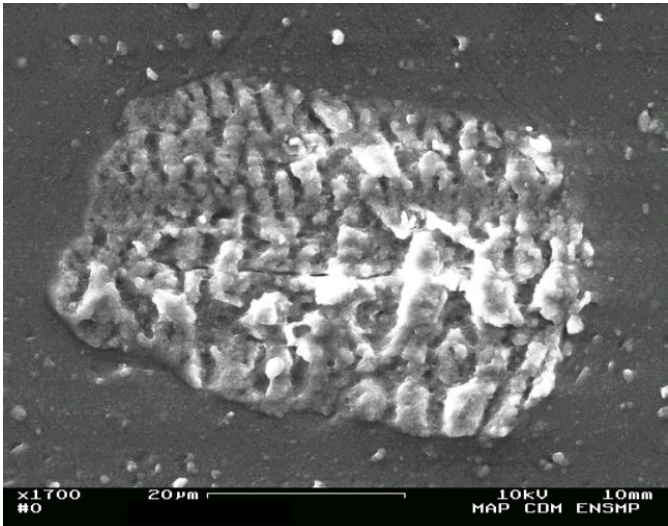


Figure 1.5– SBR A – Agglomérat de silice observé au MEB

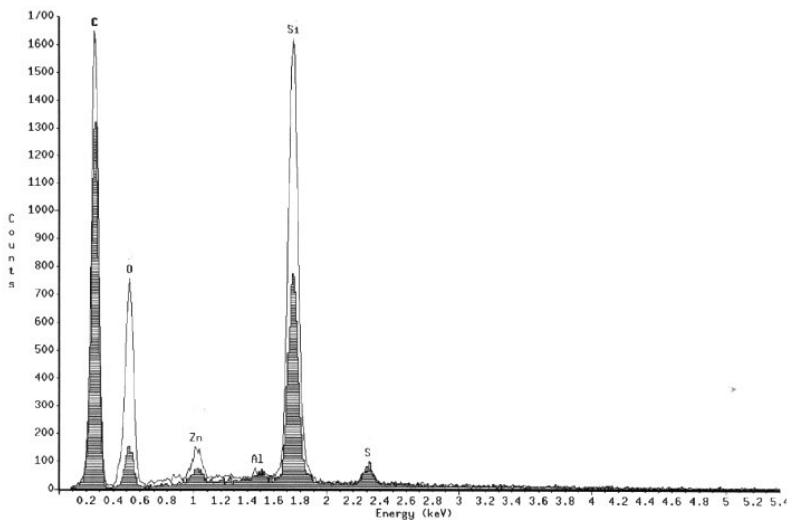


Figure 1.6– SBR A - Analyse EDS de la matrice (en sombre) superposée à l'analyse d'une charge de silice (en clair)



Les agglomérats de **noir de carbone** semblent présenter une très bonne adhésion avec la matrice - Fig. 1.7 -. La hauteur du cliché correspondant à la direction de l'épaisseur de la plaque, on suppose que la forme en 'ballon de rugby' des noirs est due au calandrage des plaques (ou à leur mise en forme par malaxage dans des rouleaux).... Le graphe accolé indique une concentration atomique de carbone égale à 97%.



	C	O	S
% atomiques	97	3	0.6

*Figure 1.7 – SBR A – Agglomérat de noir de carbone*

Les SBR contiennent également des plaquettes de **talc** ( $\text{Mg}_3[\text{Si}_4\text{O}_{10}(\text{OH})_2]$ ) - Fig. 1.8 -. Ces plaquettes proviennent de la poudre ajoutée au mélange après la fabrication pour qu'il ne "colle" pas.



	C	O	Si	Mg	S	Na	Al
% atomiques	49	28	15	7.9	0.2	0.3	0.08

*Figure 1.8 – SBR A – Charge de talc*



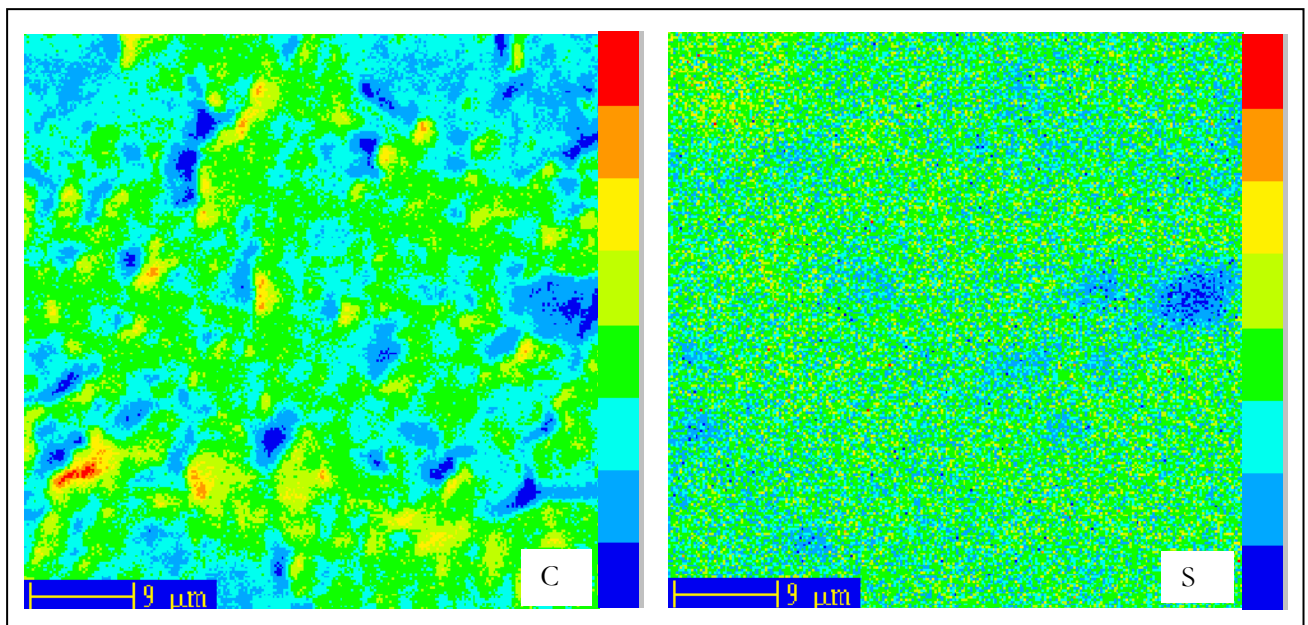
## Composition

### Cartographies des concentrations relatives

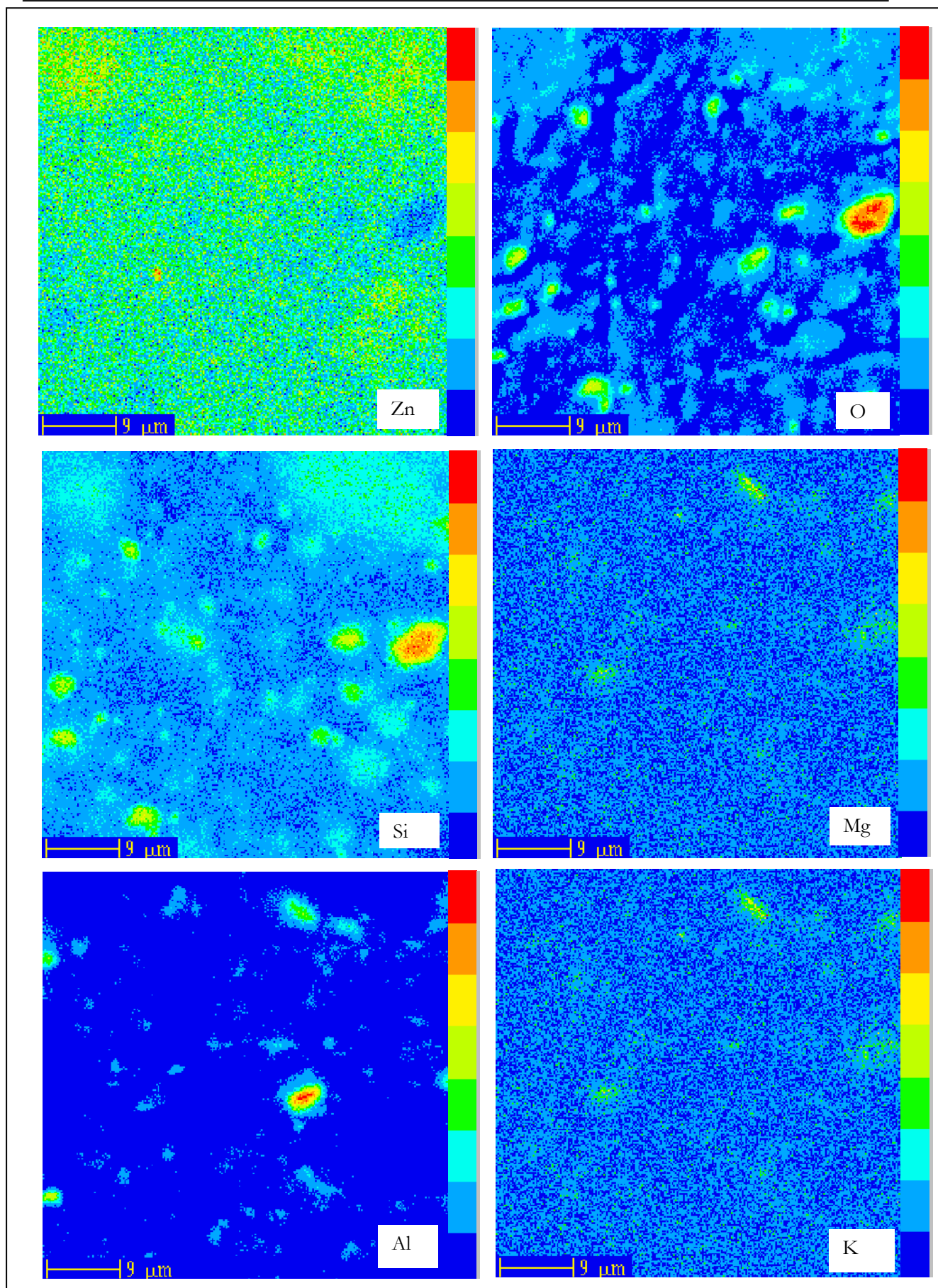
*Des cartographies indiquant les concentrations relatives des différents éléments sont obtenues à l'aide d'une microsonde de Castaing. Les surfaces, obtenues par coupe microtome à  $-65^{\circ}\text{C}$  sont couvertes d'un dépôt de carbone. La surface de l'échantillon est balayée par un faisceau d'électrons; les longueurs d'onde (résultantes) sont analysées par un spectromètre à réseau (analyse WDS). Ces résultats sont qualitatifs.*

Les éléments C, S, Zn, O, Si, Mg, Al, K sont détectés – Fig. 1.9 -.

Les 'vagues' visibles sur le cartographie du carbone proviennent en partie de la non planéité de la surface (le couteau du microtome laisse des copeaux accrochés à la surface). L'observation des cartographies conduit à l'identification de zones riches en silicium et oxygène, représentatifs de la présence de silice. Ces zones peuvent être superposées à des zones riches en aluminium et parfois en potassium. Ceci correspond à la présence de **kaolin** (composé de base kaolinite : silicate d'aluminium hydraté  $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4$ ). Le silicate d'aluminium peut être associé au potassium, ces éléments s'insérant dans la structure silicate d'aluminium. L'élément soufre est uniformément réparti dans la matrice (en dehors des charges évidemment). L'agent de vulcanisation (le soufre) a donc été bien homogénéisé avec le mélange. L'élément zinc, qui correspond à la présence d'oxyde de zinc, activateur de la réaction, est réparti de façon relativement uniforme dans la matrice.



**Figure 1.9** - SBR A – Cartographies en éléments C, S, Zn, O, Si, Mg, Al, K (analyses WDS)



**Figure 1.9 suite** - SBR A – Cartographies en éléments C, S, Zn, O, Si, Mg, Al, K (analyses WDS)

### Dosages quantitatifs

Des dosages quantitatifs ont également été effectués à l'aide d'une microsonde de Castaing par WDS (analyse par dispersion de longueurs d'ondes). Des zones de taille suffisamment importante pour considérer le matériau "homogène" et des zones de taille plus faible correspondant à des charges ont été balayées et analysées – Fig. 1.10 -. Ces résultats correspondent à la synthèse des mesures effectuées sur des échantillons recouverts d'un dépôt conducteur de carbone ou d'aluminium.

<b>SBRA global</b>								
<b>élément</b>	<b>C</b>	<b>O</b>	<b>Si</b>	<b>S</b>	<b>Zn</b>	<b>Al</b>	<b>Mg</b>	<b>Ca</b>
<b>% poids</b>	64	21	12	1.6	1.3	0.6	0.03	0.03

#### **SBRA A silice**

<b>élément</b>	<b>C</b>	<b>O</b>	<b>Si</b>	<b>S</b>	<b>Ca</b>	<b>Zn</b>
<b>% poids</b>	47.00	38.00	21.00	1.30	0.04	1.90

#### **SBRA noir de carbone**

<b>élément</b>	<b>C</b>	<b>O</b>	<b>Si</b>	<b>S</b>	<b>Ca</b>	<b>Zn</b>
<b>% poids</b>	94	1.7	0.02	1.5	0.01	0.5

**Figure 1.10** - SBR A – Dosage quantitatif par WDS en éléments C, O, Si, S, Zn, Al, Mg, Ca sur une surface de 1 mm<sup>2</sup> (analyse 'globale') et par pointés sur des charges de silice et sur des charges de noir de carbone

L'addition des teneurs en silice et en oxygène permet d'approcher la valeur de pourcentage de poids en silice dans le mélange. Elle est proche de 33%, et comme indiqué dans l'annexe 1A, constante dans les trois mélanges. La teneur en carbone a pu être analysée sur les échantillons recouverts d'un dépôt d'aluminium. Elle est comprise entre 60 et 70%. Ce SBR contient également 1.3% de zinc (donc 2% de ZnO), 1.6% de soufre et 0.6% d'aluminium (traces de kaolin). Il contient également quelques pourcents de magnésium, calcium et potassium.

Des zones plus petites ont permis d'analyser les charges minérales et les noirs de carbone. Le dosage des agglomérats de silice révèle la présence de carbone en quantité importante. Ceci confirme nos présomptions selon lesquelles les agglomérats de silice sont en fait des amas constitués d'agrégats de silice et de gomme occluse. On note également que la somme des pourcentages en éléments est supérieure à 100%. On l'attribue à la non-homogénéité de la zone analysée dans la poire d'interaction électron/matière.

Les charges minérales ont également été dosées par calcination à 650°C. Les résultats de dosage montrent une teneur en charges minérales comprise entre 32 et 33%. Une analyse des charges par spectrométrie infra-rouge indique que ces dernières sont essentiellement composées de silice ou de silicate.

### Différences de composition selon la mise en forme

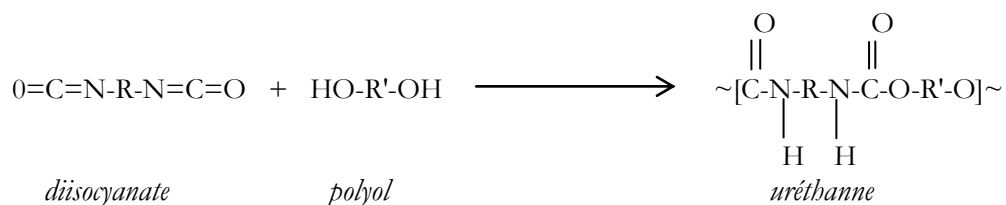
Ces analyses ont été faites à partir de caoutchouc issu de plaques calandrées. L'observation au MEB des microstructures du SBR A mis en forme par calandrage dans les plaques, par moulage dans les pions ou par injection dans les plots est identique quel que soit l'échantillon. De plus, le dosage par calcination des charges minérales conduit à l'évaluation de 33% en poids dans les trois éprouvettes. Par contre, le dosage en silice parmi ces charges minérales est différent selon les échantillons. Il est de 70% dans les plaques et les pions et tombe à 56% dans le cas des plots. Afin de connaître la composition de ces charges 'hors silice' et représentant dans le plot 44% de l'ensemble des charges minérales, les éléments O, Si, S, Zn, Al, Mg et Ca ont été dosés par EDS sur la microsonde de Castaing, à partir d'un échantillon prélevé dans un plot. Les résultats sont identiques à ceux obtenus à partir d'un échantillon issu d'une plaque calandree.

On suppose alors que les éléments minéraux ne sont pas répartis de façon homogène dans le plot et que les 44% de matière minérale 'hors silice' sont composés de talc ou de craie. Ces charges seraient ajoutées lors du second malaxage de la gomme de SBR effectué avant l'injection dans le moule, et seraient mal réparties dans la gomme.

Les microstructures et compositions des deux autres nuances de SBR sont traitées dans l'annexe 1A.

## 1.4 - Le Polyuréthane cellulaire (PU)

Le polyuréthane résulte d'une réaction de polycondensation entre un composé du type polyol (polyester ou polyéther) et un diisocyanate, selon la réaction [IFOCA, 1990] :



R et R' sont des chaînes organiques.

Le polyuréthane réticulé résulte de la polycondensation des macromolécules d'uréthane, dont la fonctionnalité<sup>1</sup> est supérieure à 2.

Le PU que nous avons choisi résulte de la polycondensation entre un composé de polyéther et d'un diisocyanate. Il sera appelé PU A. Le PU à base de polyéther est utilisé préférentiellement dans la fabrication des chaussures de ville. Le fournisseur a spécifié quelques données matériau, résumées dans le tableau de la Fig. 1.11. La dureté est de 65 shore A et la densité de 0.6. Il ne comporte pas de charge puisque ce matériau présente 'naturellement' une bonne résistance à l'usure.

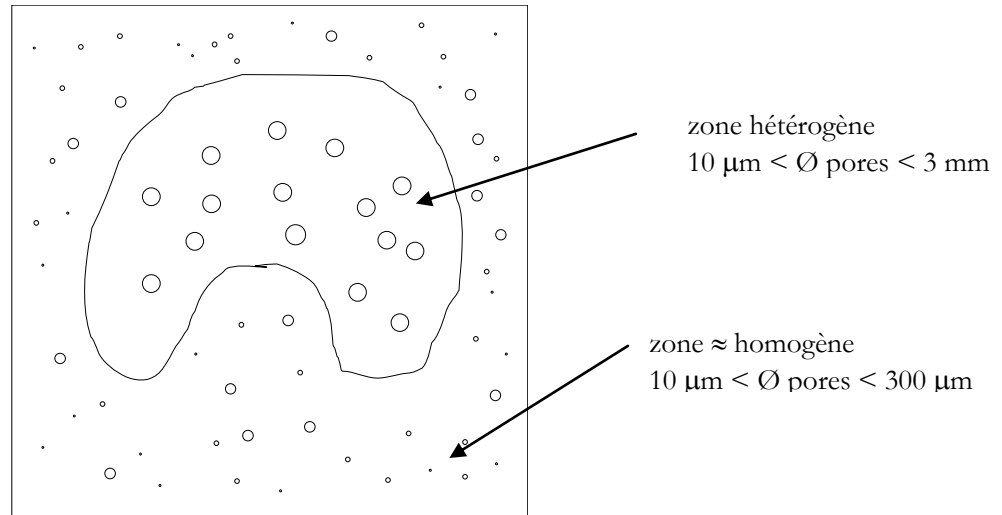
<b>PU A (éter)</b>			
<b>Polyols</b>	mélange base oxide	Poids moléculaire	~4000
	de propylène et oxyde d'éthylène	Fonctionnalité	2
		Additifs	agents microbiens
<b>Isocyanates</b>	MDI	Poids moléculaire	~1100
		% isocyanate	25
<b>Densité</b>	0.6		
<b>Dureté (sh.A)</b>	65		
<b>Contrainte à rupture (MPa)</b>	5		
<b>Elongation à rupture</b>	5		

**Figure 1.11** – PU A – Données du fournisseur

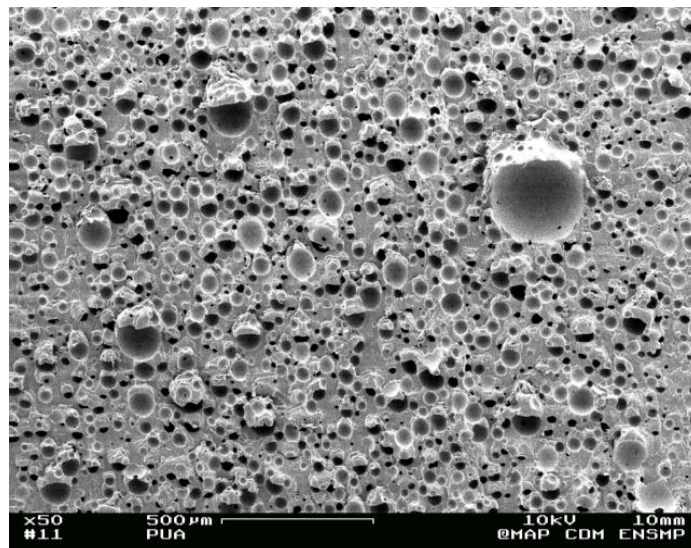
Le PU A nous a été fourni sous forme de plaques injectées de dimensions 200x200x3 mm<sup>3</sup>. Comme schématisé sur la Fig. 1.12, la densité et la taille des pores varient de façon décroissante du centre vers la périphérie de la plaque. La taille des pores au centre de la plaque peut atteindre plusieurs millimètres. Les éprouvettes sont donc exclusivement prélevées sur les bords des plaques. La porosité est mise en évidence sur les clichés MEB de la Fig. 1.13. La taille des pores est comprise entre 10 et plusieurs centaines de µm. Aucune charge n'est visible dans la matrice - Fig. 1.14 -.

<sup>1</sup> fonctionnalité : nombres de chaînes issues du noeud

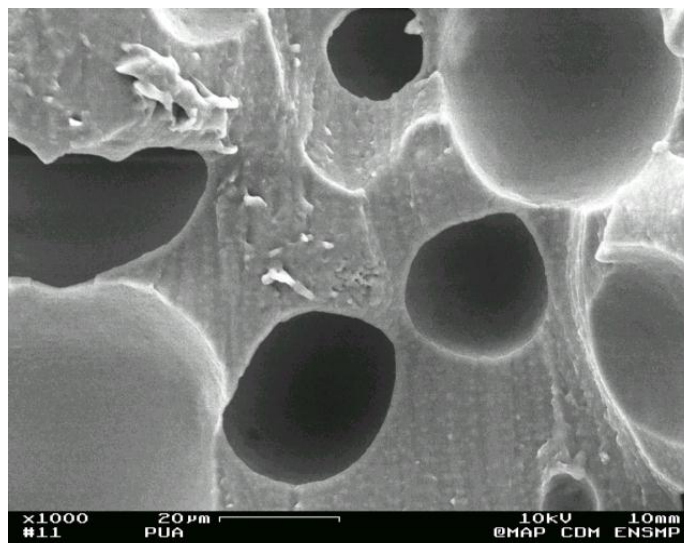




**Figure 1.12** – PU A – Schéma des porosités dans la plaque injectée



**Figure 1.13** – PU A – Observation MEB d'une coupe plane – Distribution des tailles de pores



**Figure 1.14** – PU A – Observation MEB d'une coupe plane – Matrice entre les pores

## 1.5 - Conclusion

### ***SBR A***

Le caoutchouc SBR A contient environ 33% en masse de charges minérales. La majeure partie de ces charges est constituée de silice. Les autres charges additives telles que le kaolin, le talc, le noir de carbone sont présentes en quantité nettement moins importante (quelques pourcents).

Les charges de silice sont présentes sous forme d'agrégats de taille de quelques microns, mais également d'agglomérats de taille de quelques dizaines de microns. Les analyses révèlent que ces agglomérats sont en fait constitués d'agrégats et de gomme.

Le SBR nous est livré sous forme de plaques calandrées, de pions moulés, d'éprouvettes axisymétriques faiblement entaillées - les 'plots' -, injectées, et d'éprouvettes axisymétriques fortement entaillées - les 'AE' -, mises en forme par compression-transfert. Les microstructures du SBR apparaissent similaires quel que soit le procédé de mise en forme. Il semble que les éprouvettes 'plots' aient une répartition inhomogène de charges (silice, silicates, talc).

### ***PU A***

Le PU A est un matériau cellulaire. La taille de ses pores varie entre 10 microns et plusieurs millimètres.

Le matériau nous est livré uniquement sous forme de plaques injectées. Les éprouvettes seront prélevées exclusivement sur les bords de ces plaques. La taille des pores est alors comprise entre 10 et 300 microns.

## Bibliographie

**Clément** – Etude des mécanismes de renforcement des réseaux polyméthylsiloxanes chargés de silice – Thèse Paris VI – 16/11/**1999**

**Flory, Rehner** – Journal of Chemistry and Physics – vol. 11, pp. 512, 520, **1943**

**IFOCA** - *Synthèse des propriétés et technologies des élastomères* - Rapport LRCCP, **1990**

**Verdu** - *Elasticité caoutchoutique* - Cours DEA Mécanique et Matériaux, 1997

**Zanni** - *Les matériaux synthétiques de la chaussure* - Centre Technique du Cuir, de la Chaussure et de la Maroquinerie, **1995**

---

# Chapitre 2

## Comportement mécanique

### Résultats expérimentaux

---

*Ce chapitre fait la synthèse des essais entrepris afin de caractériser les comportements mécaniques du SBR (Styrene Butadiene Rubber) et du PU (PolyUrethane). Cette étape de caractérisation est nécessaire (et primordiale !) pour l'identification des lois de comportement. Ces dernières, intégrées dans un code de calcul par éléments finis, permettent de connaître les états de contraintes et de déformations en tout point d'une éprouvette ou d'une structure chargée de manière simple ou complexe. Dans la cas précis de notre étude, les états de contraintes et de déformations doivent être connus à l'endroit où amorce une fissure sur les éprouvettes et les semelles testées en fatigue sur l'essai de flexion 'Bennewart'. La loi doit donc être capable de simuler le comportement cyclique d'une structure. Elle doit être valide à la fois dans une large gamme de chargement (traction, compression, cisaillement) et dans une échelle d'élongation importante. Elle doit également être valide dans la gamme de vitesse qui recouvre les essais de caractérisation et les essais de fatigue (trois décades de vitesses).*

*Le premier paragraphe présente les dispositifs expérimentaux : machines d'essais, éprouvettes, méthodologie.*

*Le second paragraphe expose les essais mécaniques uniaxiaux et multiaxiaux effectués sur le SBR de nuance A.*

*Le troisième paragraphe décrit les mêmes résultats dans le cas du PU.*

*Deux annexes sont consacrées à l'étude de l'influence de la mise en forme sur le comportement mécanique du matériau. L'annexe 2B concerne le SBR de nuance A. Cette étude permet de confirmer ou d'infirmer la possibilité de calculer par éléments finis une éprouvette injectée avec une loi de comportement identifiée sur le SBR en plaques. L'annexe 2E concerne le PU cellulaire. L'étude permet de discuter l'homogénéité du lot de matière qui nous a été livré.*

*Le quatrième paragraphe s'attache à la description de l'influence des charges de silice sur le comportement du SBR de nuance A. Cette étude complémentaire permet de mieux appréhender les difficultés liées à la modélisation du comportement d'un tel matériau, ainsi que de mieux cerner l'origine physique des propriétés mécaniques de ce matériau « composite ». Elle permet également de mettre en évidence quelques mécanismes d'endommagement. Ceci est utile à la fois pour modéliser l'endommagement tout en connaissant les limites du modèle et aussi pour donner des indications quant aux mécanismes d'endommagement en fatigue du matériau.*

*Rappelons que seuls les essais relatifs au SBR A et PUA sont discutés dans ce chapitre. Ils sont exposés et commentés successivement. Les résultats relatifs aux SBR B et C sont exposés dans l'annexe 2D. Ils présentent un comportement similaire à celui du SBR A.*



## 2.1 - Procédure expérimentale

Ce premier paragraphe décrit les dispositifs expérimentaux qui ont été utilisés pour caractériser le comportement des élastomères : machines d'essais, éprouvettes, techniques de mesures d'élongation et de force. Les essais qui ont servi à la validation de la loi de comportement sont ensuite présentés : essais de traction sur éprouvettes 'plot' et de torsion sur éprouvettes 'AE'. Ces derniers essais sont également mis en œuvre pour étudier le comportement des matériaux en endurance.

La collaboration avec le Centre Technique du Cuir et l'Ecole des Mines d'Alès a permis d'effectuer certains essais sur des machines plus adaptées et également d'ouvrir des perspectives nouvelles d'essais.

### Les essais de caractérisation du comportement

#### Essais de traction uniaxiale jusqu'à rupture et de traction uniaxiale cyclique

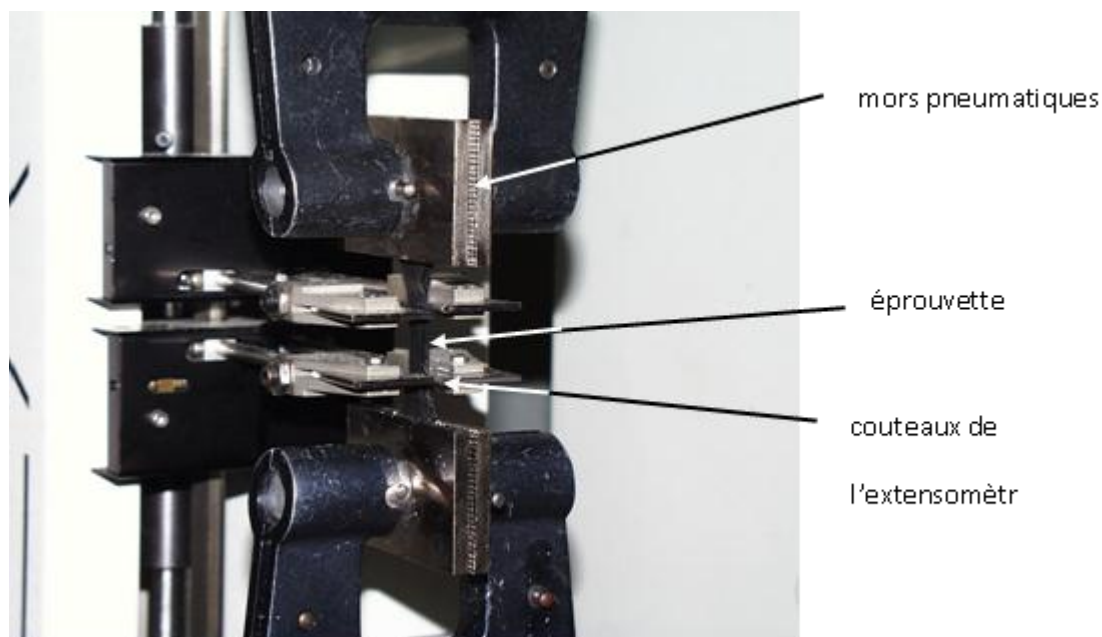
La majeure partie des essais de traction uniaxiale a été effectuée au Centre Technique du Cuir, de la Chaussure et de la Maroquinerie (CTC) sur une machine d'essais à vis Adamel Lhomargy DY34 – Fig. 2.1 -. La force est mesurée grâce à une cellule de charge de capacité 1 kN. L'extensomètre est composé de deux pinces qui serrent l'éprouvette selon son épaisseur, à une distance prédéfinie. Les pinces sont guidées dans des rails au cours de l'essai et restent perpendiculaires à l'éprouvette – Fig. 2.2 -. Elles entraînent, par l'intermédiaire d'un système de câbles et de poulies, un codeur optique dont les impulsions sont envoyées vers un compteur numérique d'allongement. Son étendue de mesure est de 600 mm.

Les éprouvettes utilisées pour la traction jusqu'à rupture sont en forme d'**haltère**, d'où leur appellation. Cette géométrie permet de localiser les déformations dans le centre de l'éprouvette et évite ainsi la rupture dans les mors de la machine. Son plan est représenté sur la Fig. 2.3. Elle est poinçonnée dans les plaques calandrées de SBR ou les plaques injectées de PU.

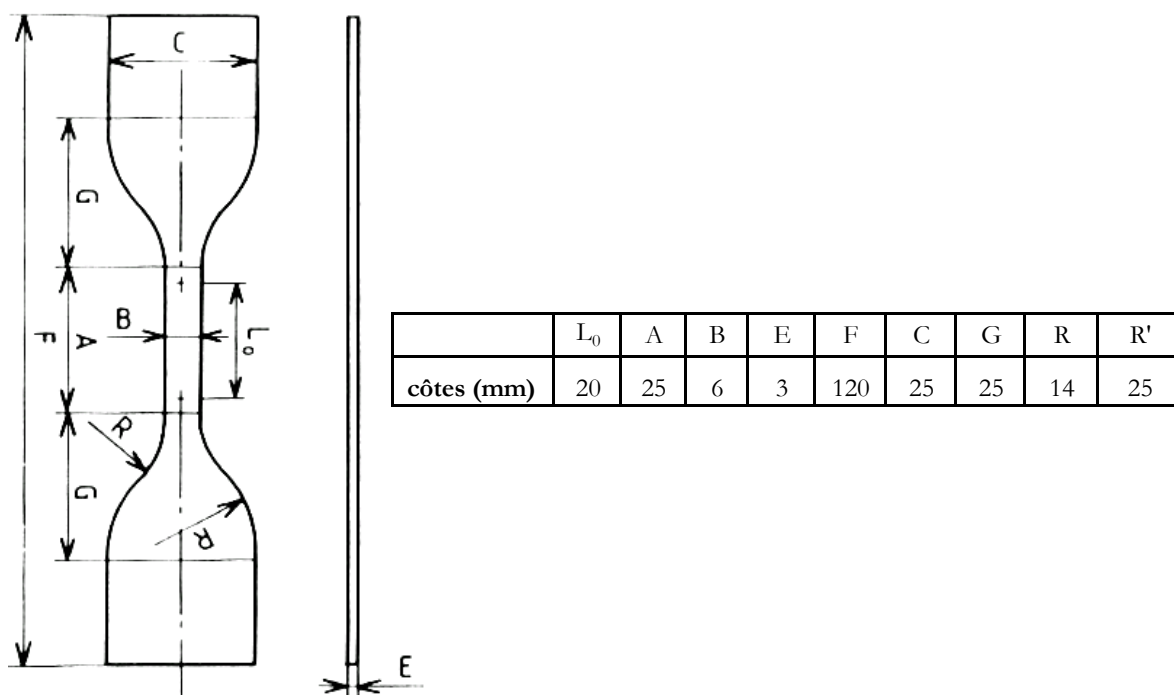
Les éprouvettes utilisées pour les essais cycliques sont parallélépipédiques. Cette géométrie est appelée éprouvette '**lanière**'. Elle est découpée au cutter dans les plaques. Sa longueur est variable autour de 200 mm et sa largeur autour de 20 mm. Sa plus grande section permet de diminuer l'erreur sur la mesure.



**Figure 2.1** – Machine d'essais utilisée pour les essais de traction uniaxiale : dynamomètre + extensomètre + système de pilotage et d'acquisition, située au CTC



**Figure 2.2** - Machine d'essais utilisée pour les essais de traction uniaxiale – Détails du mors et de l'extensomètre

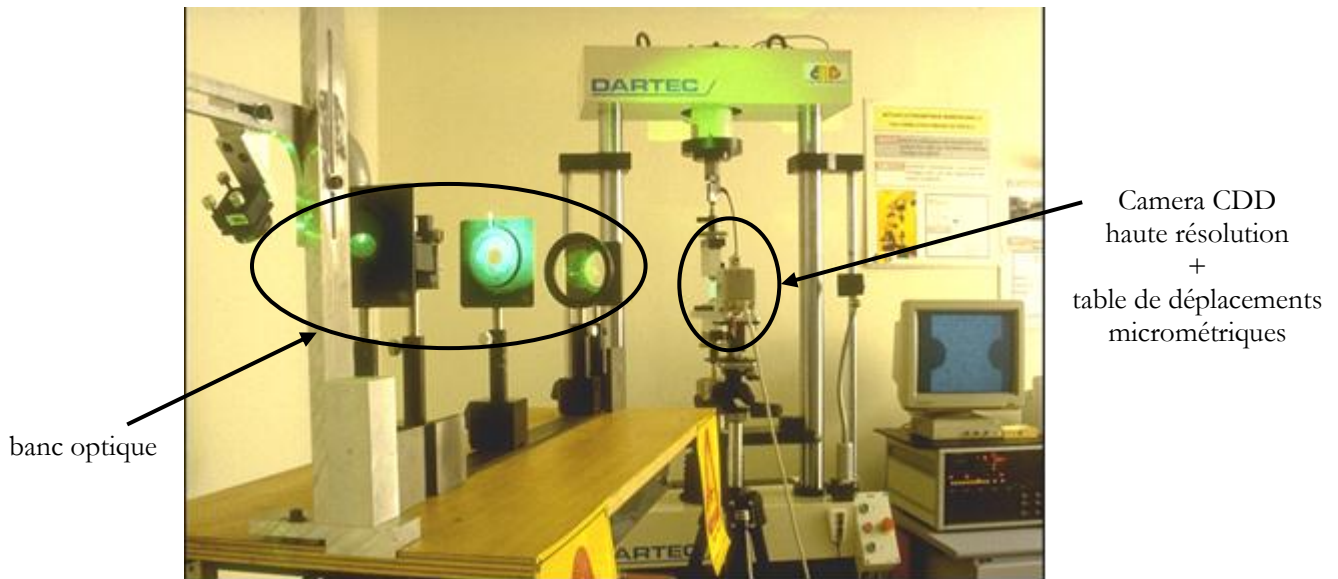


**Figure 2.3** – Géométrie de l'éprouvette haltère

Certains essais de traction uniaxiale ont également été menés à l'Ecole des Mines d'Alès. Le laboratoire de Mécanique et de Métrologie est équipé d'un extensomètre optique (granularité laser et corrélation d'images) qui permet de mesurer un champ de déplacement donc de déformation (2 dimensions) – Fig. 2.4 -. [Laraba, 1998] a, au cours de sa thèse, adapté l'essai à la mesure de grandes déformations.

Si l'on suppose que l'élongation hors-plan est égale à l'élongation transversale, il est alors possible de calculer la déformation volumique au sein des éprouvettes.

Les éprouvettes testées sont de géométrie 'lanière'.



**Figure 2.4** - Le dispositif expérimental d'extensométrie laser bidimensionnelle

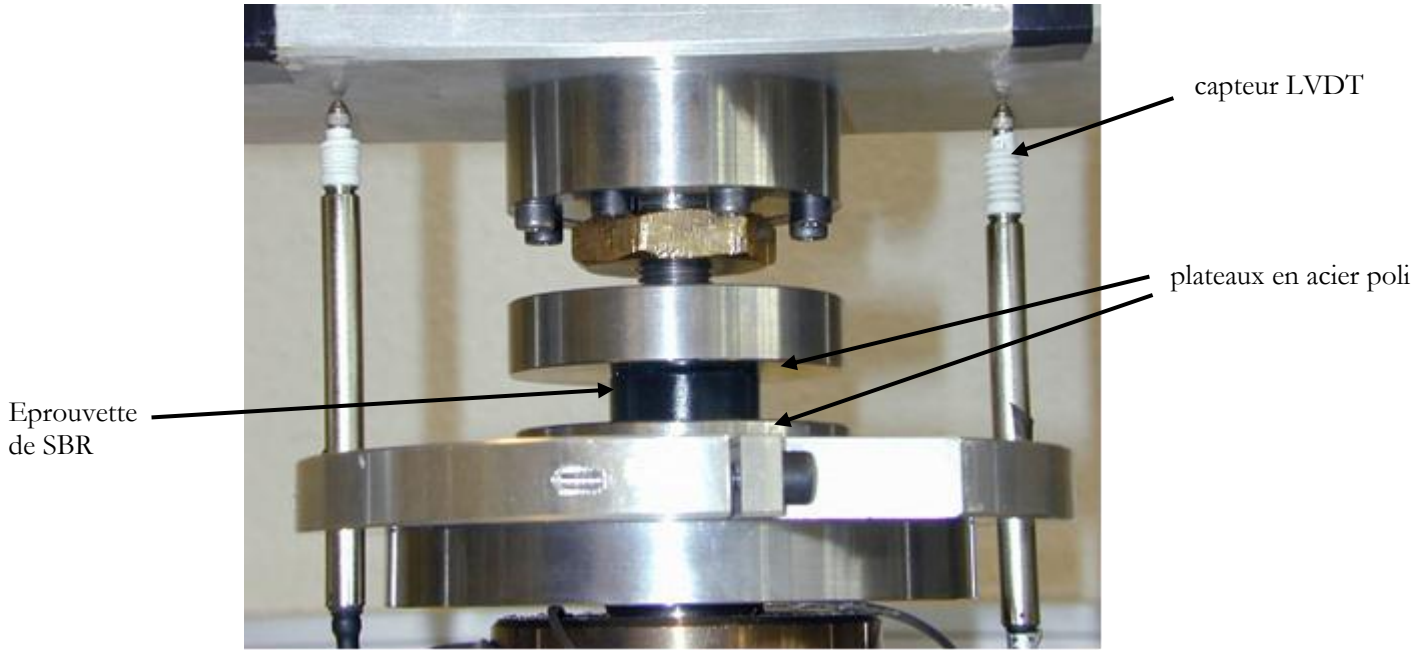
### Essais de compression libre et œdométrie

Les essais de compression ont été menés sur une machine d'essai à vis Tinius-Olsen au Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris. Les cellules de charge sont choisies adaptées à l'essai (200 N,  $10^3$  N,  $10^4$  N, et  $5 \cdot 10^4$  N). Les mesures de déplacement utilisent deux capteurs LVDT placés diamétralement opposés par rapport à l'éprouvette – Fig. 2.5 -. L'élongation est calculée grâce à une moyenne des deux déplacements. L'erreur liée au mauvais parallélisme des deux plateaux est ainsi moyennée.

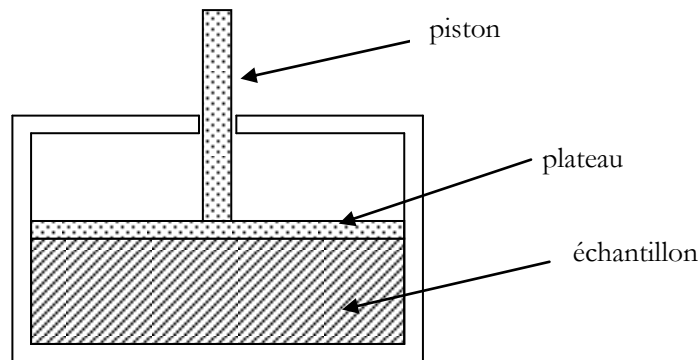
Les essais de compression libre sont réalisés entre deux plateaux d'acier inoxydable soigneusement poli et lubrifié, afin de limiter les frottements.

Des chambres de compression confinée ont été mises au point pour mener les essais de compression œdométrique. Le déplacement radial de l'éprouvette est bloqué. La compression est appliquée à l'aide d'un piston. Les chambres sont fabriquées en laiton, afin de diminuer les frottements lors du déplacement longitudinal de l'éprouvette – schéma de la Fig. 2.6 -.

Les éprouvettes sont de géométrie cylindrique. Elles sont constituées soit d'un **pion** moulé, cylindre de diamètre 30 mm environ et de hauteur 12 mm environ, soit d'un empilement de cylindres prélevées dans les plaques (3 mm de hauteur par cylindre), soit d'un pion découpé dans les éprouvettes 'plots' (voir Fig. 2.8).



**Figure 2.5** – Essai de compression libre – Epreuve, plateaux et extensomètres



**Figure 2.6** – Schéma de l'essai de compression adométrique

### **Essais de relaxation en traction uniaxiale**

Les essais de relaxation doivent être effectués avec une montée en charge rapide. Ils n'ont, pour cette raison, pu être menés sur une machine de traction classique. La machine électromécanique de fatigue en traction-compression, décrite ci dessous, est alors utilisée. Elle permet un asservissement rapide, mais ne possède pas de système d'extensométrie. La mesure 'locale' de la déformation au centre de l'éprouvette est donc faite grâce à un cathétomètre, par mesure de la distance entre deux traits dessinés sur l'éprouvette avant l'essai, puis au cours de l'essai de relaxation.

Les éprouvettes testées sont de géométrie 'lanière'.

### **Essais de traction plane**

Les essais de traction plane ont été menés à l'Ecole des Mines d'Alès. Ce chargement est obtenu en sollicitant des éprouvettes dont la largeur est 6 à 8 fois supérieure à leur longueur. Pour parfaire les conditions limites, le déplacement transversal de l'éprouvette est bridé par des glissières [Laraba, 1998].

L'éprouvette de traction plane est également parallélogramme. Elle a 58 mm de largeur et 30 mm de longueur. Ces cotes sont choisies afin de réduire au maximum la déformation transversale.



## Les essais de validation de la loi de comportement

### Essais de traction-compression cycliques sur éprouvettes 'plots'

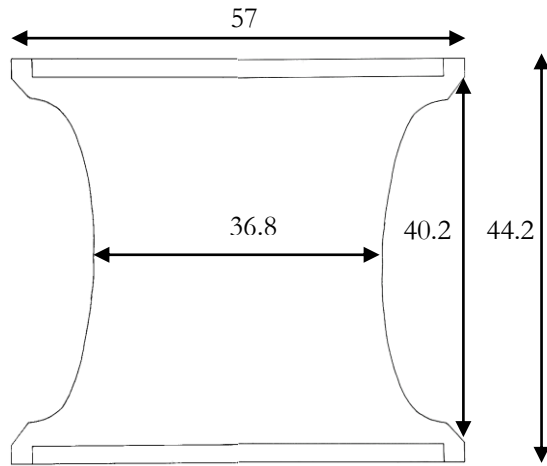
Les essais de traction-compression sont effectués sur une machine électromécanique fonctionnant avec un système bielle-manivelle. Elle a été fabriquée au Centre des Matériaux et permet de solliciter en fatigue les caoutchoucs sous un chargement de traction-compression – Fig. 2.7 -. Ces essais de fatigue constituent également une validation de la loi de comportement. Le déplacement du mors inférieur est mesuré grâce à un capteur LVDT, et la force résultante par une cellule de charge adaptée.



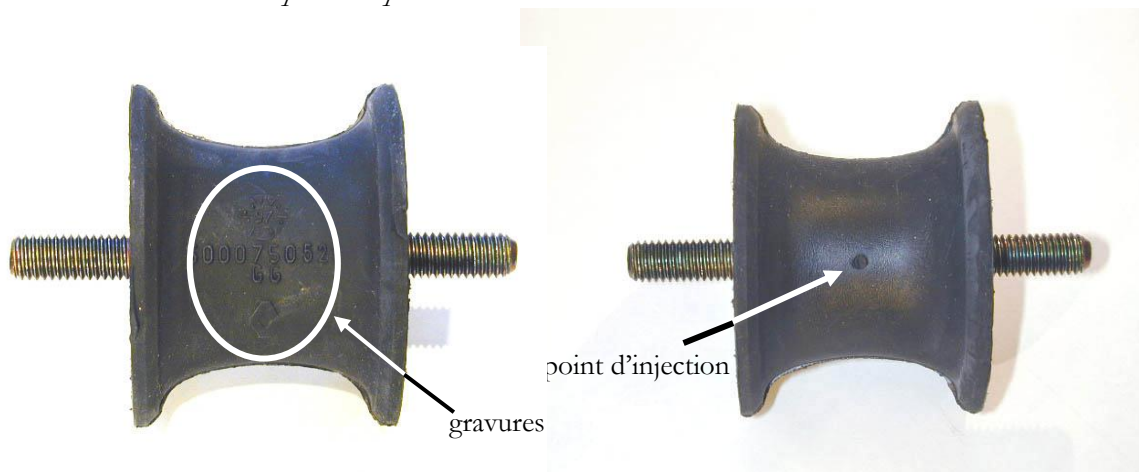
**Figure 2.7** – Machine électromécanique de fatigue en traction-compression

L'éprouvette 'plot', axisymétrique faiblement entaillée, est utilisée pour tester le matériau en traction et compression cyclique. Elle est utile pour étudier le comportement du matériau en fatigue. D'une part, le rapport entre volume de matière et surface est plus important que dans le cas d'une haltère : l'importance des défauts de surface est donc minimisée. D'autre part elle permet de tester le matériau en traction et en compression : pas de flambement comme dans le cas d'une haltère. Notons que l'éprouvette 'plot' est fabriquée à partir d'un moule déjà existant chez le fournisseur de SBR et utilisé pour la fabrication de pièces moteurs. Il est mis en forme par injection « Pin-Point ». Nous n'avons pas pu obtenir de plan précis du moule. Le profil de l'éprouvette plot a donc été reconstitué à partir de la moyenne des cotes relevées sur une vingtaine d'éprouvettes, grâce à un projecteur de profil agrandisseur. Son plan est indiqué sur la Fig. 2.8.

D'autre part, le moule a été gravé de sigles et d'écritures diverses. Les éprouvettes présentent donc des défauts de surface dus à ces inscriptions, en plus des joints symétriques dus au moule (en deux parties). Enfin, il est important de noter que le point d'injection se situe dans la partie centrale de l'éprouvette qui est la zone de rayon le plus faible donc la zone dite utile de l'éprouvette. Cela ajoute un défaut de surface important et peut accentuer la non homogénéité du matériau dans cette zone. Les photos de la Fig. 2.9 illustrent notre propos.



**Figure 2.8** – Géométrie de l'éprouvette plot

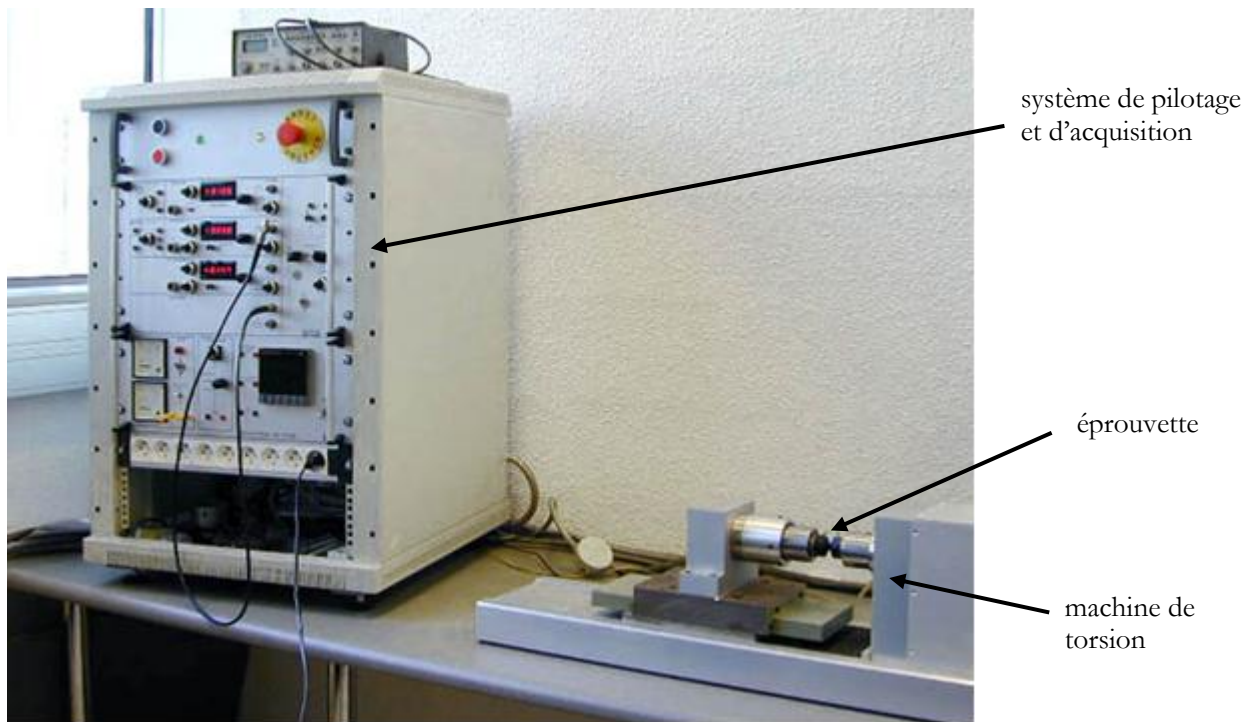


**Figure 2.9** – Défauts de surface de l'éprouvette plot : gravures et point d'injection

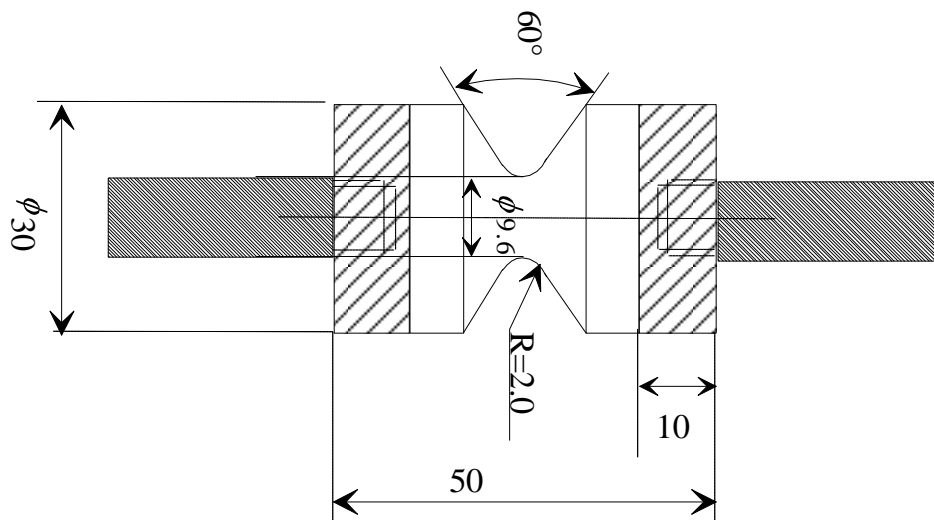
### **Essais de torsion cyclique sur éprouvettes axisymétriques entaillées (AE)**

Les essais de torsion sont menés sur une machine de torsion également fabriquée au Centre des Matériaux – Fig. 2.10 -. Une cellule de capacité 6 N.m a été fabriquée pour mesurer le couple aux extrémités (mors en acier) de l'éprouvette 'AE'. L'angle est mesuré grâce à un capteur de rotation.

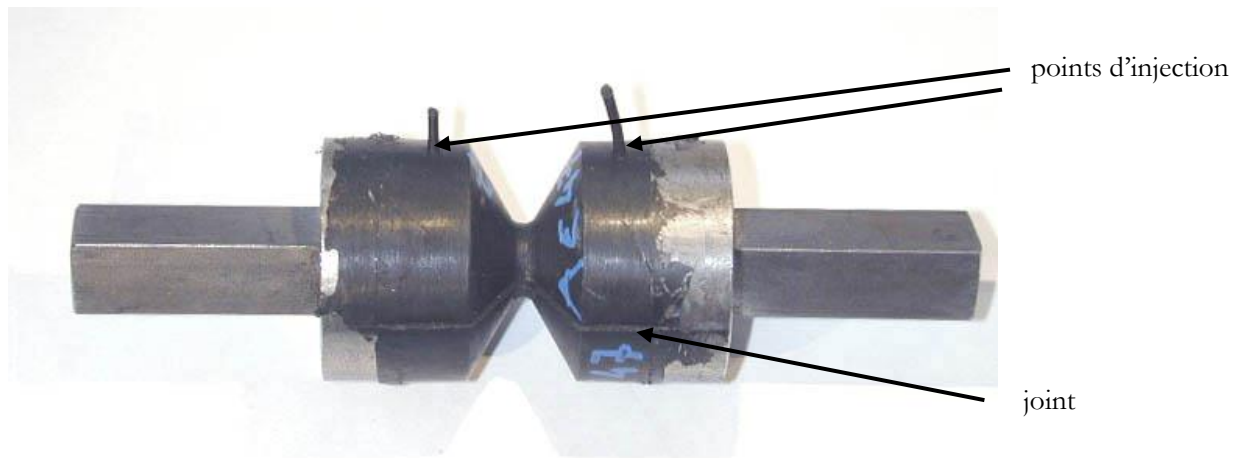
**L'éprouvette 'AE'**, Axisymétrique Entaillée, est utilisée pour tester le matériau en torsion cyclique. Elle est utile pour étudier le comportement en fatigue pour les mêmes raisons que ci dessus. L'éprouvette est mise en forme par compression-transfert. Le moule des éprouvettes 'AE' a par contre été spécialement conçu pour l'étude – Fig. 2.11 -. Aucune inscription n'a été gravée sur le moule. Les joints sont donc les seuls défauts de surface de l'éprouvette. De plus, les points d'injection sont situés hors de la zone utile – Fig. 2.12 -.



*Figure 2.10 – Machine de fatigue en torsion*



*Figure 2.11 – Géométrie de l'éprouvette AE*



**Figure 2.12** – Défauts de surface de l'éprouvette AE : joint

## Mesures

L'acquisition des données (temps, déplacement, force, couple), parfois le pilotage de la machine, et le dépouillement des résultats sont réalisés sur des ordinateurs.

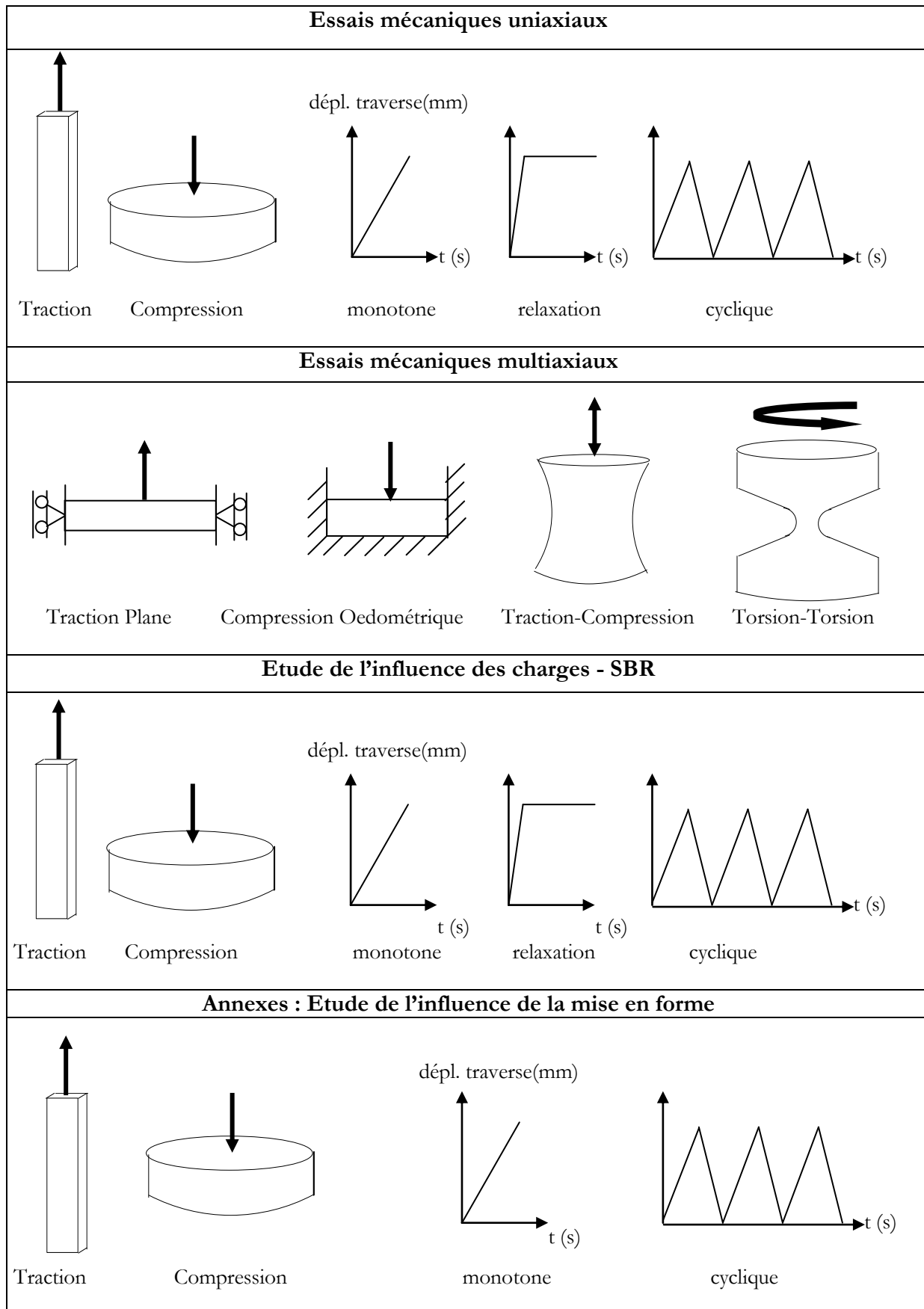
Les calculs d'erreur inhérents aux méthodes de mesure sont présentés en annexe 2A.

Les essais menés au CTC sont effectués sous atmosphère contrôlée : 20°C et 65 % d'humidité (norme). Les essais menés au Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris et à l'Ecole des Mines d'Alès sont menés en environnement 'ambiant'.

Les résultats sont présentés en traçant la contrainte conventionnelle  $K_1 = F/S_0$ , numériquement associée à la contrainte de Piola-Kirchoff n°1 (configuration dite « mixte » puisque la force  $F$  est mesurée au cours de l'essai - configuration actuelle - et qu'elle est divisée par la section initiale de l'éprouvette  $S_0$  - configuration initiale -), en fonction de l'élongation  $\lambda_1 = L/L_0$  (configuration dite 'mixte également puisque  $L$  est la longueur de l'éprouvette mesurée au cours de l'essai - configuration actuelle - et divisée par la longueur initiale de l'éprouvette  $L_0$  - configuration initiale -) ou du temps. L'indice 1 indique la direction de la contrainte et de l'élongation principales.

Le schéma de la Fig. 2.13 résume les étapes présentées dans ce chapitre, en indiquant les essais auxquels elles font appel.





**Figure 2.13** – Schéma de l'ensemble des essais effectués et décrits dans ce chapitre

## 2.2 - Résultats expérimentaux– Cas du SBR

Cette partie résume les essais effectués pour caractériser le comportement mécanique du SBR A. Elle est divisée en deux parties. La première décrit les essais de traction et de compression uniaxiaux. Ces essais sont utilisés pour identifier la loi de comportement. La seconde partie décrit les essais multiaxiaux. Ces essais permettent de valider la loi de comportement.

Notons que les résultats sont obtenus sur des éprouvettes découpées ou poinçonnées parallèlement à la direction de calandrage.

L'étude de l'influence de la mise en forme sur le comportement du SBR est présentée dans l'annexe 2B. Elle compare les comportements en traction d'éprouvettes issues de plaques, de 'plots', et d' 'AE'. L'étude porte également sur l'influence de la direction de prélèvement de l'éprouvette.

### 2.2.1 - Essais mécaniques uniaxiaux

Le tableau de la figure 2C.1 de l'annexe 2C retrace l'ensemble des spécifications des essais présentés dans cette partie: éprouvette utilisée, type d'essai, conditions d'essai.

Notons à nouveau que les graphes font intervenir la contrainte nominale  $K_1 = F/S_0$  (nous verrons que cette contrainte est dite de Piola Kirchoff n°1) et l'élongation  $\lambda_1 = L/L_0$ . L'indice 1 représente la direction de sollicitation. Les directions transverses sont notées 2 et 3.

#### *Traction uniaxiale monotone*

Les éprouvettes haltères sont poinçonnées dans les plaques, parallèlement à la direction de calandrage. Elles sont fixées sur le dynamomètre à l'aide de mors pneumatiques et étirées jusqu'à rupture. Trois vitesses de déplacement de traverse sont imposées : 5, 50 et 500 mm/min. Ceci correspond à des vitesses de déformation de  $10^{-3}$ ,  $10^{-2}$  et  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$  respectivement – Fig. 2.14 -. A la vitesse de  $10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , les modules tangents à l'origine, tangents et sécants à  $\lambda_1=3$  sont respectivement égaux à 100, 2.3 et 2.7 MPa. Les modules tangent et sécant à  $\lambda_1=1.35$  sont respectivement égaux à 8 et 1.5 MPa. La contrainte et l'allongement à rupture sont égaux à 14 MPa et 5.5 environ.

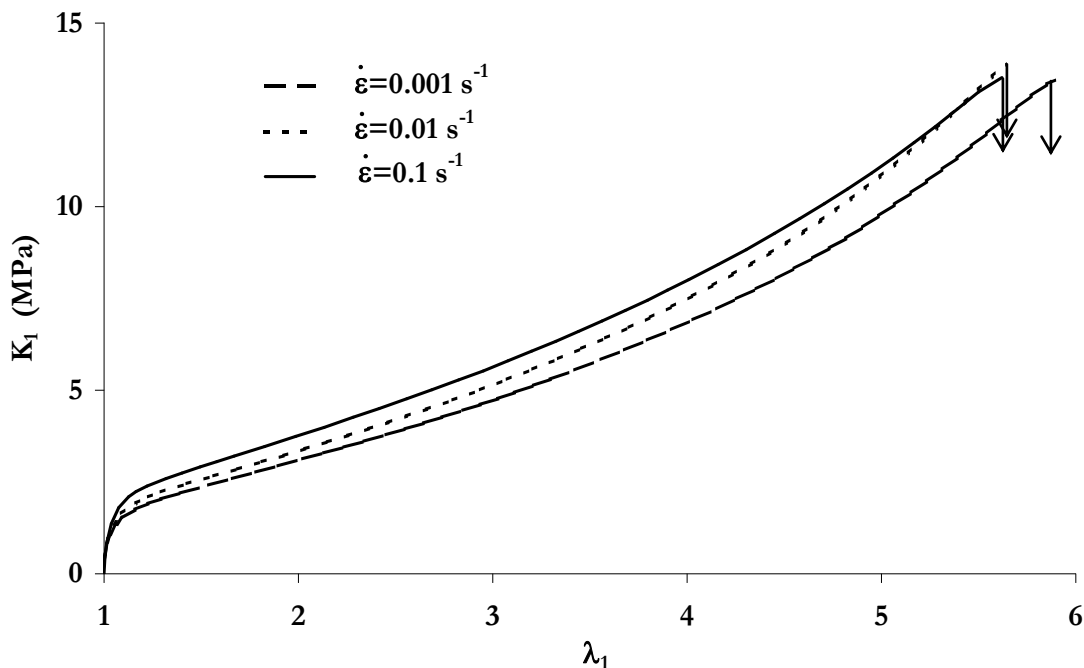
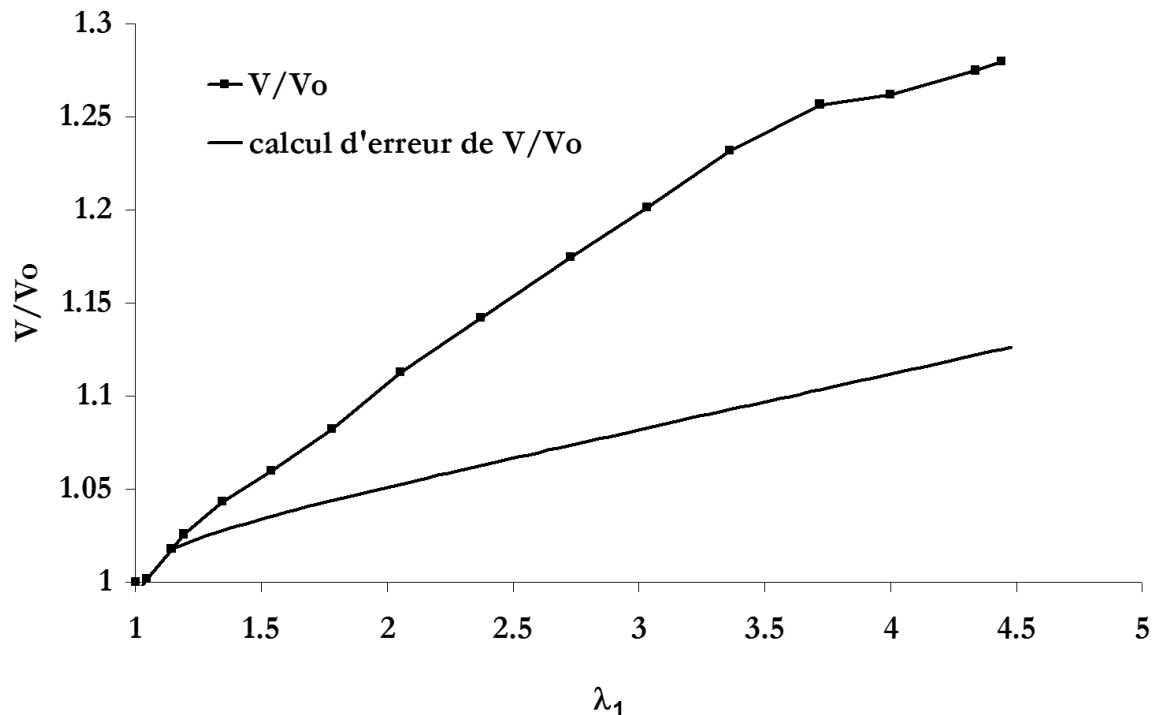


Figure 2.14 – SBR A – Essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture – Effet de la vitesse de déformation

Le comportement est **élastique non linéaire**. Ceci est typique des élastomères. On note la valeur importante du module tangent à l'origine, environ 10 fois supérieure aux valeurs rencontrées habituellement pour les caoutchoucs. Ceci correspond à un renforcement du matériau par les charges. Cet aspect sera discuté dans le paragraphe 2.4.

D'autre part, le matériau est sensible à l'effet de la vitesse de déformation.

Des essais de mesure de champ de déformation ont été menés à l'Ecole de Mines d'Alès. Notons que les courbes  $(K_1, \lambda_1)$  sont superposées à celles obtenues au Centre des Matériaux. L'intérêt de ces essais, dans notre cas, est la mesure de l'élongation transversale appelée ici  $\lambda_2$  (2<sup>ème</sup> direction principale). La connaissance des élongations longitudinales et transversales permet, en faisant l'hypothèse que l'élongation hors-plan  $\lambda_3$  est égale à l'élongation transversale  $\lambda_2$  (hypothèse d'isotropie transverse), de calculer la variation de volume  $V/V_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2$ . Cette valeur correspond à la racine du troisième invariant du tenseur des dilatations  $\sqrt[3]{I_3}$ . La Fig. 2.15 présente l'évolution de la variation de volume en fonction de l'élongation longitudinale. Les erreurs de mesure ont également été calculées à partir des paramètres de l'essai (nombre d'images, incrément de déformation, pas de maillage...). On constate qu'à une élongation longitudinale de 4.5, la variation de volume est de +25%. L'hypothèse de déformation isovolume généralement utilisée pour décrire le comportement des élastomères est donc mise en cause ici. Des observations de microscopie électronique à balayage, décrites dans le paragraphe 2.4 montrent que cette 'dilatation' volumique est due à la formation de cavités autour des charges de silice.



**Figure 2.15** – SBRA – Essai de traction uniaxiale – Variation volumique

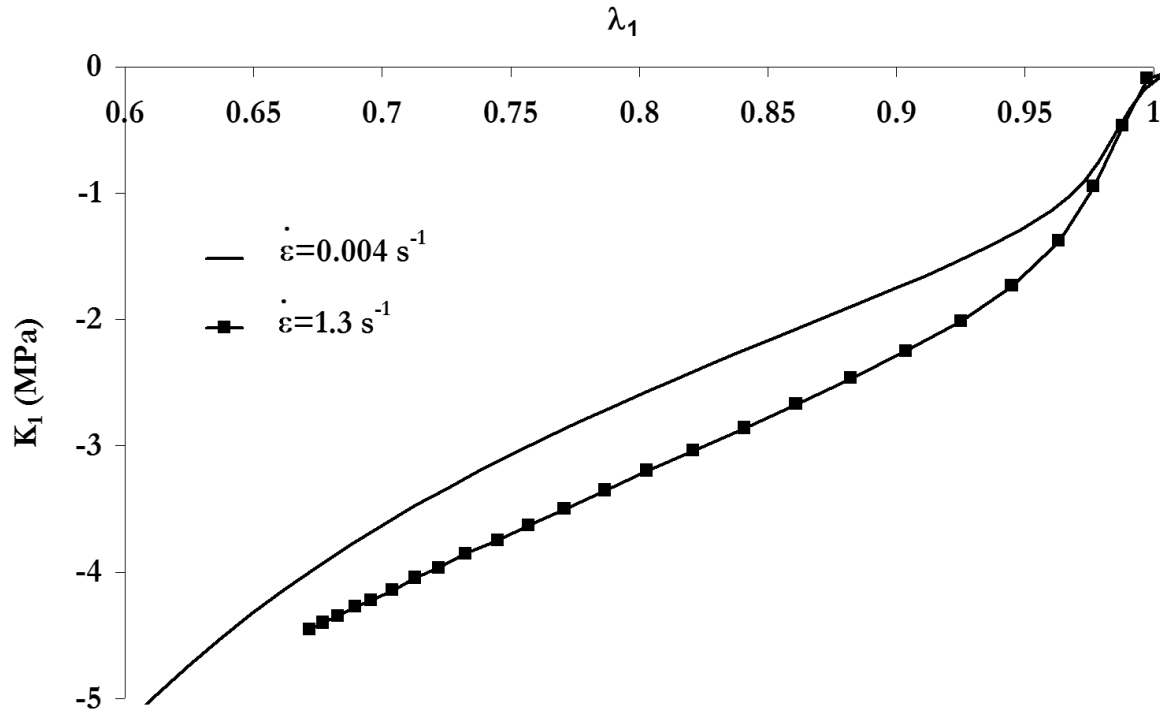
### Compression uniaxiale monotone

L'éprouvette 'pion' se présente sous la forme d'un cylindre. Il est comprimé entre deux plateaux en acier poli, sur lesquels on dépose une goutte d'huile de vaseline pure afin de diminuer le coefficient de frottement et d'éviter ainsi l'effet « tonneau ».

La Fig. 2.16 illustre les résultats  $(\lambda_1, K_1)$  obtenus aux vitesses 0.004 et 1.3 s<sup>-1</sup>. A la vitesse la plus faible, le module tangent à l'origine est environ de 35 MPa. Cette raideur initiale du SBRA testée en compression est donc 3 fois moins importante que celle des plaques testée en traction et mesurée ci-dessus. Outre la différence de vitesses de sollicitation, ceci provient également de la différence de mise en forme. Les pions sont moulés alors que les plaques sont calandrées. Ceci est discuté dans l'annexe 2B.

Le profil des pions déformés est filmé et agrandi. L'effet structure de déformation en "tonneau" nous semble négligeable jusqu'à des élongations de 0.7. La rigidification se produisant autour de 0.65 est certainement due partiellement à un effet de structure ou effet « tonneau ». Les essais sont donc considérés valides en dessous de cette élongation.

L'influence de la vitesse de sollicitation est de nouveau mise en évidence.



**Figure 2.16** – SBR A – Essai de compression uniaxiale - Influence de la vitesse de sollicitation

### Relaxation en Traction Uniaxiale

Les essais de relaxation en traction uniaxiale sont menés dans le but de caractériser les propriétés viscoélastiques du SBR.

L'éprouvette est fixée grâce à des mors pneumatiques montés sur la machine électromécanique de fatigue. Elle a l'avantage de permettre un asservissement rapide. La consigne de déplacement est atteinte en 0.2 s environ. Un fois la consigne atteinte, la contrainte se relaxe dans l'éprouvette. Comme indiqué en début de chapitre, cette machine n'est pas équipée d'extensomètre. La mesure 'locale' de la déformation au centre de l'éprouvette est donc faite grâce à un cathétomètre par mesure de la distance entre deux traits dessinés sur l'éprouvette, avant l'essai puis au cours de l'essai de relaxation. Le calcul d'erreur, détaillé en annexe 2A, montre que l'élongation est connue à 10% près. D'autre part, l'évolution de la valeur de l'élongation, due par exemple au glissement de l'éprouvette dans les mors a été mesurée au cours de plusieurs essais et est incluse dans cette estimation de l'erreur.

La Fig. 2.17 montre l'évolution de la contrainte nominale  $K_1$  en fonction du temps pour chaque essai. Les élongations fixées sont 1.3, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.1, 2.3. La contrainte chute de 20% environ dès la première seconde, de plus de 50% dans les  $10^3$  secondes suivantes, puis continue à chuter lentement jusqu'à la fin de l'essai.

Si l'on construit un tableau de valeurs retenant les durées de montée en charge, les élongations atteintes et les valeurs des contraintes maximales  $K_{1\max}$  obtenues lors de la montée en charge, on peut reconstituer une courbe de traction uniaxiale. La vitesse de déformation serait de l'ordre de  $6 \text{ s}^{-1}$  (élongation de 2.3 atteinte en 0.2s). La Fig. 2.18 présente une telle courbe reconstituée et appelée hyper\_a (comme hyperélastique : on peut en effet faire l'hypothèse qu'à ces vitesses de déformation, la contrainte n'a pas le

temps de se relaxer ou en d'autres termes que la viscoélasticité du matériau intervient peu). On lui superpose une courbe obtenue à une vitesse de  $0.01 \text{ s}^{-1}$ . L'effet de vitesse est nettement illustré.

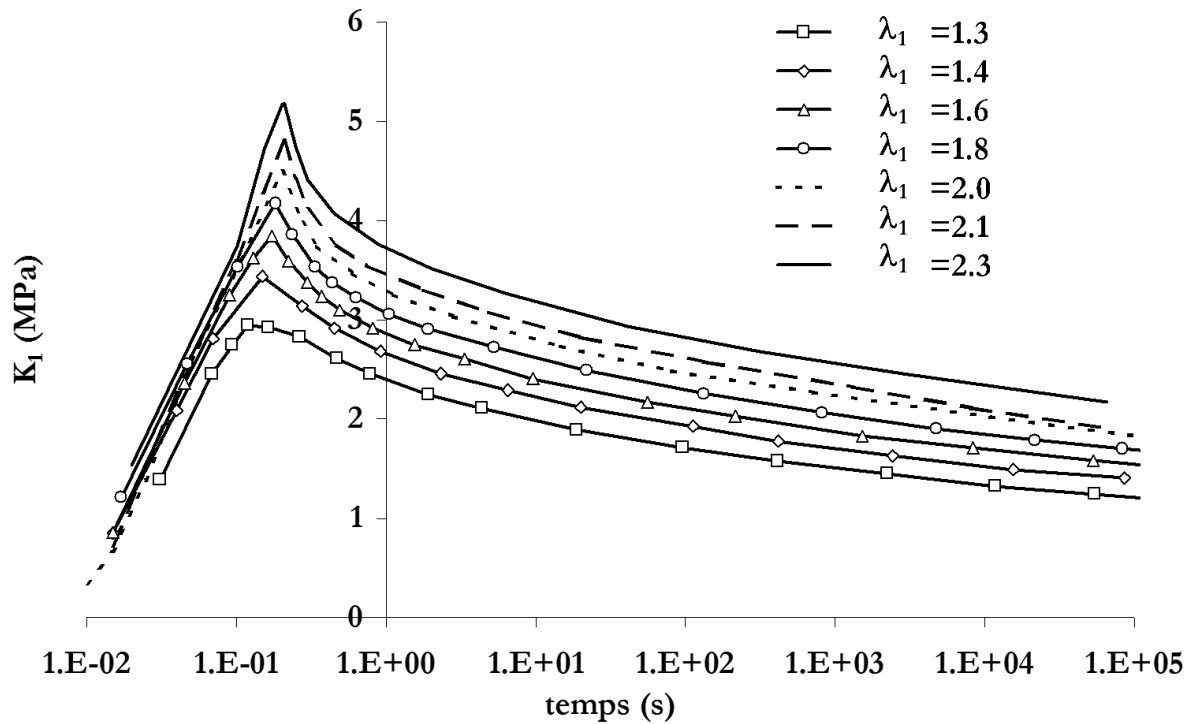


Figure 2.17 – SBR4 – Essais de relaxation en traction uniaxiale

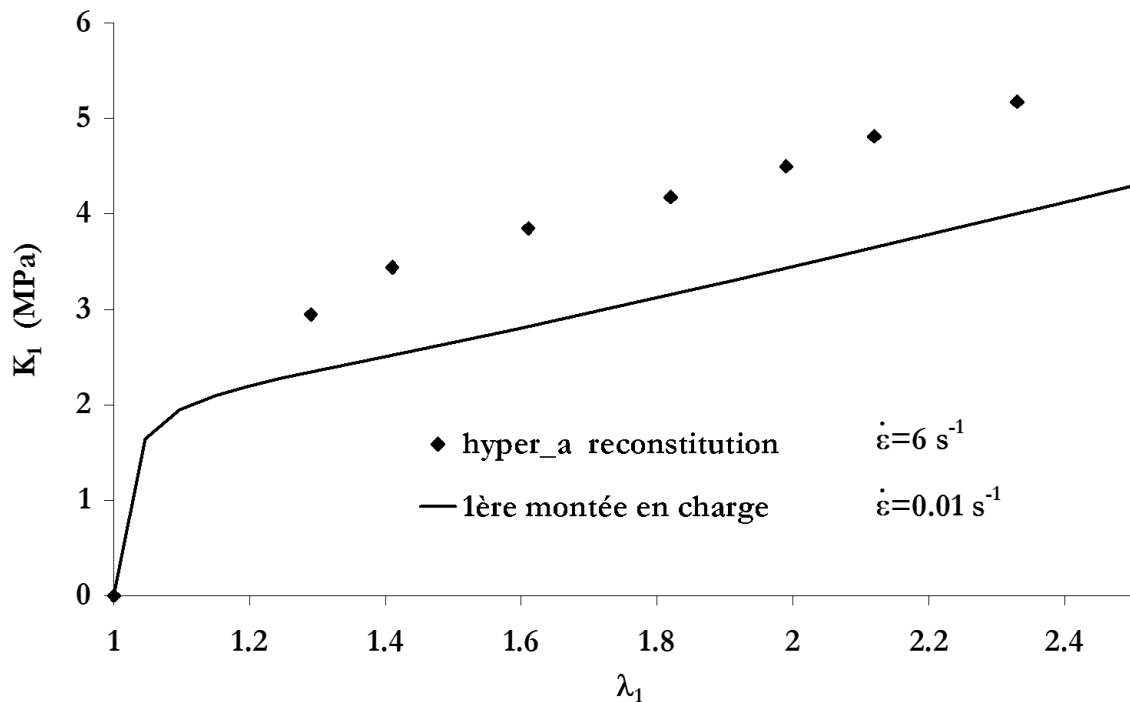
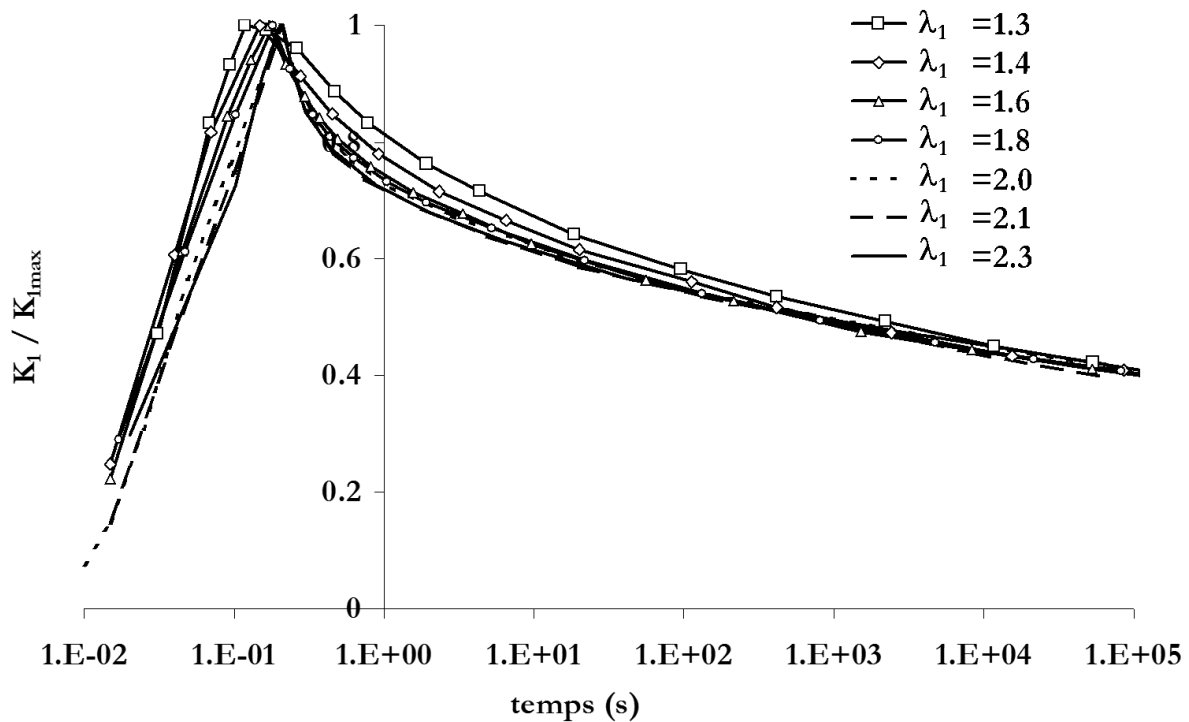


Figure 2.18 – SBR4 – Reconstitution d'une courbe de traction uniaxiale – Illustration de l'effet de vitesse de déformation

La courbe suivante, Fig. 2.19, présente les mêmes essais mais utilise la contrainte normée  $K_1/K_{1\max}$  en ordonnée.  $K_{1\max}$  est la contrainte maximale obtenue à la fin de la montée en charge. On constate que les courbes sont quasiment superposées.

On observe cependant que la relaxation de la contrainte est plus marquée aux élongations supérieures à 1.4. La bibliographie couplée aux essais complémentaires menés sur la gomme de SBR A (décrits dans le § 2.4) tend à démontrer que la relaxation observée dans ces essais est due non seulement à la relaxation de la gomme mais aussi à la relaxation (ou à la rupture) d'un réseau secondaire de charges de silice floculées à une échelle fine [Mullins, 1947], [Wolff, 1996]. D'autre part, lors de ces montées en charge, les élongations faibles sont atteintes dans le même temps que les élongations importantes. Les vitesses de sollicitation du matériau faiblement étiré sont donc inférieures à celle du matériau fortement étiré ( $1.5 \text{ s}^{-1}$  pour  $\lambda_1=1.4$  et  $6.5 \text{ s}^{-1}$  pour  $\lambda_1=2.3$ ). Ainsi, la contrainte de normalisation est certainement sous estimée, et la relaxation également. Ces remarques peuvent expliquer la relaxation moins importante du matériau sous élongation plus faible.

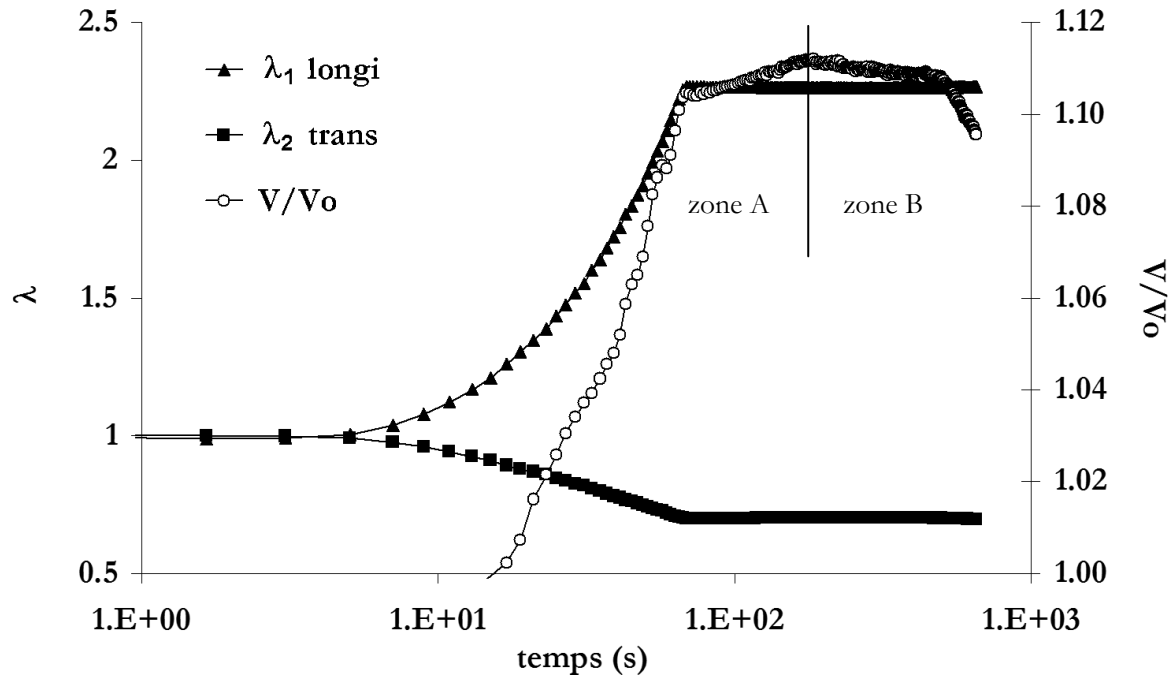
Malgré ces constatations, le faisceau de courbes montre que la relaxation des contraintes dépend peu de l'élongation imposée. On peut alors parler de **viscoélasticité linéaire**, mais dans un cadre d'élasticité non linéaire.



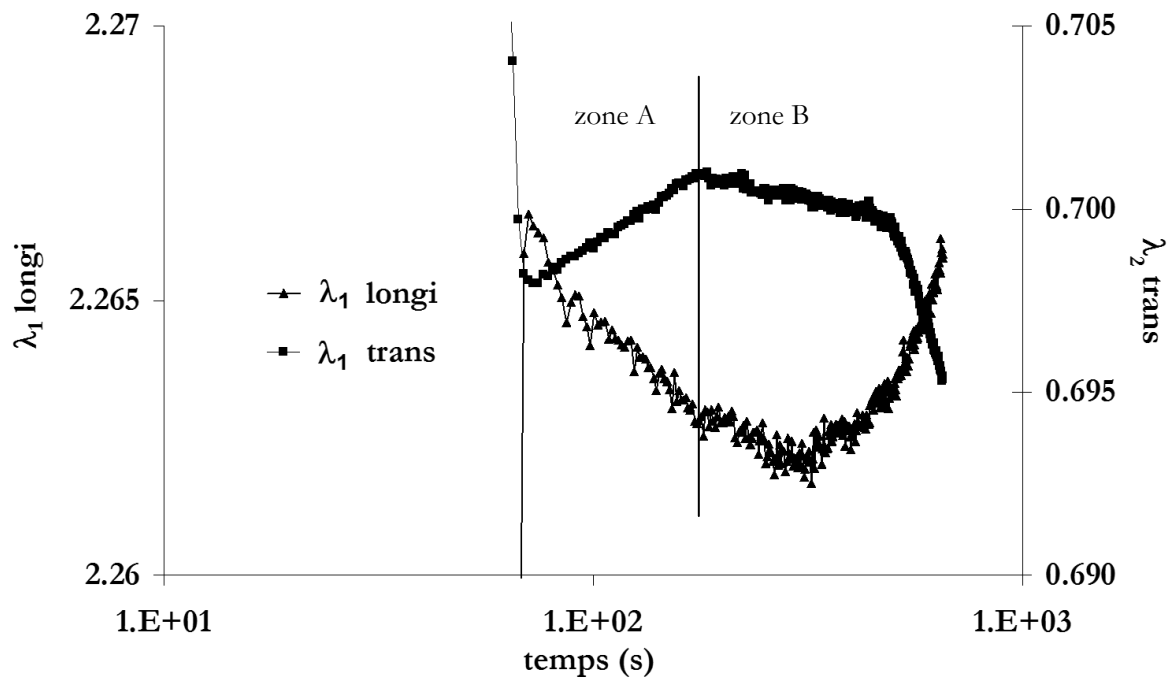
**Figure 2.19** – SBR A – Essais de relaxation en traction uniaxiale – Contrainte 'normée' - Influence de l'élongation sur la relaxation des contraintes

Des essais de relaxation ont également été menés à l'Ecole de Mines d'Alès. Les élongations longitudinales et transversales sont mesurées au cours de l'essai et permettent de calculer la variation de volume. Dans un premier temps, la variation de volume augmente (zone A) et dans un second temps, elle diminue (zone B) – Fig. 2.20 -. Lorsque l'on détaille les variations d'élongations – Fig. 2.21 -, on constate que la variation de l'élongation transversale suit la variation de volume. On suppose alors que le premier stade d'augmentation de volume est dû à une redistribution des contraintes au sein de l'éprouvette. En effet, la relaxation des contraintes dans la zone des mors engendre la diminution de l'élongation longitudinale dans la zone utile et l'augmentation de l'élongation transversale. Cette dernière augmente à la fois à cause de cette relaxation mais également à cause de la contrainte transversale due aux mors. Ces effets combinés conduisent à l'augmentation de la déformation volumique. Cette tendance a été vérifiée par un calcul de structure, effectué avec une loi

hyperélastique-viscoléastique. On suppose ensuite que la relaxation du matériau fortement sollicité autour des cavités conduit à la diminution du volume de ces cavités. Le volume diminue donc.



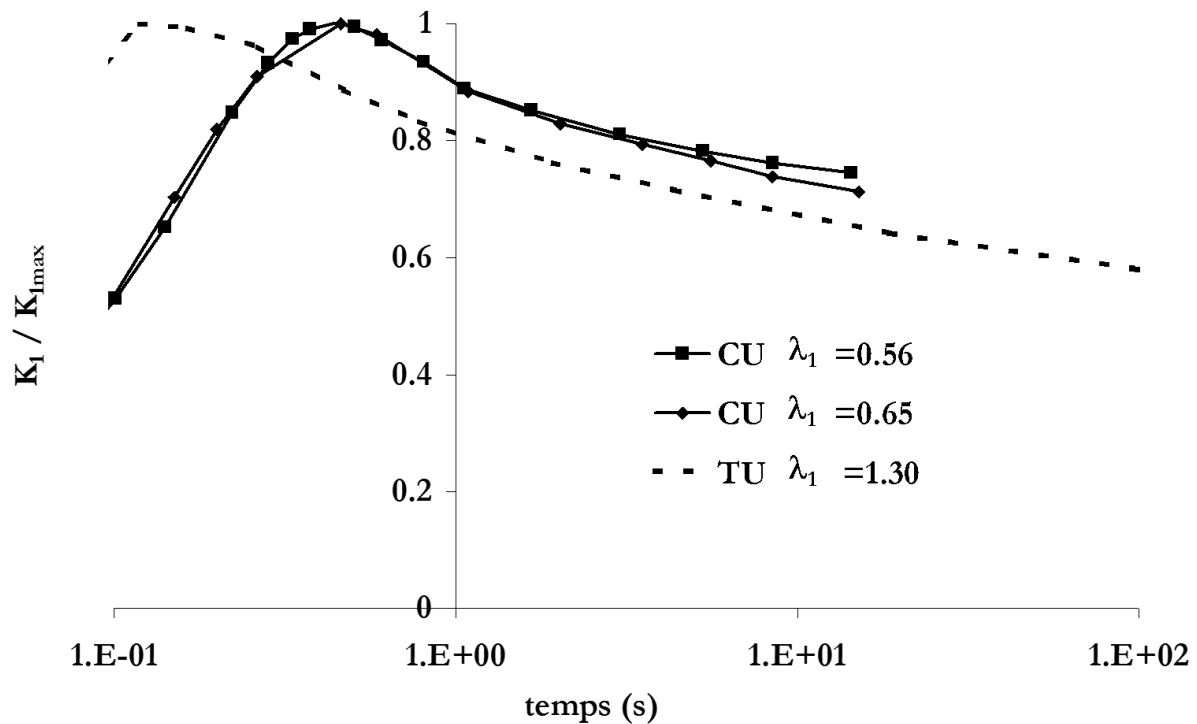
**Figure 2.20** – SBR4 – Essai de relaxation en traction uniaxiale – Evolution de la variation de volume



**Figure 2.21** – SBR4 – Essai de relaxation en traction uniaxiale – Evolution des elongations longitudinale et transversale dans la zone utile

## Relaxation en Compression Uniaxiale

Les éprouvettes sont constituées de pions découpés dans des plaques calandrées et empilés ( rapport  $\varnothing/h=2$ ). La consigne est atteinte dans ce cas en 0.5 s environ. Les essais ont été menés à deux elongations 0.65 et 0.56. L'ordonnée du graphe de la Fig. 2.22 présente les contraintes normalisées par les contraintes maximales  $K_{1max}$  obtenues lors des montée en charge. La courbe de relaxation en traction uniaxiale à une elongation de 1.3 est ajoutée au graphe. On constate que la relaxation en compression semble indépendante de l'elongation atteinte et qu'elle est inférieure à la relaxation en TU.



**Figure 2.22** – SBR A – Essais de relaxation en compression uniaxiale – Comparaison avec la traction uniaxiale

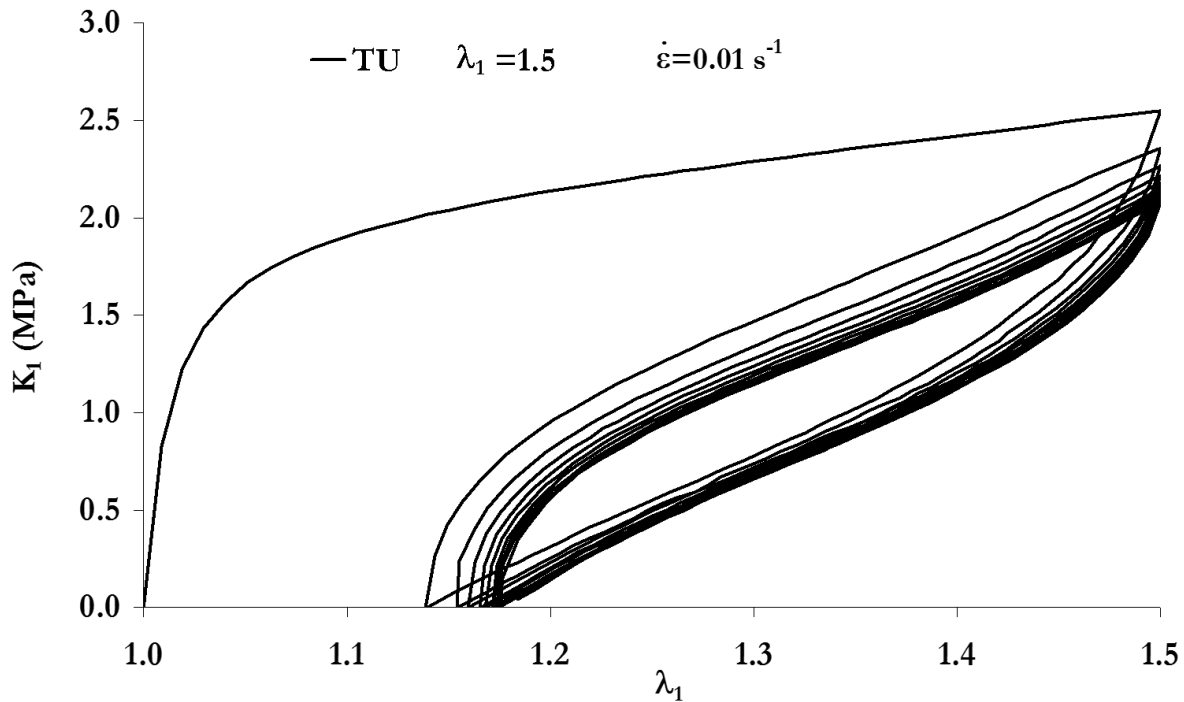
Les quelques indications données dans le paragraphe précédent peuvent expliquer qualitativement cette différence. D'une part, les elongations de compression uniaxiale étant atteintes avec des vitesses plus faibles, on peut supposer que la relaxation des contraintes est sous estimée. D'autre part, la rupture du réseau de charges secondaires, floculées, est moins importante en compression qu'en traction.

## Traction Uniaxiale cyclique

L'objectif est de simuler le comportement d'une éprouvette sollicitée en fatigue, autrement dit sous sollicitation cyclique. Les éprouvettes de géométrie simple dite 'lanière' sont donc sollicitées en traction uniaxiale cyclique. Les conditions limites du chargement sont:

- un allongement maximal : condition choisie car l'essai de fatigue-flexion sur semelles que nous voulons modéliser (l'essai Bennewart), est un essai contrôlé en déplacement.
- une force nulle : permet d'éviter le flambement de l'éprouvette.





**Figure 2.23** – SBR A – Essai de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1max}=1.5$

La Fig. 2.23 illustre les résultats obtenus sur une éprouvette sollicitée entre  $K_1=0$  MPa et  $\lambda_1=1.5$  à une vitesse de déplacement de traverse de 50 mm/min. Cette vitesse correspond approximativement à une vitesse de déformation de  $0.01 \text{ s}^{-1}$ . On constate que le comportement est fortement dissipatif. L'énergie dissipée et/ou stockée lors du premier cycle (calculée par le rapport des aires sous les courbes) est particulièrement importante :  $710 \text{ J/mm}^3$ . Son pourcentage par rapport à l'énergie fournie est de 65%. Les aires des cycles suivants sont inférieures à l'aire du premier cycle et sont similaires entre elles. L'énergie dissipée lors du cinquième cycle est de l'ordre de  $150 \text{ J/mm}^3$ . Ceci correspond à 35% de l'énergie fournie lors de la 5<sup>ème</sup> montée en charge.

L'hystérèse du premier cycle est due à plusieurs phénomènes. Le premier, classique, est couramment dénommé **effet Mullins**. Il correspond à un adoucissement du matériau dû à la désorption ou au glissement des chaînes qui ont atteint leur extension limite sur les charges ou à leur rupture [Harwood, 1965], [Dannenberg, 1975], [Clément, 1999]. Le deuxième phénomène dissipatif est la **viscoélasticité** du matériau. Cette dernière propriété peut être attribuée à l'élasticité retardée de la matrice de caoutchouc. Le retard provient du désenchevêtrement des chaînes [Piques, 1997], de leur reptation et les temps de relaxation mis en jeu sont caractéristiques de ces mouvements [Agassant, 1986]. Enfin, la dissipation peut provenir du frottement entre les charges et les chaînes, de l'adsorption/désorption des chaînes sur les charges, du glissement des contacts entre les charges, mais également d'un effet « thixotrope » dû à la rupture et à la re-formation de la structure renforçante (le réseau secondaire de charges de silice) [Mullins, 1969]. La dépendance de ces effets par rapport à la vitesse de déformation sont peu connus. Toutefois, certains auteurs les assimilent à de la **plasticité** (ou viscoplasticité) [Miehe et al., 2000], [Kaliske et al., 1999], [Kilian et al., 1994].

Ces aspects d'adoucissement et d'influence des charges de silice sur les propriétés viscoélastiques sont discutés plus en détail dans le paragraphe 2.4.

La dissipation d'énergie qui se produit lors des cycles suivants est essentiellement de nature viscoélastique (et viscoplastique ?). On considère que le cinquième cycle est stabilisé.

L'élongation rémanente est de 1.14 dès le premier cycle de l'essai puis augmente progressivement lors des cycles suivants. Cette déformation rémanente peut être attribuée à l'effet viscoélastique. Cependant, les éprouvettes testées présentent, après 1.5 années de recouvrance à température ambiante, une

déformation rémanente de 1.1 pour cet essai. La réorganisation interne du matériau sous l'effet d'un chargement induit une déformation permanente au sein du matériau (glissement des charges les unes par rapport aux autres, formation d'un réseau secondaire de silice différent de celui du matériau initial [Wolff, 1996]). Cette déformation rémanente peut être viscoélastique (elle ferait intervenir des temps caractéristiques très longs). Cependant, elle s'apparente plutôt à un phénomène de plasticité [Kilian et al., 1994], [Ambacher et al., 1991].

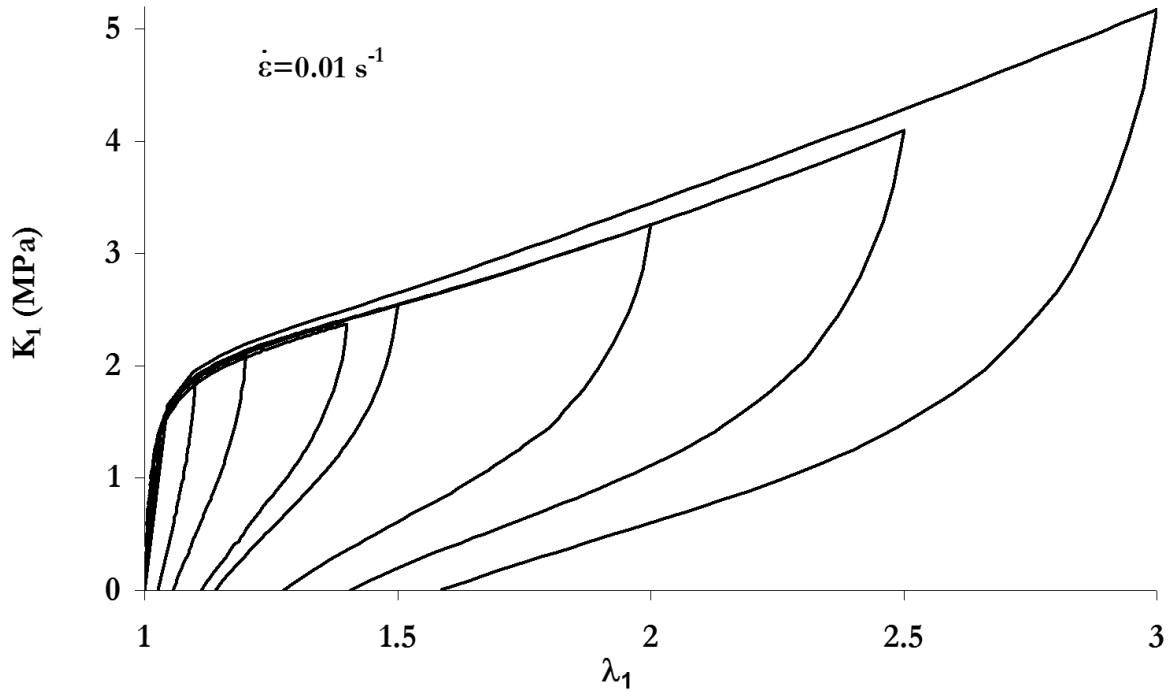


Figure 2.24 – SBR4 – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1max} = 1.1$  à 3 – 1<sup>ers</sup> cycles des essais

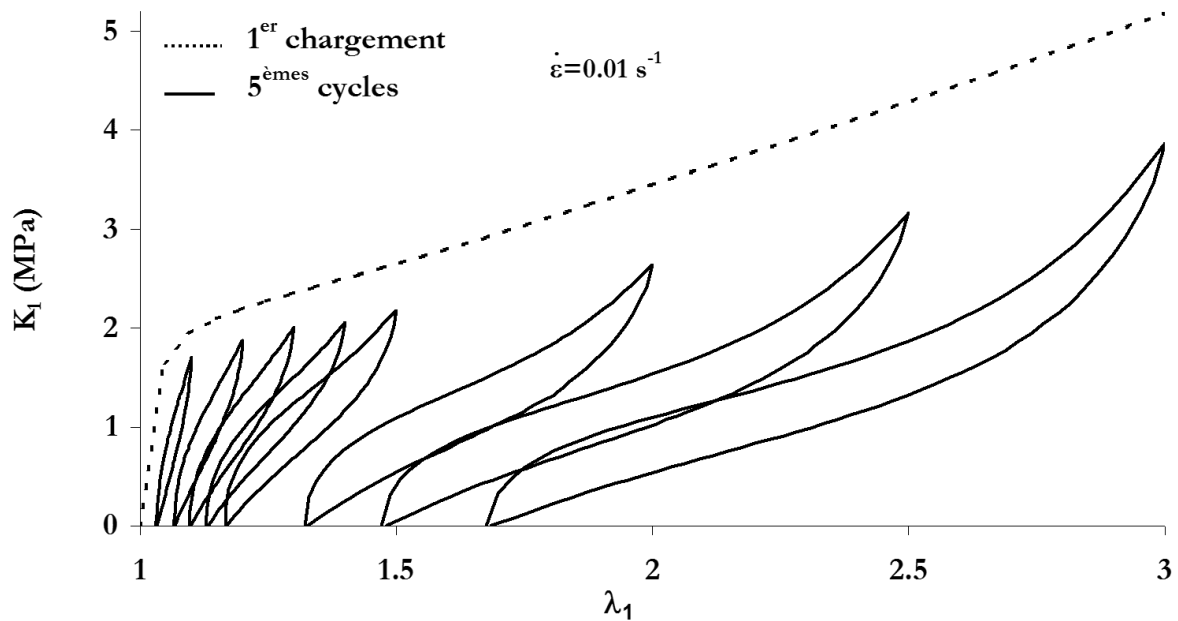


Figure 2.25 – SBR4 – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1max} = 1.1$  à 3 – 5<sup>èmes</sup> cycles des essais

$\lambda_{1 \text{ max}}$	1.2	1.5	2.5
E (J/mm <sup>3</sup> ) - 1 <sup>er</sup> cycle	227	712	2950
% E dissipée - 1 <sup>er</sup> cycle	65	67	69
E (J/mm <sup>3</sup> ) - 5 <sup>ème</sup> cycle	56	157	492
% E dissipée - 5 <sup>ème</sup> cycle	36	35	30
$\lambda_{1 \text{ rém}}^{5^{\text{ème}} \text{ cycle}}$	1.07	1.17	1.48
$(\lambda_{1 \text{ rém}} - 1) / (\lambda_{1 \text{ max}} - 1)$	0.35	0.34	0.32

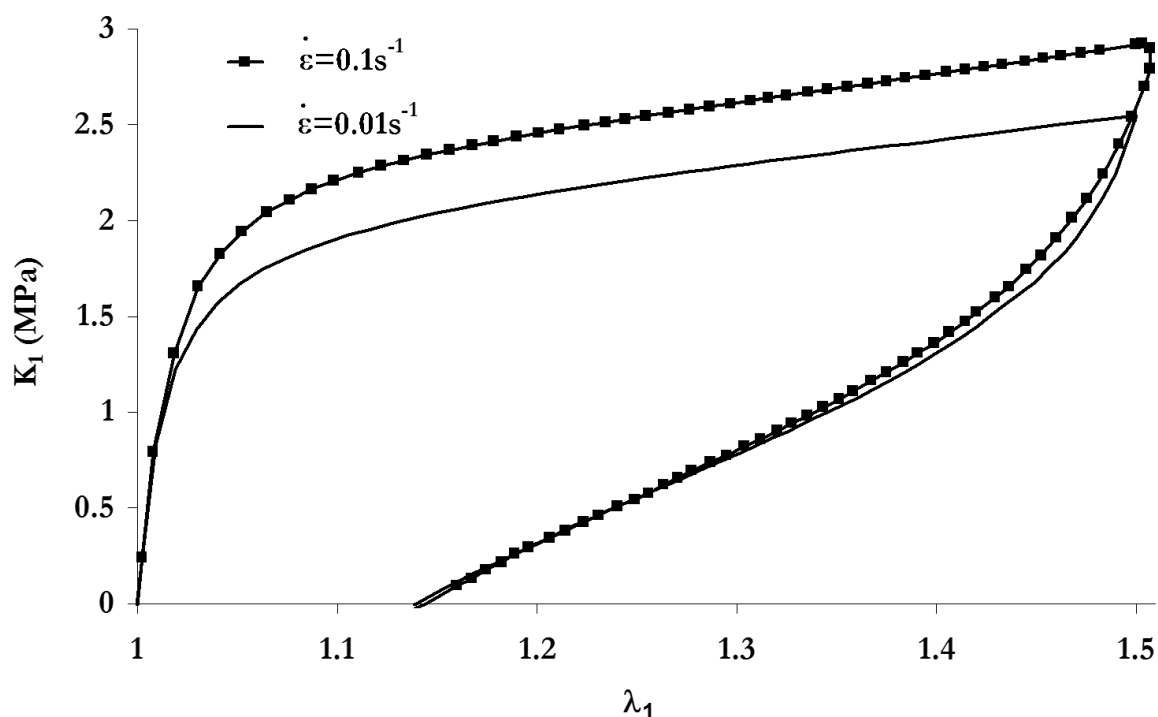
**Figure 2.26** – SBR A – Récapitulatif des résultats de traction uniaxiale cyclique

La Fig. 2.24 présente les courbes des premiers cycles obtenues sur des éprouvettes testées entre  $K_1=0$  MPa et  $\lambda_1=1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 2.0, 2.5$  et  $3.0$  à la même vitesse de déplacement de traverse que précédemment. La Fig. 2.25 présente les courbes des cinquièmes cycles de ces mêmes essais, ainsi qu'une courbe de 1<sup>er</sup> chargement. On constate que l'énergie dissipée et la déformation progressive augmentent avec l'élongation maximale imposée.

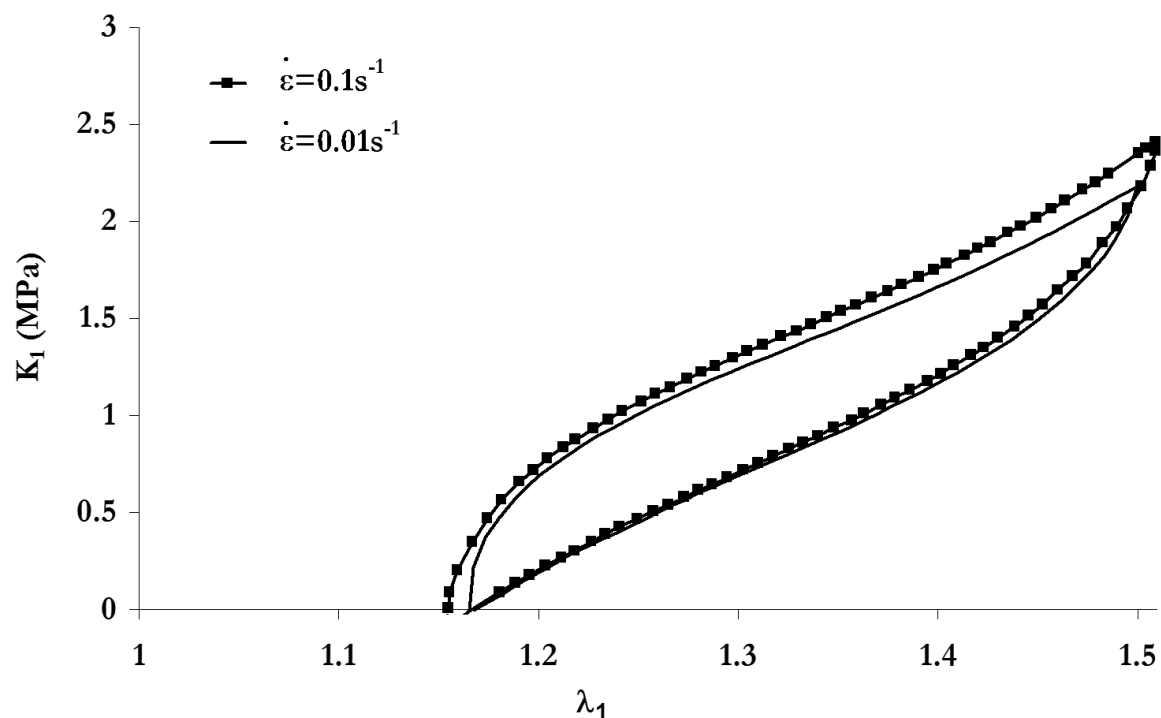
Le tableau suivant, Fig. 2.26, présente l'énergie dissipée lors du 1<sup>er</sup> cycle et lors du 5<sup>ème</sup> cycle, son pourcentage par rapport à la montée en charge du cycle correspondant, la valeur de l'élongation rémanente et le rapport de la déformation rémanente par la déformation imposée  $(\lambda_{1 \text{ rém}} - 1 / \lambda_{1 \text{ max}} - 1)$ . Ces valeurs ont été calculées pour les trois essais  $\lambda_{1 \text{ max}}=1.2, \lambda_{1 \text{ max}}=1.5$  et  $\lambda_{1 \text{ max}}=2.5$ . Les résultats montrent que lorsque l'élongation maximale augmente, le pourcentage d'énergie dissipée lors du 1<sup>er</sup> cycle et le rapport déformation rémanente / déformation imposée sont quasi constants. Dans le même temps, le rapport d'énergie dissipée lors du 5<sup>ème</sup> cycle diminue. De plus, il existe ainsi un rapport 2 entre l'énergie dissipée lors du 1<sup>er</sup> cycle et celle dissipée lors du 5<sup>ème</sup> cycle.

La part importante d'énergie dissipée lors du premier cycle peut être attribuée à l'effet Mullins (rupture, désorption et glissement des chaînes courtes entre les charges), mais aussi à des effets 'plastiques' (glissement et rupture des contacts entre les charges, modification du réseau secondaire de charges floculées). La constance du rapport  $(\lambda_{1 \text{ rém}} - 1 / \lambda_{1 \text{ max}} - 1)$  avec l'élongation semble indiquer que ces modifications du réseau de charges conduisant à une déformation rémanente augmentent avec la déformation.

Les Fig. 2.27 et 2.28 comparent les premiers et cinquièmes cycles de deux essais de traction uniaxiale cyclique effectués aux vitesses de déformation de  $0.1$  et  $0.01 \text{ s}^{-1}$ . On met à nouveau en évidence l'effet de vitesse sur la contrainte. Cependant, on ne note pas d'effet sur la déformation rémanente. Ces résultats confirment les conclusions du paragraphe précédent sur le rapport entre la déformation rémanente et la réorganisation interne du matériau sous chargement.

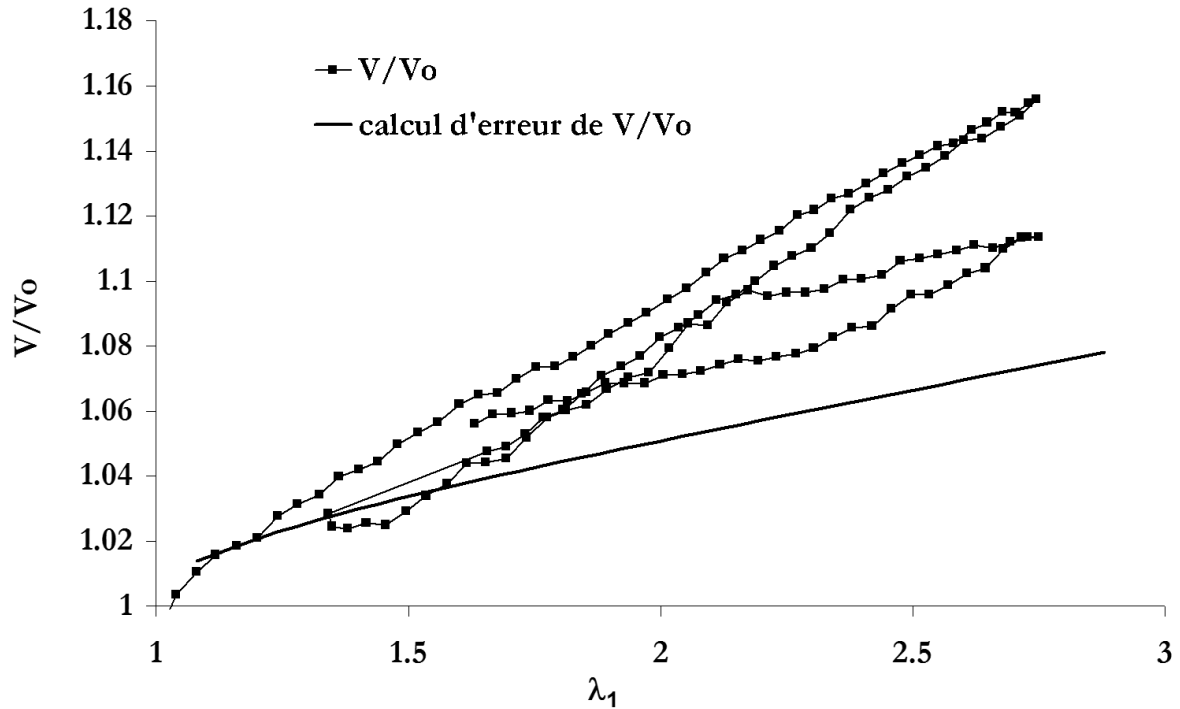


**Figure 2.27** – SBR4 – Essais de traction uniaxiale cyclique – 1<sup>ers</sup> cycles de chargement  $\lambda_{1\max}=1.5$  – Influence de la vitesse de sollicitation



**Figure 2.28** – SBR4 – Essais de traction uniaxiale cyclique – 5<sup>èmes</sup> cycles de chargement  $\lambda_{1\max}=1.5$  – Influence de la vitesse de sollicitation

Des mesures de variation de volume ont également été effectuées à l'Ecole des Mines d'Alès sur le SBR sollicité en traction uniaxiale cyclique, figure 2.29. On constate d'une part que la déformation volumique s'annule lors du retour à charge nulle et d'autre part que cette déformation diminue lors de la seconde montée en charge. Ceci peut être dû à l'adoucissement des contraintes.



**Figure 2.29** – SBR4 – Traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1,max}=2.8$  – Evolution de la variation de volume au cours de 2 cycles

Nous montrerons dans le paragraphe 2.4 que cette variation de volume est liée à des phénomènes de cavitation autour des charges de silice. Nous pouvons cependant noter, dès à présent, que la déformation volumique s'annulant lors du retour à charge nulle, les cavités se referment probablement.

## **Conclusion**

*Cette caractérisation du comportement du SBR de nuance A met en avant différents aspects :*

- *Elasticité non linéaire*

*Ce comportement dit hyperélastique est typique des élastomères (et inhérent à leur définition)*

- *Raideur très importante aux faibles élongations*

*Ce phénomène est également appelé 'effet Payne'. Il est lié à la présence des charges de silice.*

- *Influence de la vitesse de chargement ou viscoélasticité*

- *Dissipation d'énergie importante lors du premier cycle*

*Elle est due aux phénomènes habituellement regroupés sous le nom d'effet Mullins. Cet effet conduit à l'adoucissement du matériau. Il s'apparente à de l'endommagement [Simo, 1987]. S'ajoutent les phénomènes de glissement de charges les uns par rapport aux autres, modification de l'organisation du réseau de charges floculées. Ces effets peuvent être assimilés à de la plasticité [Miehe, 2000].*

- *Déformation permanente*

*Elle est probablement due à la réorganisation du réseau de charges. Elle peut donc être considérée plastique [Kilian et al., 1994].*

- *Déformation volumique*

*Les mesures de champ de déformation effectués en collaboration avec l'Ecole des Mines d'Alès mettent en évidence une déformation volumique (30% à  $\lambda_1=4.5$ ) du matériau sollicité en traction. Cette déformation s'annule lors du retour à charge nulle.*

*Notons que la déformation est isovolume lorsque le matériau est sollicitée en compression eudiométrique.*

---

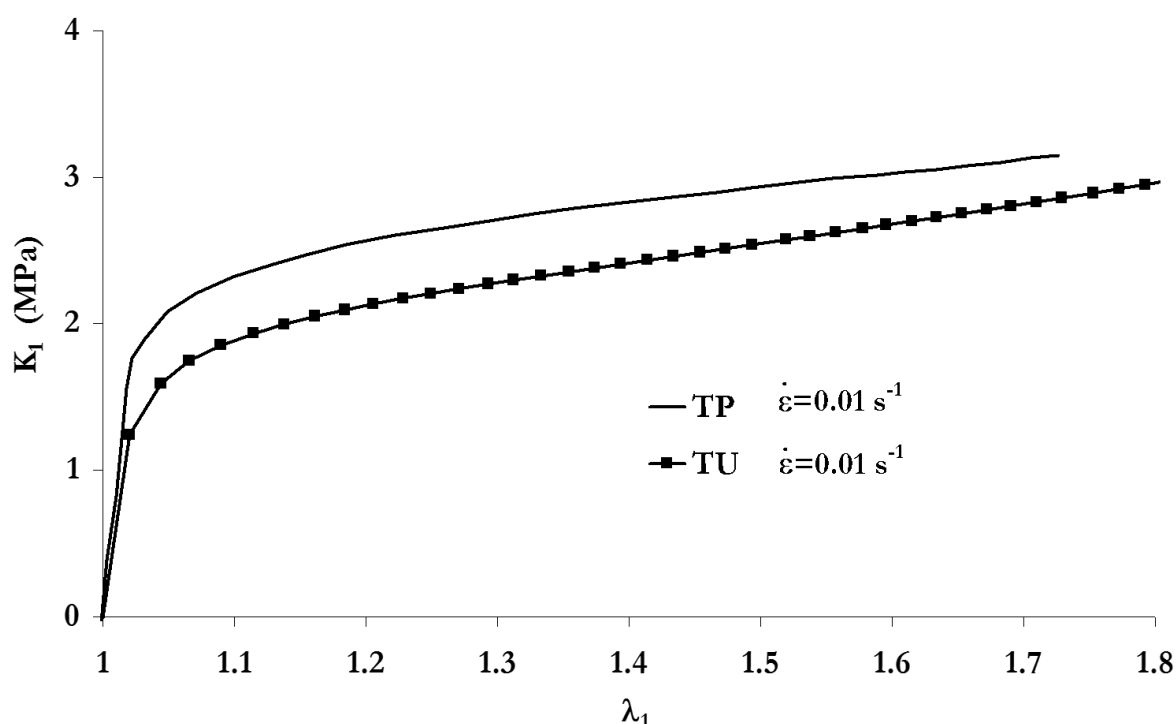
### 2.2.2 - Essais mécaniques multiaxiaux

Le tableau de la figure 2C.2 de l'annexe 2C retrace les spécifications des essais présentés dans cette partie et relatifs au SBR A : conditions d'essai, éprouvette, lot...

#### *Traction plane monotone*

Les éprouvettes sont découpées dans des plaques, parallèlement à la direction de calandrage. Les conditions limites de traction plane sont obtenues à la fois grâce à la géométrie de l'éprouvette (6 fois plus large que longue) et au blocage du déplacement par des glissières. Les éprouvettes sont fixées sur le dynamomètre à l'aide de mors pneumatiques et étirées jusqu'à une élongation de 1.8. Au delà de ces élongations, les conditions limites de traction plane ne sont plus vérifiées.

La Fig. 2.30 montre les résultats ( $\lambda_1$ ,  $K_1$ ) obtenus. La courbe de traction plane (TP) est comparée à la courbe de traction uniaxiale (TU). Le comportement de l'éprouvette sollicitée en traction plane est plus raide.



**Figure 2.30** - SBR A – Essai de traction plane – Comparaison avec la traction uniaxiale

#### *Compression œdométrique cyclique*

Les pions moulés sont testés dans la chambre de compression confinée.

Le comportement du SBR sous chargement œdométrique est linéaire, Fig. 2.31. Aux contraintes inférieures à 10 MPa, l'éprouvette 'se met en place' dans la chambre (évacuation de l'air, frottement, ...). Cette partie de la courbe n'est donc pas prise en compte. L'élongation est calculée de manière que l'extrapolation linéaire de la courbe aux contraintes supérieures à 10 MPa passe par l'origine des élongations 1.

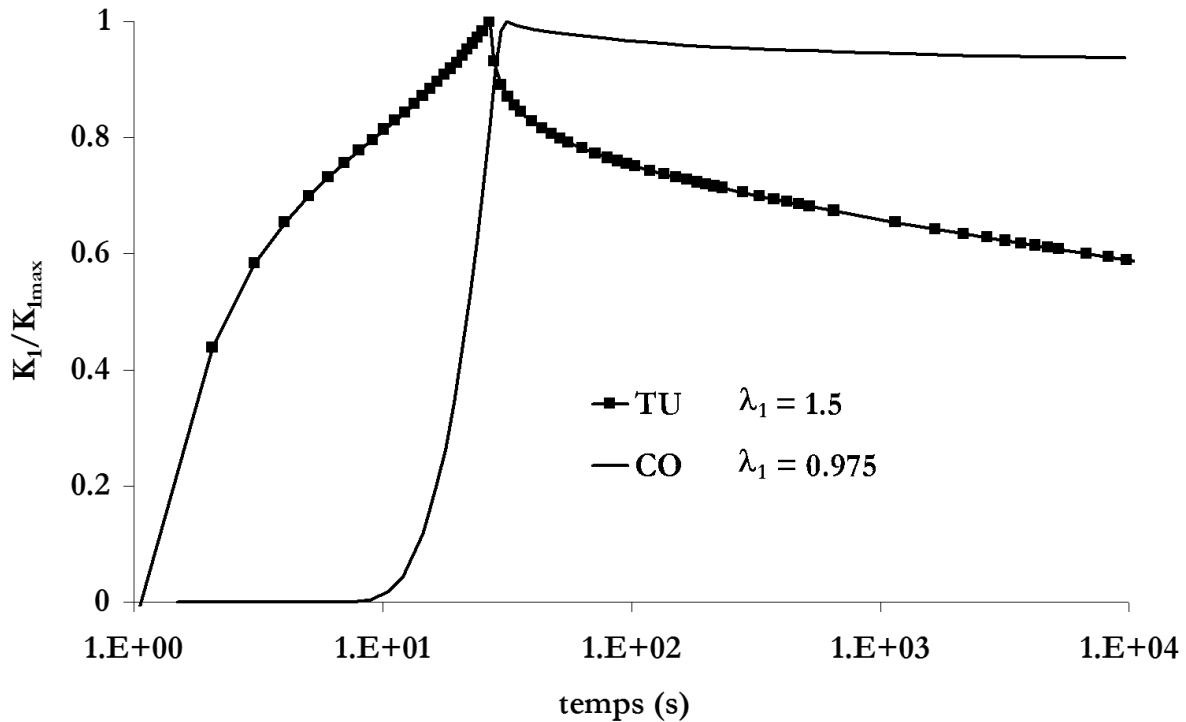
On constate que les élongations atteintes sont très faibles et les contraintes très importantes. On note d'autre part que l'hystérèse des cycles est faible.

Le coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau peut être déterminé à partir de la pente de la courbe  $K_1/\epsilon_1$  et des équations de mécanique des solides en élasticité linéaire.

Les remarques précédentes montrent que l'essai de compression œdométrique peut s'apparenter à un essai de compression hydrostatique. Ainsi, seule la réponse en contrainte hydrostatique du matériau est sollicitée dans cet essai. Nous décidons d'observer la relaxation de cette contrainte hydrostatique, en la comparant à la relaxation de la contrainte de traction uniaxiale (essai dans lequel les contraintes déviatorique et sphérique interviennent).



Les résultats sont présentés dans la Fig. 2.32. Les temps de montée en charge sont longs pour des raisons de sécurité. En effet, une vitesse trop rapide associée à un déplacement mal maîtrisé (quelques dixièmes de mm) peuvent conduire à une réponse en contrainte du matériau très élevée et donc à la destruction de la cellule de charge. Un essai de relaxation en traction uniaxiale est alors effectué avec le même temps de montée en charge. Les contraintes sont normées par rapport à la contrainte maximale obtenue au cours de la montée en charge  $K_{1max}$ . Les deux courbes peuvent ainsi être comparées. On constate que la relaxation de la contrainte générée dans le matériau sollicité sous contrainte hydrostatique est quasi nulle. Ceci est mécaniquement représentatif d'un matériau quasi-incompressible. Physiquement, on imagine que les chaînes de polymère sont peu déformées. Les mécanismes de viscoélasticité ne peuvent donc pas avoir lieu.



**Figure 2.32** – SBR4 – Essai de relaxation en compression œdométrique (CO) – Comparaison avec la traction uniaxiale (TU)

### ***Traction-Compression sur éprouvette ‘plot’***

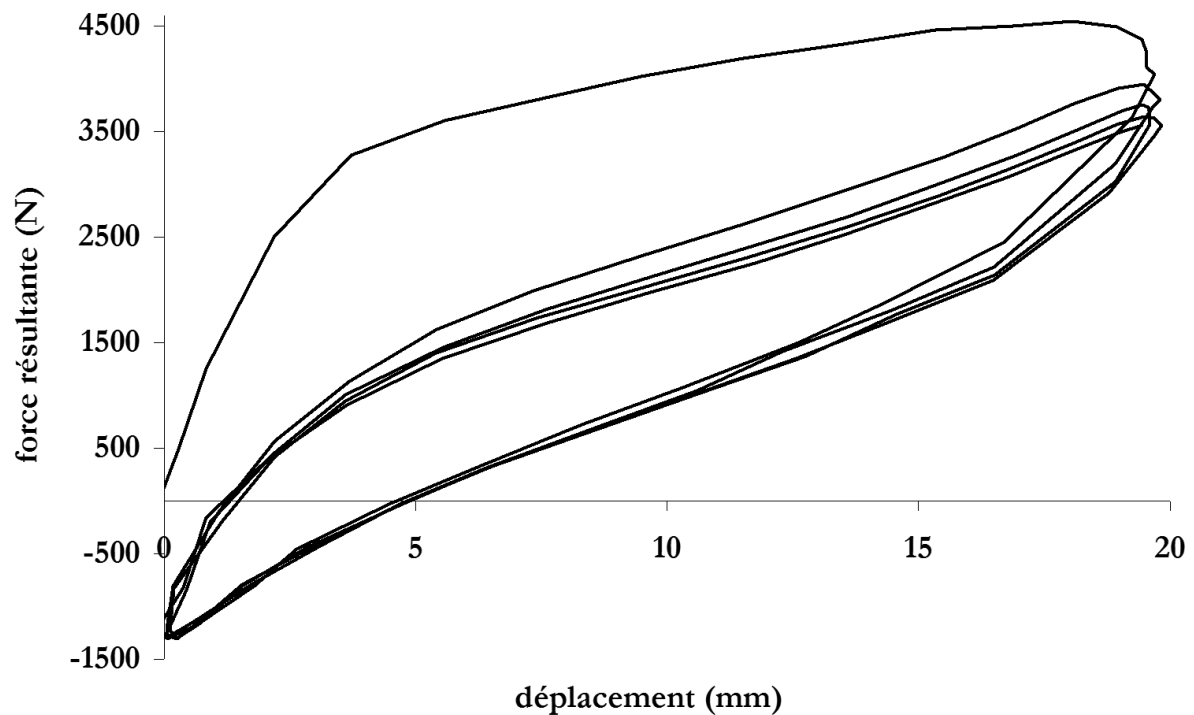
Ces essais sur structure, qui sont utiles pour valider la loi de comportement, sont en fait mis en place afin d'étudier le comportement en fatigue du matériau. Les éprouvettes sont testées à une fréquence de 3.3 Hz. Le déplacement, mesuré à l'aide d'un capteur LVDT, est imposé sinusoïdal entre une valeur maximale et une valeur minimale. Cette fréquence est choisie de telle façon que les essais de fatigue ne soient pas trop longs et que l'échauffement de l'éprouvette reste relativement faible. Les résultats présentent la force globale mesurée en fonction du déplacement global imposé à l'éprouvette.

L'objectif est de simuler correctement l'ensemble de ces essais afin de connaître localement, en fond d'entaille, l'état de contrainte et de déformation.

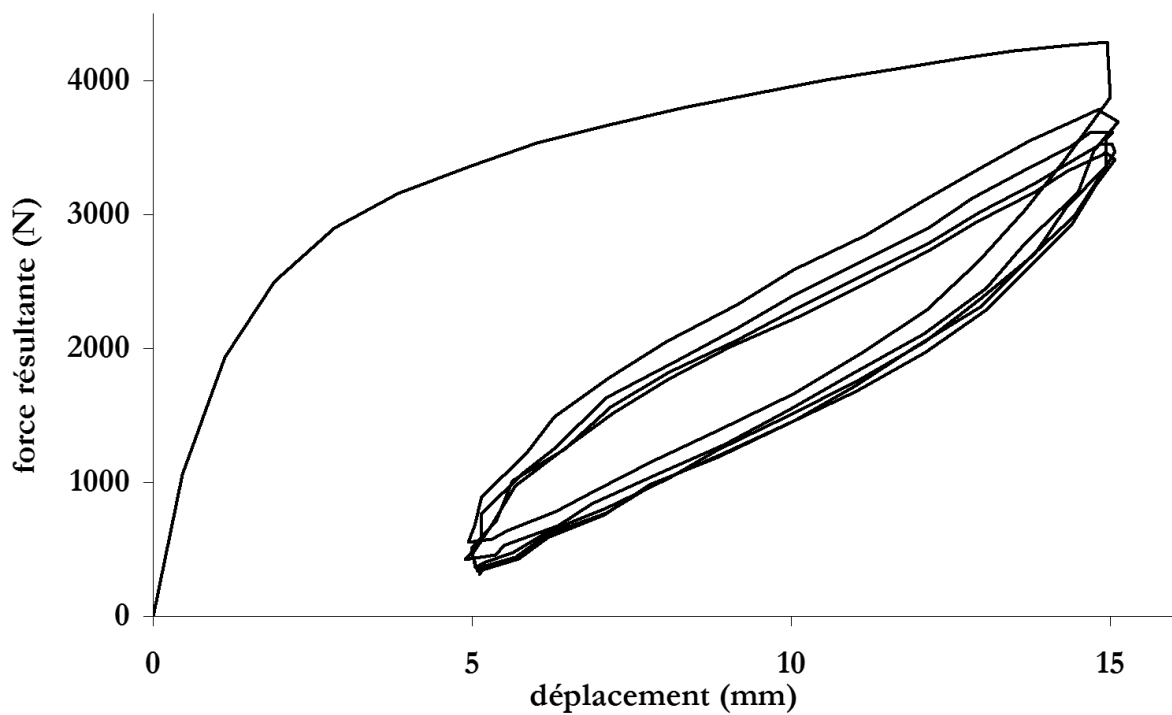
La Fig. 2.33 montre la courbe obtenue avec une éprouvette testée entre 0 et +20 mm. Cela correspond à une elongation globale de 1.5 environ. Localement, nous verrons d'après le calcul par éléments finis que l'elongation locale est supérieure à cette valeur du fait de l'entaille. On constate que l'éprouvette, bien que sollicitée avec un déplacement positif, rentre en compression dès la fin du premier cycle. Ceci provient des propriétés viscoélastiques du matériau et de la déformation rémanente importante. Les Fig. 2.34 et 2.35 présentent les résultats obtenus sur des éprouvettes testées respectivement entre +5 et +15 mm et -10 et +15 mm. Ces conditions limites variables sont appliquées pour étudier le comportement du

matériau en fatigue, et déterminer les influences éventuelles du chargement maximal et de l'amplitude de chargement.

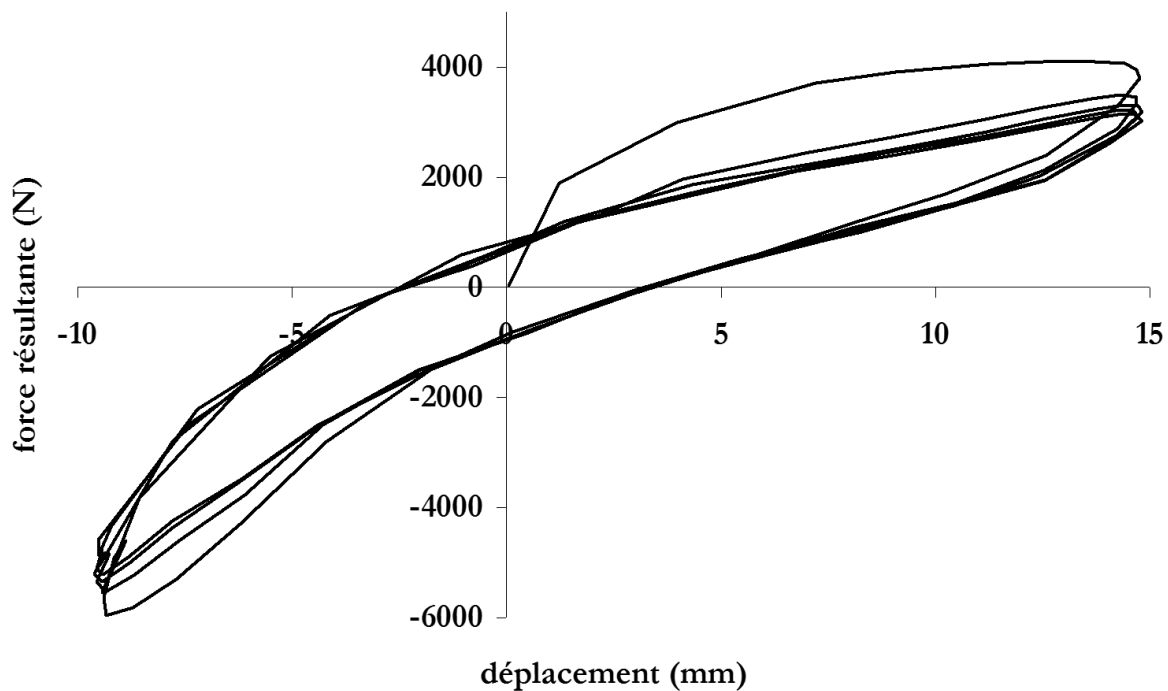
On constate, sur l'ensemble des essais, que le troisième cycle est stabilisé.



**Figure 2.33** – SBR4 – Essai cyclique de traction compression sur plot – Déplacement imposé sinusoïdal entre 0 et +20 mm –  $T=3s$



**Figure 2.34** – SBR4 - Essai cyclique de traction compression sur plot - Déplacement imposé sinusoïdal entre +5 et +15 mm -  $T=3s$

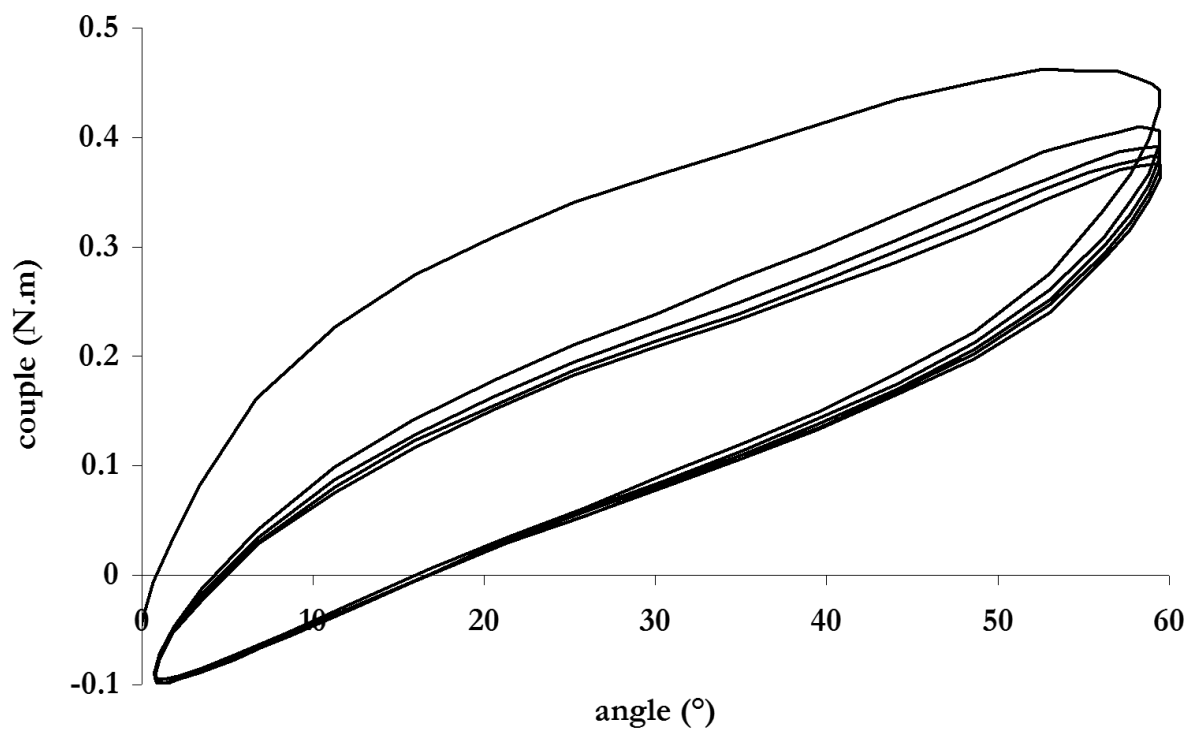


**Figure 2.35** - SBRA - Essai cyclique de traction compression sur plot - Déplacement imposé sinusoïdal entre -10 et +15 mm -  $T=3s$

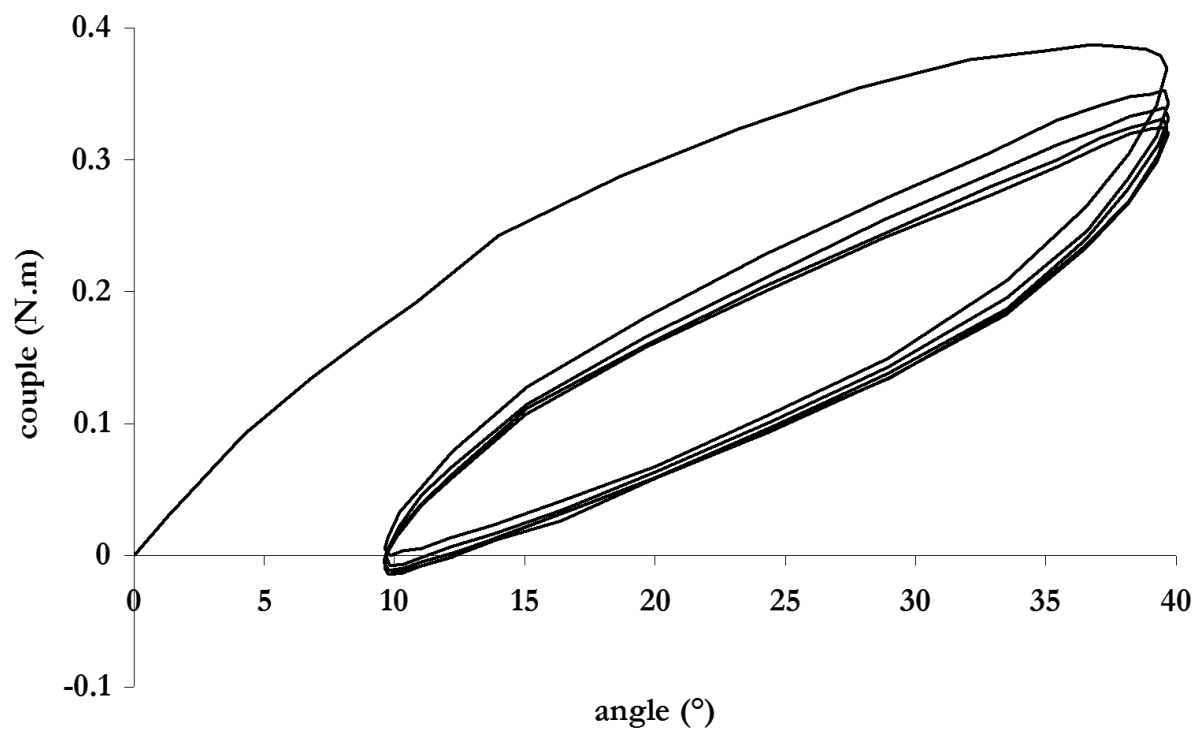
Notons que ces éprouvettes sont plus massives que les éprouvettes lanières. La chaleur produite à partir de l'énergie dissipée conduit à une augmentation de la température de l'éprouvette. A température ambiante, le comportement du SBRA étant sur le plateau caoutchoutique, on suppose qu l'effet de température n'a pas d'influence sur les valeurs de contraintes. Ces aspects seront discutés plus en détail dans le chapitre 4 (étude du comportement en fatigue). Nous pouvons toutefois noter dès à présent que ces effets seront négligés tout au long de l'étude.

### Torsion sur éprouvette 'AE'

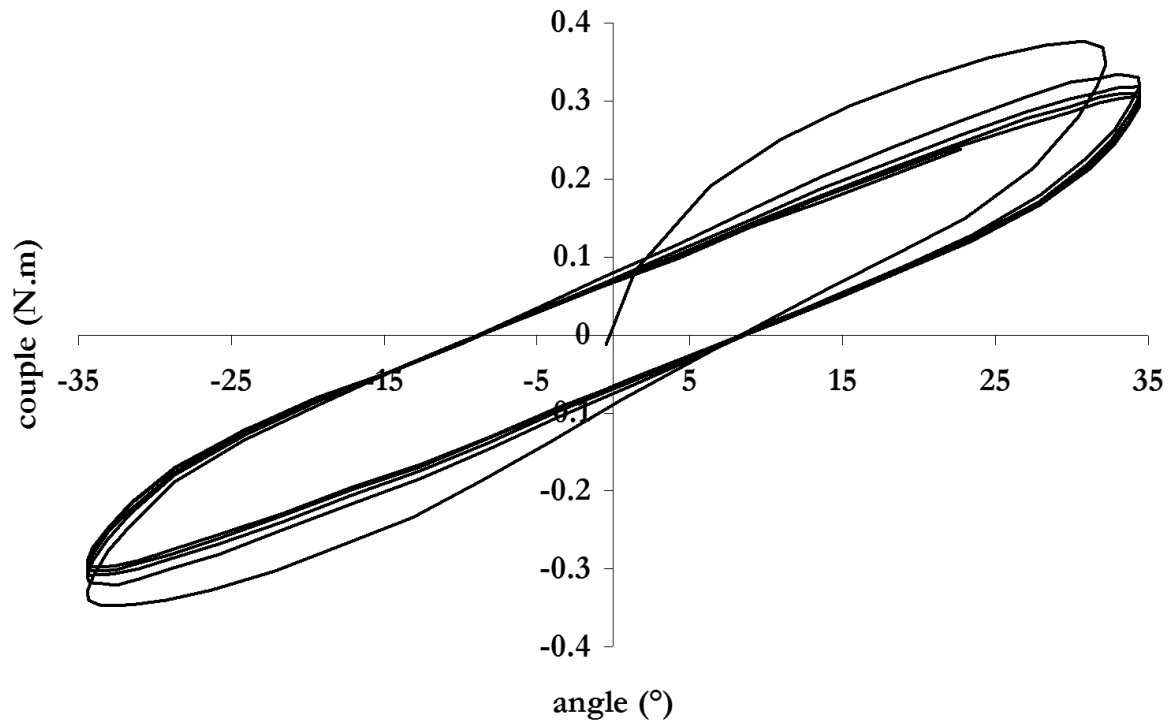
De même que précédemment, ces essais nous permettent dans un premier temps de valider la loi de comportement mais surtout d'étudier le comportement en fatigue du matériau. Ils nous permettent de solliciter le matériau en cisaillement. Le chargement de rotation imposé est quasi-sinusoïdal. La vitesse de rotation étant limitée, les périodes des cycles sont en général supérieures à trois secondes. Elles dépendent de l'amplitude du signal. Notons qu'à ces valeurs d'élongation, la torsion ne correspond pas à du cisaillement pur. Les résultats présentent le couple global mesuré en fonction de l'angle de torsion imposé aux bornes de l'éprouvette.



**Figure 2.36** – SBR4 – Essai cyclique de torsion sur AE – Angle imposé entre 0 et +60 °-  $T=4s$



**Figure 2.37** – SBR4 – Essai cyclique de torsion sur AE – Angle imposé entre +10 et +40 °-  $T=3s$



**Figure 2.38** – SBRA – Essai cyclique de torsion sur AE – Angle imposé entre  $-35$  et  $+35^\circ$  -  $T=4.5s$

La Fig. 2.36 montre la courbe obtenue sur une éprouvette testée entre  $0$  et  $60^\circ$ . Pour les mêmes raisons que celles évoquées dans le paragraphe précédent, on constate que le couple devient négatif dès la fin du premier cycle. Les Fig. 2.37 et 2.38 présentent les résultats obtenus sur des éprouvettes testées respectivement entre  $+10$  et  $+40^\circ$  et  $-35$  et  $+35^\circ$  (cycle symétrique).

## 2.3 - Résultats – Cas du PU

Ce paragraphe résume les essais effectués pour caractériser le comportement mécanique du PU de nuance A. Il est divisé en deux parties. La première décrit les essais uniaxiaux : traction et compression. La seconde partie décrit les essais multiaxiaux effectués sur le PUA : les essais de compression eudiométrique. Des éprouvettes plus complexes, par exemple de type axisymétrique entaillée, n'ont pu être mises en forme par le fournisseur de PU. Nous ne disposons donc pas d'essais mécaniques permettant de valider la loi de comportement.

L'étude de l'homogénéité du comportement des plaques PUA issues du même lot, ou des éprouvettes de PUA issues de la même plaque est présentée en annexe 2D.

### 2.3.1 - Essais mécaniques uniaxiaux

Les éprouvettes de type lanière et haltère utilisées dans cette étude sont les mêmes que celles prélevées par poinçonnement dans les plaques de SBR. - § 2.1 -. Les seuls échantillons de matière dont nous disposons sont des plaques injectées de 150\*150 mm<sup>2</sup> et 3 mm d'épaisseur. Comme nous l'avons indiqué dans le premier chapitre, la densité des pores varie au sein des plaques. Les haltères et lanières sont donc prélevées par poinçonnement ou découpe au cutter exclusivement sur les bords de ces dernières. Quant aux pions, ils sont constitués par un empilement de cylindres, également prélevés sur le bord des plaques. Le tableau de la figure 2C.3 de l'annexe 2C retrace l'ensemble des spécifications de essais présentés dans cette partie: éprouvette utilisée, type d'essai, conditions d'essai.

#### Traction uniaxiale monotone

La Fig. 2.39 montre le résultat d'un essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture effectué sur une éprouvette haltère. La vitesse de déplacement de la traverse est fixée à 50 mm/min. Ceci correspond approximativement à une vitesse de déformation de 0.01 s<sup>-1</sup>. Les modules tangent à l'origine, tangent et sécant à  $\lambda_1=4.0$  sont respectivement estimés égaux à 10, 1 et 1.3 MPa. Les modules tangent et sécant à  $\lambda_1=1.5$  sont estimés égaux à 1.4 MPa et 3.5 MPa. La contrainte et l'élongation à rupture sont de l'ordre de 7 MPa et 6.5. Notons ces valeurs sont variables selon la zone de prélèvement de l'éprouvette. Ces aspects seront discutés dans le paragraphe 2.5.

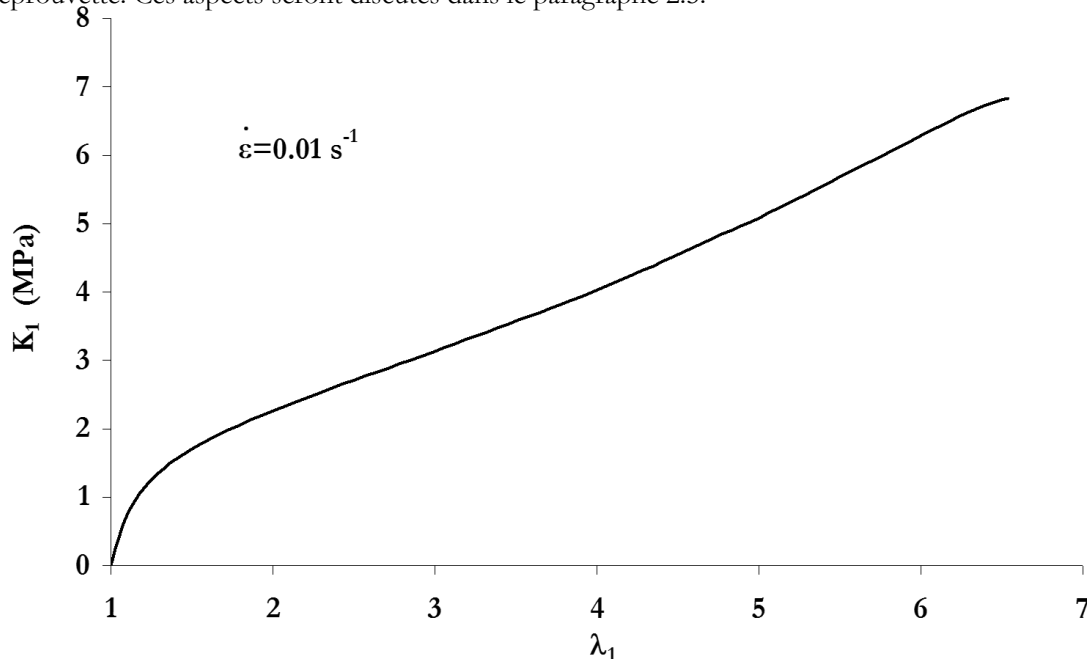
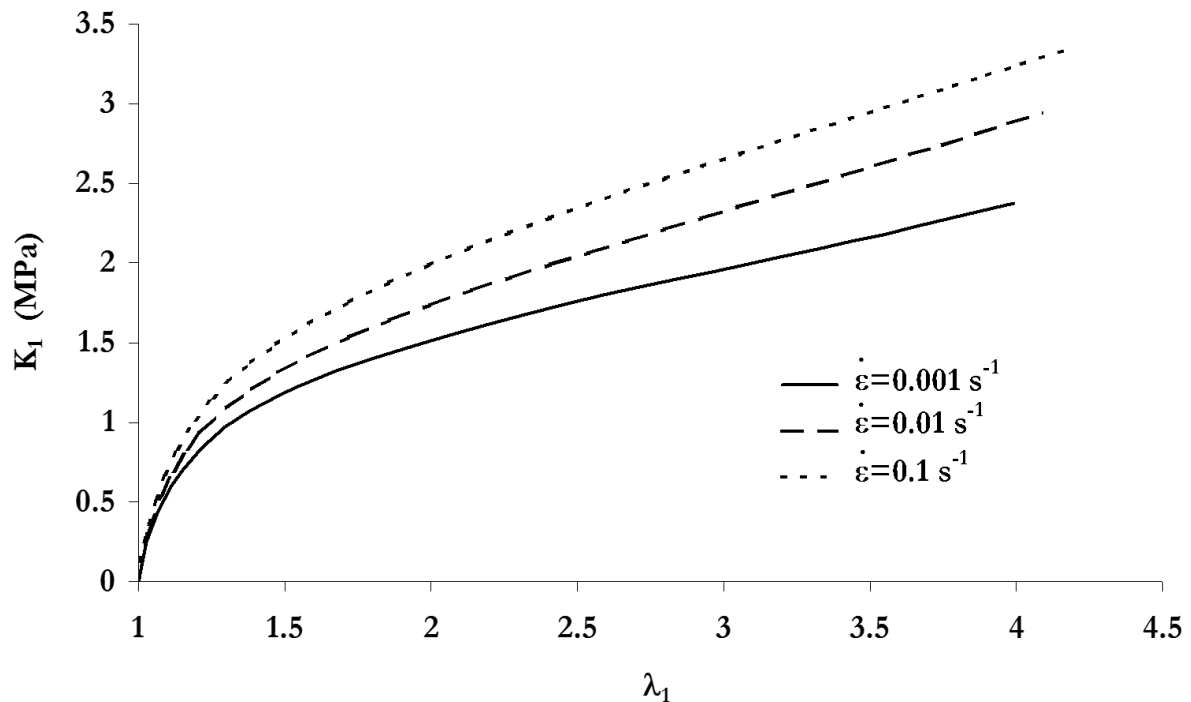


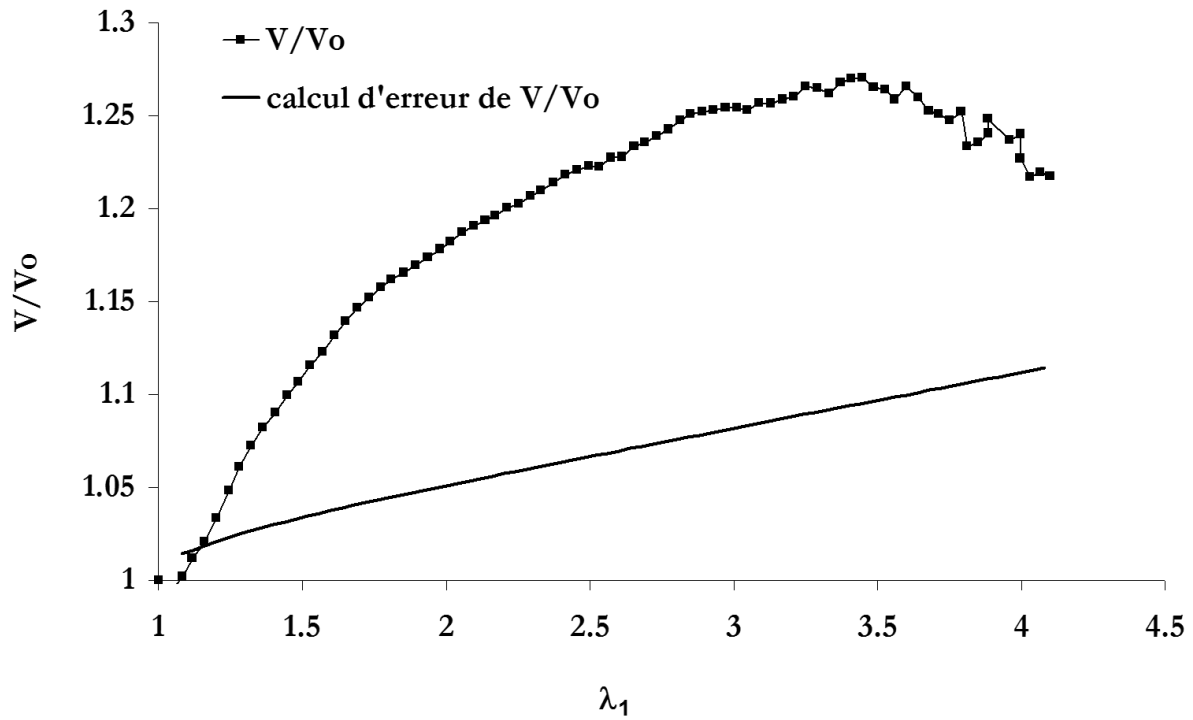
Figure 2.39 – PUA – Essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture

La Fig. 2.40 montre les résultats obtenus sur des éprouvettes lanières issues de la même plaque et étirées à trois vitesses de déplacement de traverse différentes : 5, 50 et 500 mm/min. Les vitesses de déformation correspondantes sont 0.001, 0.01 et 0.1 s<sup>-1</sup>. L'influence de la vitesse est notable.



**Figure 2.40** – PUA – Essai de traction uniaxiale - Influence de la vitesse de déformation

Des essais de mesure du champ de déformation ont été menés à l'Ecole de Mines d'Alès. Comme dans le cas du SBR, l'intérêt de ces essais est la mesure de l'élongation transversale appelée ici  $\lambda_2$  (2<sup>ème</sup> direction principale). La connaissance des élongations longitudinales et transversales permet, en faisant l'hypothèse que les déformations hors-plan et transversale sont égales, de calculer la variation de volume  $V/V_0 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2^2$ . La Fig. 2.41 présente l'évolution de la variation de volume en fonction de l'élongation longitudinale. Les erreurs de mesure sont également calculées à partir des paramètres de l'essai et sont tracées sur la figure. La variation de volume est donc significative. Elle atteint 30 % pour une élongation de 4.5, puis diminue. On suppose que la décroissance coïncide avec la déchirure des porosités.

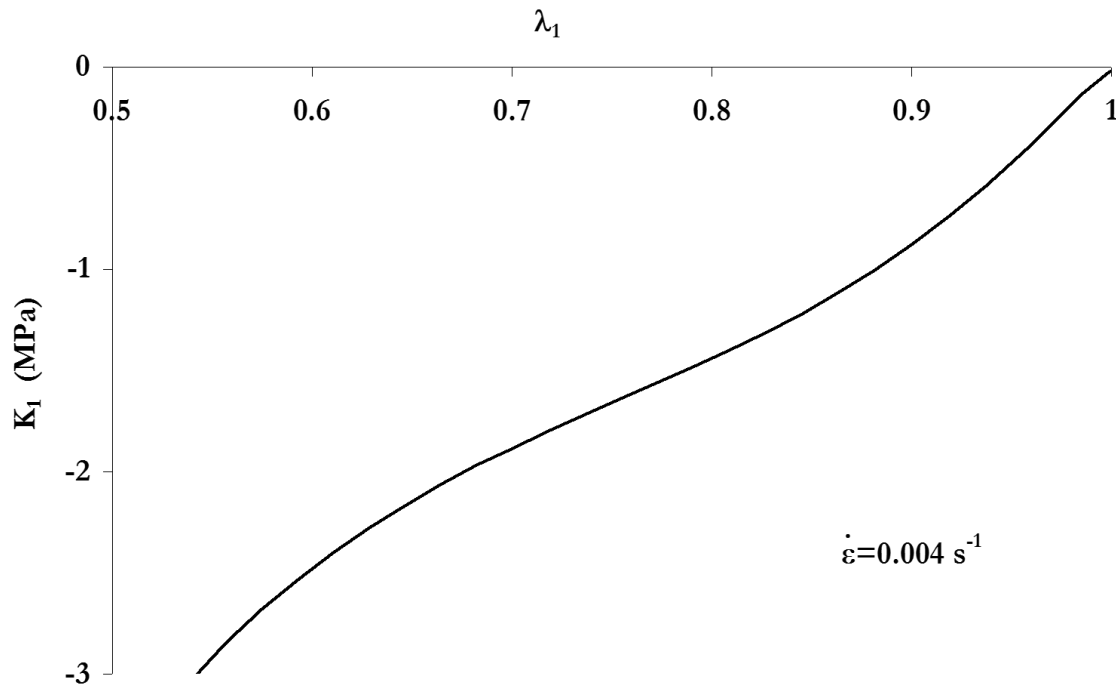


**Figure 2.41** – PUA – Essai de traction uniaxiale jusqu'à rupture – Mesure de la variation de volume

### Compression uniaxiale monotone

Quatre pions cylindriques poinçonnés dans les plaques, de diamètre 30 mm environ, d'épaisseur 3 mm sont empilés et comprimés entre deux plateaux. Le rapport d'élancement hauteur/diamètre est égal à 0.4. Une goutte d'huile de vaseline pure est déposée sur chacun des plateaux afin de diminuer le coefficient de frottement et donc de limiter l'effet 'tonneau'.

La Fig. 2.42 montre la courbe  $(K_1, \lambda_1)$  obtenue. Le module d'Young à l'origine est calculé égal à 9.4 MPa. Il est égal, aux erreurs de mesure près, au module mesuré en traction uniaxiale (10 MPa).



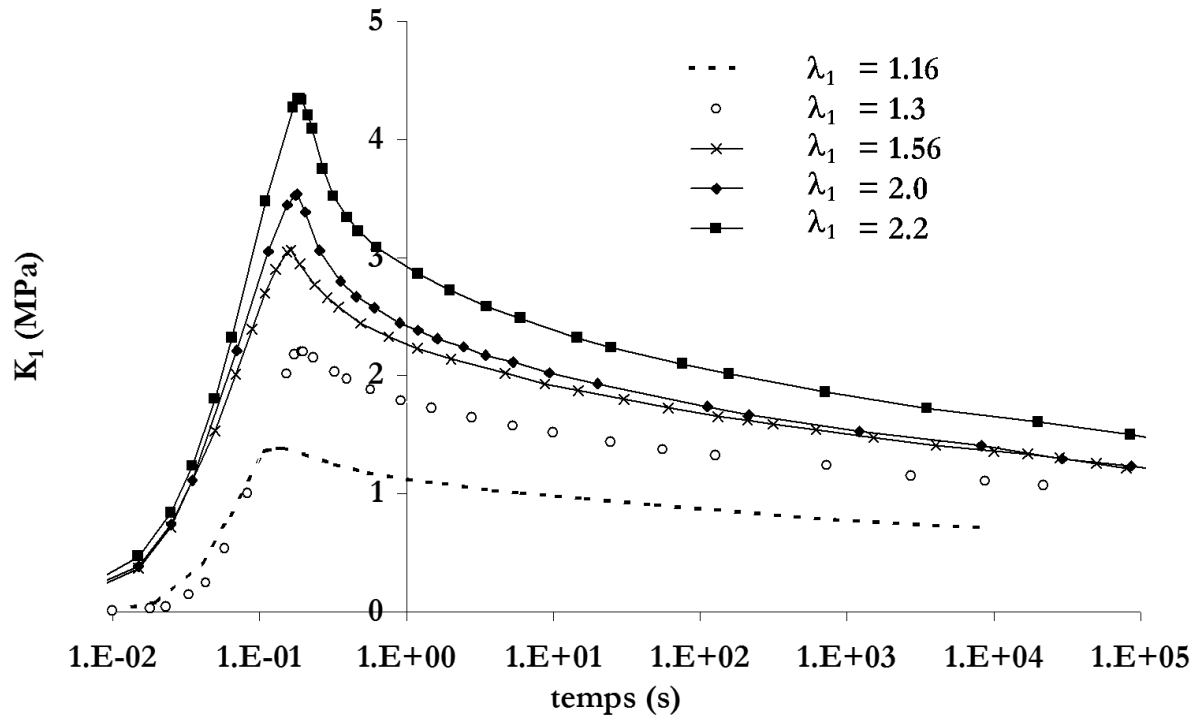
**Figure 2.42** – PUA – Essai de compression uniaxiale



## Relaxation en Traction Uniaxiale

Nous avons vu lors des essais de traction uniaxiale que l'effet de vitesse était sensible sur le PU. Les essais de relaxation en traction uniaxiale sont alors menés dans le but de mieux caractériser les propriétés viscoélastiques de ce matériau.

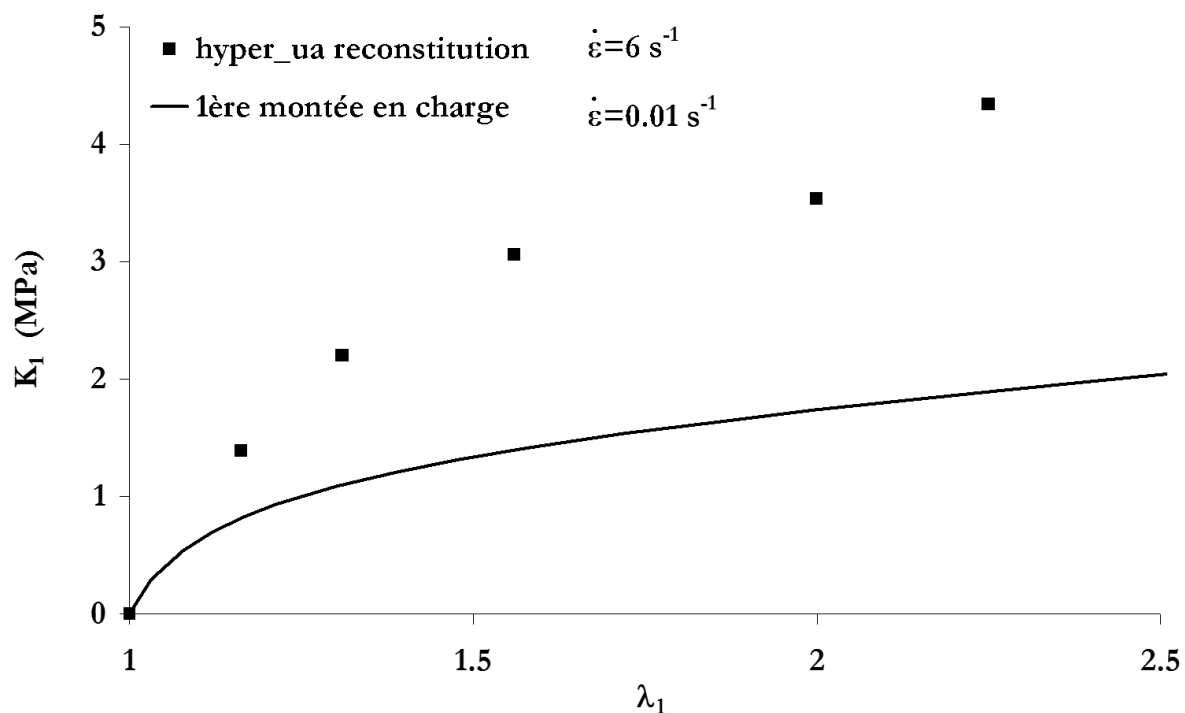
Ils sont effectués dans les mêmes conditions que sur le SBR A. Les temps de montées en charge sont inférieurs à 0.2s.



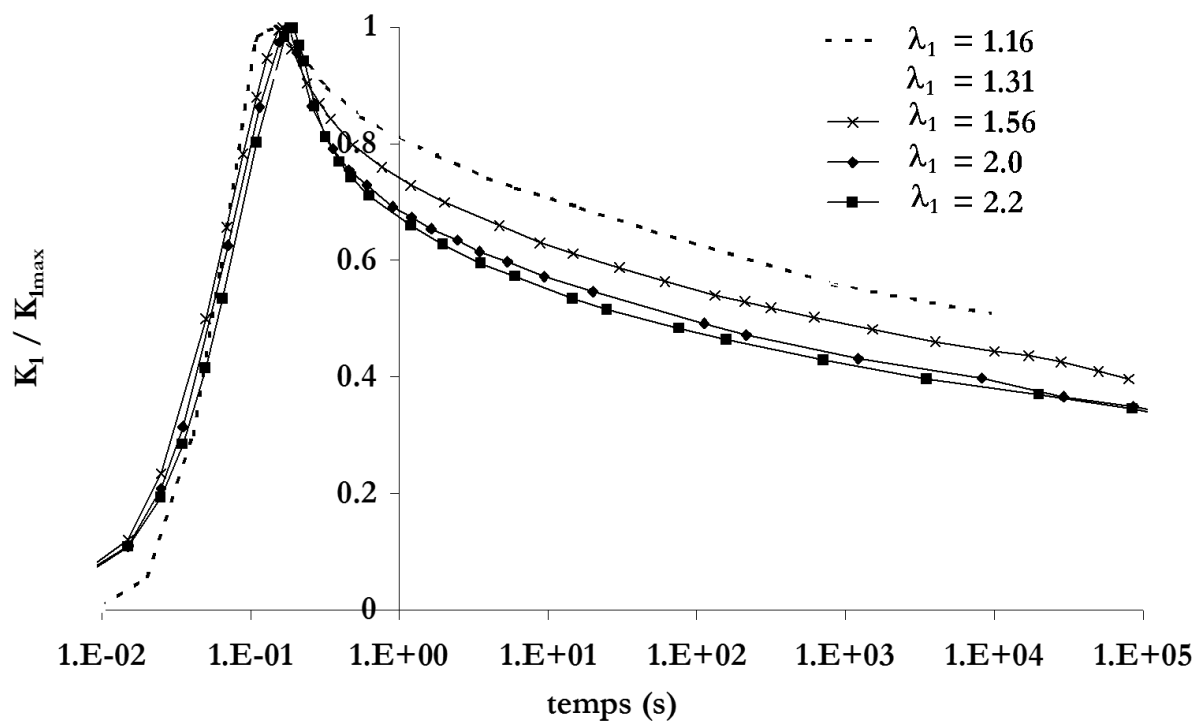
**Figure 2.43** – PUA – Essai de relaxation en traction uniaxiale

La Fig. 2.43 montre les courbes ( $K_1$ ,  $t$ ) obtenues. Les élongations fixées sont 1.16, 1.3, 1.56, 1.95 et 2.2. La contrainte chute de 20 à 30% dès la première seconde, puis de 40 à 60 % dans les  $10^3$  secondes suivantes. De la même façon que dans le cas du SBRA, on peut reconstituer une courbe de traction uniaxiale en retenant de chacun des essais la durée de montée en charge, l'élongation et la contrainte maximale atteintes – Fig. 2.44 - . La vitesse de déformation d'un tel essai serait de  $6 \text{ s}^{-1}$ . On superpose à cette courbe reconstituée, appelée hyper\_ua (on suppose qu'à ces vitesses de déformation, la contrainte n'a pas le temps de se relaxer ou en d'autres termes que la viscoélasticité du matériau intervient peu : seul le comportement hyperélastique du matériau intervient), une courbe obtenue à vitesse plus faible. L'effet de vitesse de sollicitation est net.

La courbe de la figure suivante, Fig. 2.45, présente les mêmes résultats mais utilise la contrainte normalisée  $K_1/K_{1\max}$  en ordonnée. On constate que les courbes ne sont pas superposées. Plus l'élongation augmente, plus la relaxation de la contrainte augmente. Ceci peut être dû à la non linéarité du comportement élastique ou à la non linéarité du comportement visqueux. Au niveau micromécanique, on imagine qu'il y a concentration de contrainte autour des porosités. Ceci peut amplifier les effets de non linéarité. Cette non superposition peut également provenir de l'effet de vitesse de sollicitation. Cette dernière est plus lente dans la cas des éprouvettes faiblement étirées. La contrainte de normalisation est donc sous-estimée et la relaxation des contraintes également.



**Figure 2.44** – PUA – Reconstitution d'une courbe de traction uniaxiale – Influence de la vitesse

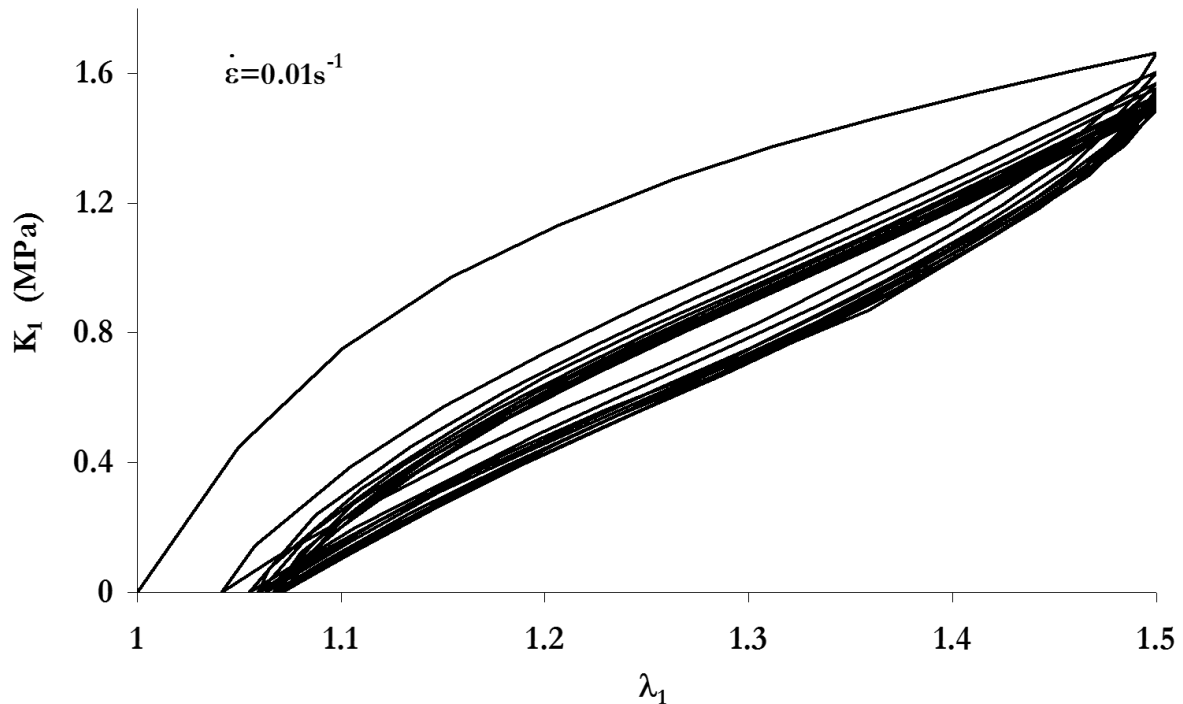


**Figure 2.45** – PUA – Essai de relaxation en traction uniaxiale – Contrainte normée – Influence de l'élongation sur la relaxation des contraintes

## Traction Uniaxiale cyclique

Comme nous l'avons déjà expliqué, l'objectif de ce travail préliminaire est de simuler le comportement cyclique du PU. Les éprouvettes 'lanières' sont donc sollicitées sous traction uniaxiale cyclique. Les conditions sont les mêmes que dans le cas du SBR, à savoir :

- un allongement maximal : condition choisie car l'essai Bennewart, essai de fatigue-flexion sur semelles que nous voulons modéliser, est un essai contrôlé en déplacement.
- une force nulle : permet d'éviter le flambement de l'éprouvette.



**Figure 2.46** – PUA – Traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1max}=1.5$

La Fig. 2.46 illustre les résultats obtenus sur une éprouvette lanière sollicitée entre  $K_1=0$  MPa et  $\lambda_1=1.5$  à une vitesse de déformation de  $0.01\text{ s}^{-1}$  environ. On constate que le comportement est faiblement dissipatif. L'énergie dissipée lors du premier cycle est de  $220\text{ J/mm}^3$ . Son pourcentage par rapport à l'énergie fournie est de 40%. Les aires des cycles suivants sont inférieures à l'aire du premier cycle et sont similaires entre elles. L'énergie dissipée lors du cinquième cycle est de l'ordre de  $70\text{ J/mm}^3$ . Ceci correspond à 20% de l'énergie fournie lors de la 5<sup>ème</sup> montée en charge.

Le PU n'étant pas chargé, on suppose que seul le phénomène de viscoélasticité de la matrice intervient. L'effet Mullins, qui peut se produire dans un élastomère non chargé, est très limité [Harwood, 1965].

L'élongation rémanente est de 1.04 à la fin du premier cycle puis augmente progressivement lors des cycles suivants. Cette déformation rémanente peut être entièrement attribuée à l'effet viscoélastique. Cependant, les éprouvettes testées présentent, après 1.5 années de recouvrance à température ambiante, une déformation rémanente de 1.04 pour cet essai (10 cycles). De même que pour le SBRA, la réorganisation interne du matériau sous l'effet d'un chargement induit une déformation permanente au sein du matériau (glissement des chaînes les unes par rapport aux autres). Ce phénomène semble avoir lieu essentiellement lors du premier chargement.

La Fig. 2.47 présente les courbes des premiers cycles obtenues sur des éprouvettes lanières testées entre  $K_1=0$  MPa et  $\lambda_1=1.2, 1.5$  et  $2.5$  à la même vitesse de déplacement de traverse que précédemment. Les différences de niveaux de contrainte observées proviennent du fait que les éprouvettes sont prélevées dans des plaques différentes. Ce type de dispersion est discuté dans l'annexe 2C.

La Fig. 2.48 présente les courbes des cinquièmes cycles de ces mêmes essais, avec une courbe de 1<sup>er</sup> chargement comme repère. La Fig. 2.49 présente l'énergie dissipée lors du 1<sup>er</sup> cycle, lors du 5<sup>ème</sup> cycle, son pourcentage par rapport à la montée en charge du cycle correspondant, la valeur de la déformation rémanente au 5<sup>ème</sup> cycle (ou déformation progressive) et son rapport par rapport à la déformation imposée. Ces valeurs ont été calculées pour les trois essais  $\lambda_{1\max}=1.2$ ,  $\lambda_{1\max}=1.5$  et  $\lambda_{1\max}=2.5$ .

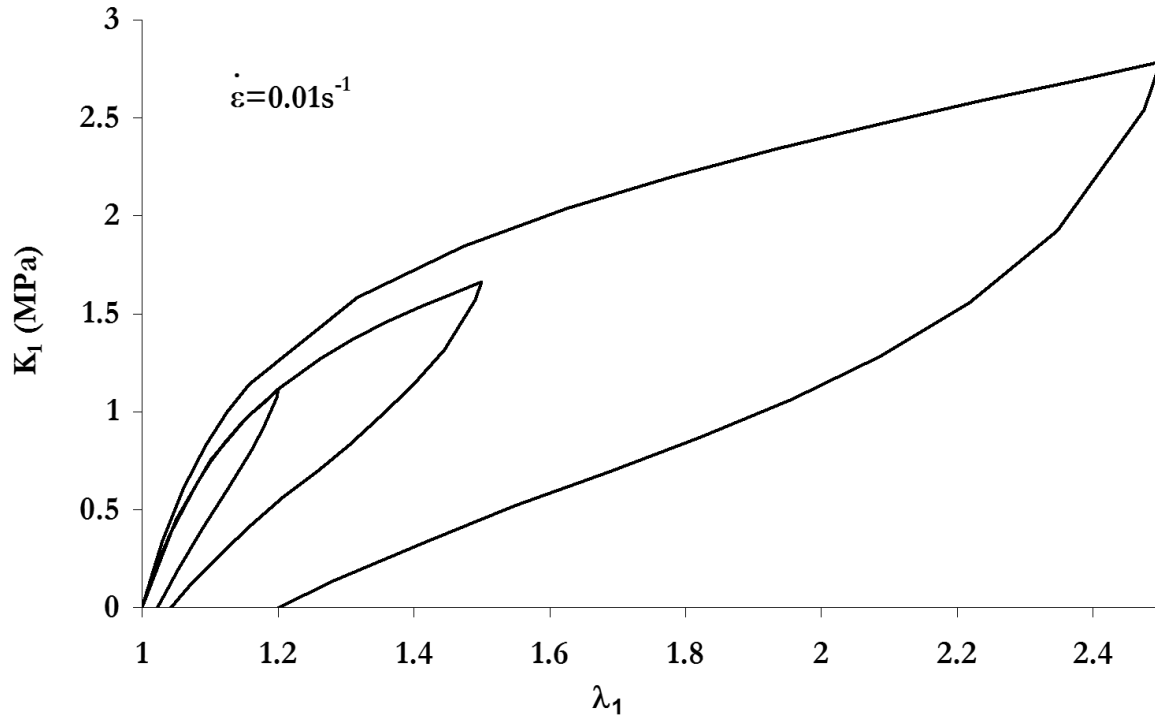


Figure 2.47 – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.2$  à  $2.5$  – 1<sup>ers</sup> cycles

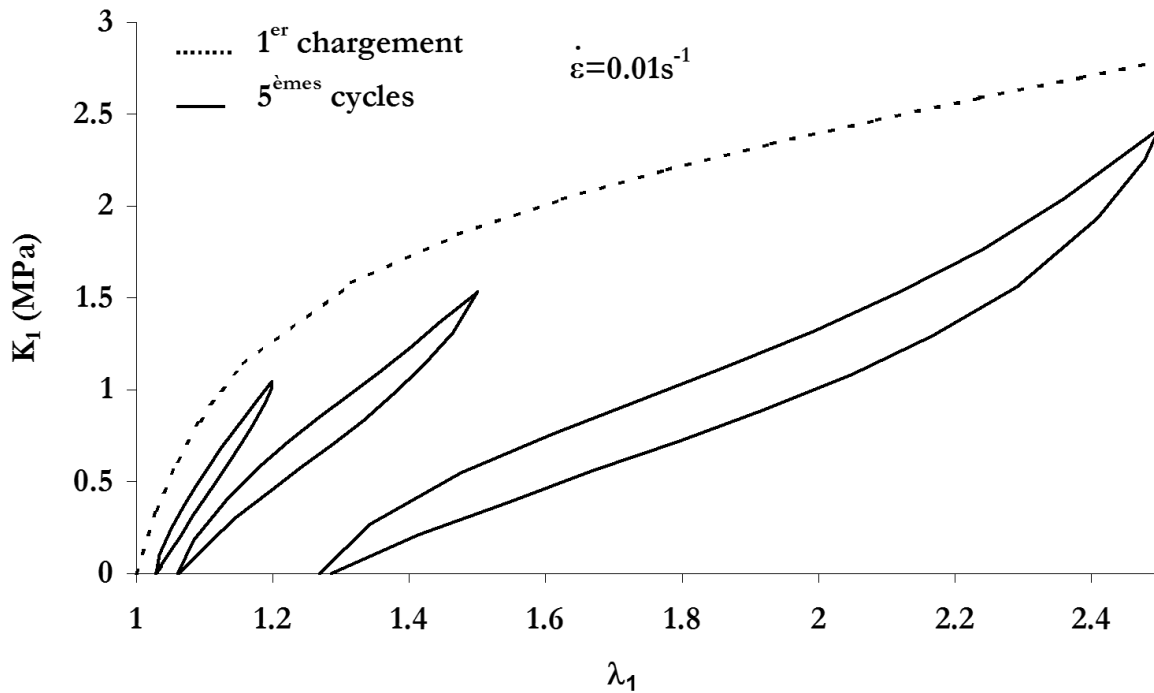


Figure 2.48 – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max}=1.2$  à  $2.5$  – 5<sup>èmes</sup> cycles

$\lambda_1 \text{ max}$	1.2	1.5	2.5
$E \text{ (J/mm}^3\text{)} - 1^{\text{er}} \text{ cycle}$	42	220	1700
$\% E \text{ dissipée} - 1^{\text{er}} \text{ cycle}$	30	38	56
$E \text{ (J/mm}^3\text{)} - 5^{\text{ème}} \text{ cycle}$	20	70	320
$\% E \text{ dissipée} - 5^{\text{ème}} \text{ cycle}$	19	18	22
$\lambda_{1\text{rém}}^{5^{\text{ème}} \text{ cycle}}$	1.03	1.06	1.29
$(\lambda_{1\text{rém}} - 1) / (\lambda_{1\text{max}} - 1)$	0.15	0.12	0.19

**Figure 2.49** – Tableau récapitulatif des essais de traction uniaxiale cyclique

Ces résultats montrent que lorsque l'élongation maximale augmente, le rapport d'énergie dissipée lors du 1<sup>er</sup> cycle augmente, le rapport d'énergie dissipée lors du 5<sup>ème</sup> cycle est quasi constant. Le rapport de la déformation rémanente sur la déformation imposée augmente légèrement. Si l'on compare ces résultats avec ceux obtenus sur le SBR chargé, on observe que

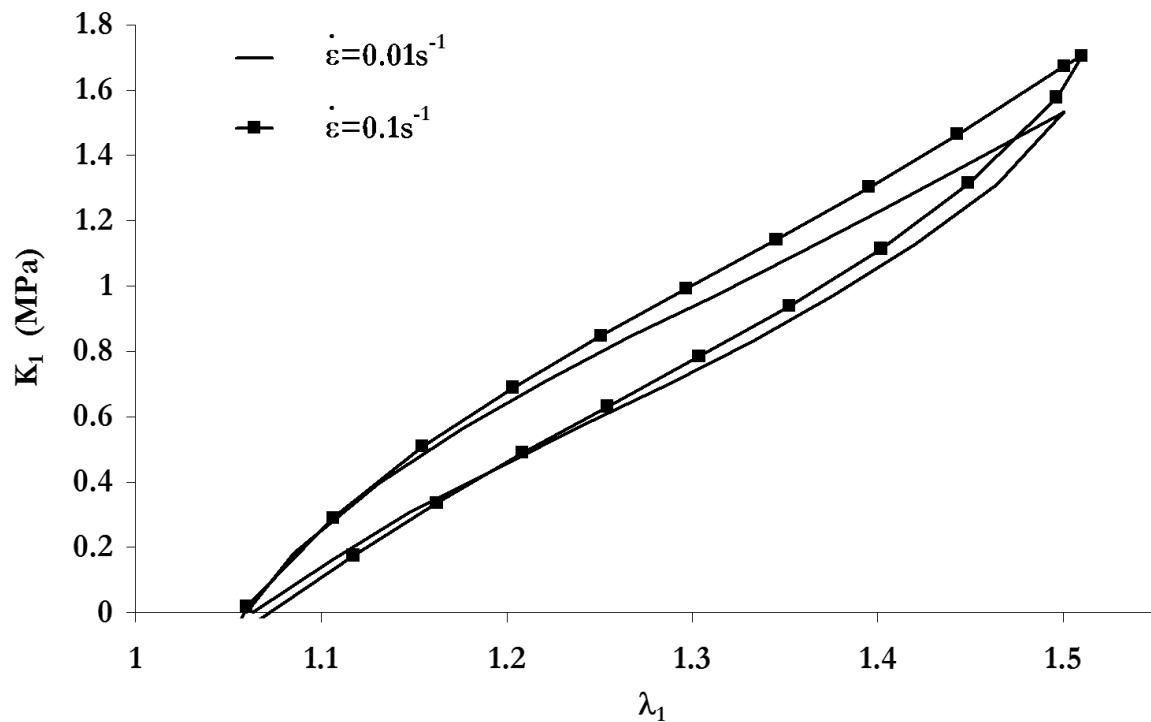
- Les énergies dissipées dans le PU sont beaucoup moins importantes que celle dissipée dans le SBR chargé, bien que les relaxations des contraintes observées lors d'un essai de relaxation soient les mêmes. Ceci tend à montrer que les charges de silice du SBR ont bien un effet sur la dissipation lors d'essais cycliques (frottements, rupture/reformation du réseau secondaire de charges de silice)

- Le pourcentage d'énergie dissipée dans le PU lors du 1<sup>er</sup> cycle augmente avec l'élongation, alors qu'elle est quasi constante dans le cas du SBR. Cela souligne une fois de plus la différence des deux comportements. Dans le cas du SBR, les charges conduisent à un endommagement par effet Mullins dès les faibles élongations : les chaînes de faible longueur reliant les agrégats au sein d'un agglomérat sont rompues, ou sont détachées de la surface de la charge par désorption, ou encore glissent. Dans le cas du PU, cet effet Mullins a lieu pour des élongations plus importantes. En effet, en l'absence de charges, il n'y a pas de modification de la distribution des longueurs de chaînes (pas de chaînes courtes reliant les charges). Ainsi, les chaînes les plus courtes de PU ont une longueur très supérieure aux chaînes les plus courtes du SBR (dans l'hypothèse d'un taux de réticulation de la gomme pure initiale similaire). Elles casseront donc à des élongations plus importantes.

- Les rapports de déformation progressive sur déformation maximale sont inférieures dans le cas du PU. De plus, dans ce matériau, une plus grande partie de cette déformation est recouvrable, donc de nature viscoélastique.

De même que dans le cas du SBR, on considère que le cinquième cycle est quasiment stabilisé.

La Fig. 2.50 compare les cinquièmes cycles de deux essais de traction uniaxiale cyclique effectués aux vitesses de déformation de 0.01 et 0.1 s<sup>-1</sup>. On met à nouveau en évidence l'effet de vitesse sur la contrainte. Cependant, on ne note pas d'effet sur la déformation progressive. Ces résultats montrent qu'une partie de la déformation progressive est de nature 'plastique' (réorganisation interne du matériau sous l'effet d'un chargement) et donc indépendante de la vitesse de sollicitation.



**Figure 2.50** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1max}=1.5 - 5^{mes}$  cycles – Influence de la vitesse

---

### Conclusion

La caractérisation du PU de nuance A met en avant différents aspects du comportement :

- *Hyperlasticité*

Cet aspect du comportement est typique des élastomères

- *Compressibilité*

La nature cellulaire de ce matériau engendre sa variation de volume lorsqu'il est sollicité en traction et en compression. Nous verrons que pour des contractions volumiques inférieures à 0.6, il devient compact. Cette valeur est liée à la densité du matériau (0.6), elle même en rapport avec la densité de porosité

- *Viscoélasticité*

Le comportement dépend de la vitesse de sollicitation. Les essais de relaxation montrent que la relaxation des contraintes dépend peu de l'élongation imposée.

- *Déformation permanente*

Elle constitue un pourcentage faible de la déformation progressive, de nature essentiellement viscoléastique.

---

### 2.3.2 - Essais mécaniques multiaxiaux

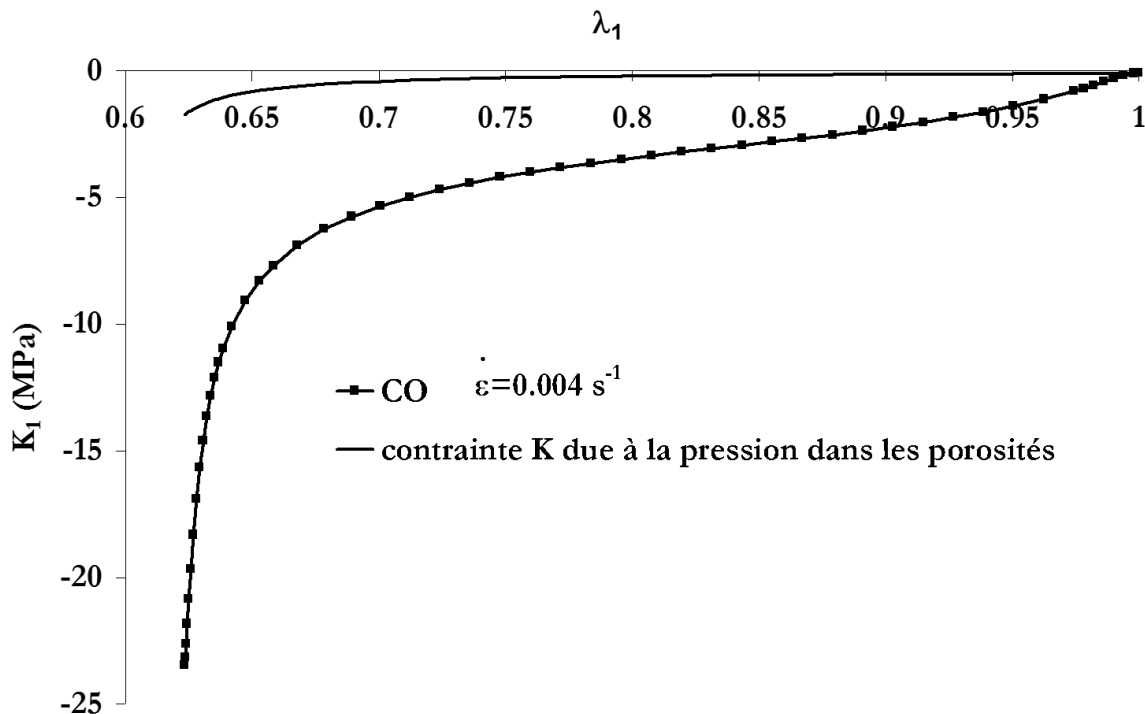
Comme nous l'avons déjà souligné, il n'a pas été possible d'obtenir du fabricant des éprouvettes axisymétriques entaillées en PU. Le seul essai complexe est celui de compression eudiométrique. Le schéma de cet essai est présenté dans le paragraphe 2.1. Les éprouvettes placées dans la chambre sont constituées de l'empilement de quatre cylindres poinçonnés sur le bord des plaques injectées. Les cylindres ont un diamètre de 19 mm et une hauteur de 3 mm environ.

#### Compression œdométrique

Les pions résultant de l'empilement de cylindres sont comprimés dans la chambre adaptée au diamètre des pions.

Le comportement du PU sous chargement de compression œdométrique, illustré sur la Fig. 2.51, est non linéaire. On observe deux phases de compression. La première correspond à une elongation du matériau comprise entre 1 et 0.7. La pente de la tangente à la courbe  $K_1/\varepsilon_1$  à  $\lambda_1 = 0.85$  est de 12 MPa ( $\varepsilon_1 = \lambda_1 - 1$ ). L'elongation  $\lambda_1$  correspond à la variation de volume  $V/V_0$  puisque les deux autres elongations principales sont égales à 1. La deuxième phase se produit pour des elongations inférieures à 0.7. Ceci correspond à une compression du matériau supérieure à 30%. La pente de la tangente à la courbe à  $\lambda_1 = 0.63$  est alors de 1.4 GPa.

La première phase correspond à la « compaction » du matériau, c'est-à-dire à la fermeture des porosités. La deuxième phase correspond alors à la compression du PU compact. On atteint alors une valeur  $K_1/\varepsilon_1$  de l'ordre de celle d'un matériau incompressible. Le fournisseur nous a spécifié que le matériau qu'il nous livrait avait une densité de 0.6. Ceci correspond à un pourcentage volumique de porosités de l'ordre de 40%. Nos résultats sont cohérents avec cette donnée puisque le PU devient quasi compact pour des elongation comprises entre 0.65 et 0.6. Pour expliquer ce léger décalage, on peut rappeler que les éprouvettes ont été prélevées dans les bords des plaques afin d'éviter les pores millimétriques. La densité peut donc être légèrement supérieure à 0.6.



**Figure 2.51** – PUA – Essai de compression œdométrique – Résultat expérimental et calcul de la contribution de la pression de l'air dans les porosités

Deux hypothèses peuvent décrire le comportement du matériau lors de la première phase. D'une part, la résistance du PU à la compaction (ou confinement) peut être due à la compression de l'air enfermé dans les cellules. D'autre part, elle peut être due à l'écrasement des cellules et à la flexion (ou flambement) des parois.

Pour calculer la contrainte due à la compression de l'air, utilisons la loi des gaz parfaits :

$$P V = n R \theta$$

avec  $P$  la pression,  $V$  le volume de gaz,  $n$  le nombre de moles,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $\theta$  la température. Dans le cas de notre essai, nous faisons l'hypothèse que  $n$  et  $T$  sont constants.

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad P_0 V_0 &= P_1 V_1 \\ P_0 \cdot f_0 \cdot L_0 \cdot S_0 &= P [L S_0 - (1-f_0) L_0 S_0] \end{aligned}$$

$P_0$  est la pression initiale (nous la posons égale à la pression atmosphérique),  $V_0$  est le volume initial de l'éprouvette,  $S_0$  la surface de l'éprouvette,  $L$  la longueur 'actuelle' de l'éprouvette,  $L_0$  sa longueur initiale,  $f_0$  le pourcentage volumique de porosités (égal à 0.4)

On a alors :

$$P = P_0 \cdot f_0 / [\lambda_1 - (1-f_0)] \quad \text{avec } \lambda_1 = L/L_0$$

La courbe  $P = f(\lambda_1)$  est tracée sur la Fig. 2.51. On constate que les contraintes calculées sont 10 à 20 fois inférieures aux contraintes mesurées. Ce calcul rapide montre que la flexion des parois est prépondérante dans la résistance au confinement du matériau.

De la même façon que dans le cas du SBR, le coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau peut être déterminé à partir de la pente de la courbe  $K_1/\epsilon_1$  et des équations de mécanique des solides en élasticité linéaire. Ceci permet de déterminer les valeurs du module de compressibilité  $K$  et du coefficient de Poisson, connaissant le module d'Young  $E$ .

$$\frac{K_1}{\epsilon_1} = E \cdot \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad , \quad \epsilon_1 = \lambda_1 - 1$$

Les pentes des tangentes à la courbe  $K_1/\epsilon_1$  aux élongations 0.85 et 0.63 sont respectivement 12 et 1400 MPa. Les modules d'Young tangents aux mêmes déformations c'est à dire aux élongations 1.15 et 1.37 sont déterminées à partir d'un essai de traction uniaxiale, présenté dans le paragraphe 2.3.1. Ils sont égaux respectivement à 2.4 et 1MPa. Ces valeurs conduisent à des coefficients de Poisson égaux à 0.463 à une élongation de 0.85 et 0.49988 à une élongation de 0.63.

## Relaxation en compression œdométrique

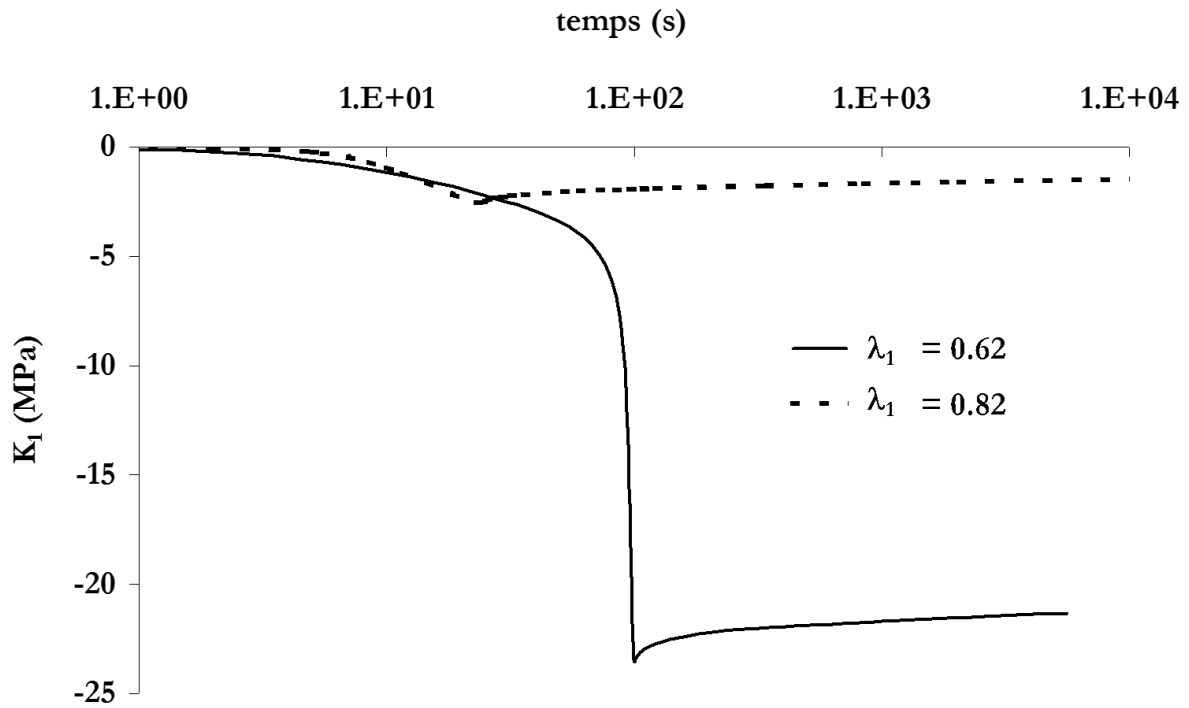
La relaxation du matériau sous un chargement de compression œdométrique a été mesurée pour deux élongations égales à 0.82 et 0.62 représentatives des deux domaines définis ci dessus.

La Fig. 2.52 présente les résultats obtenus en traçant l'évolution de la contrainte nominale  $K_1$  en fonction du temps. Les niveaux de chargement sont très différents dans les deux essais puisque dans le cas de l'essai à  $\lambda_1=0.62$ , le matériau est quasi compact. Les contraintes sont donc très élevées. La figure suivante, Fig. 2.53, présente les mêmes résultats avec la contrainte normalisée par la contrainte maximale obtenue au cours de la montée en charge  $K_{1max}$ . On superpose à ces résultats une courbe de relaxation en traction uniaxiale obtenue avec un temps de montée en charge égal à celui de l'essai à  $\lambda_1=0.82$ . Rappelons que les montées en charge des essais de compression œdométrique sont lentes pour des raisons de sécurité. On constate que la relaxation du PU sollicité à faible niveau de compression œdométrique est légèrement supérieure à celle du PU sollicité en traction uniaxiale. Cette différence peut provenir de la relaxation plus

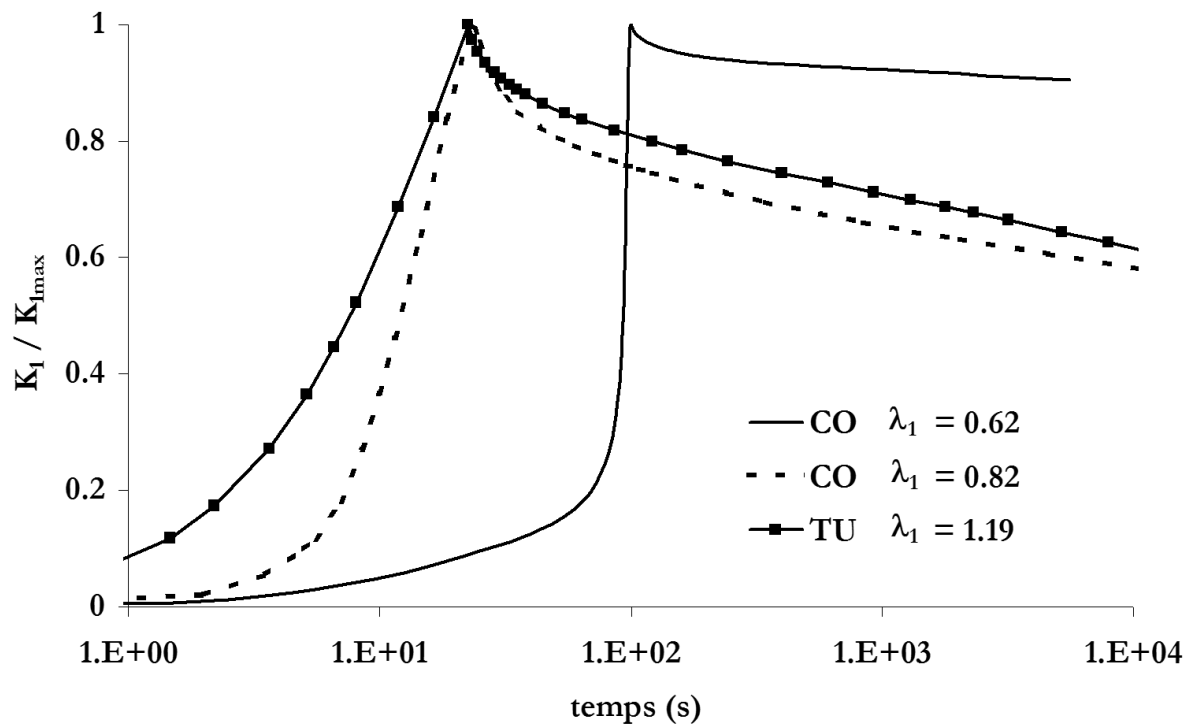


importante des parois localement plus sollicitées lors de l'essai de compression œdométrique (car flambement).

La relaxation du PU quasi compact est beaucoup plus faible. Elle n'est cependant pas nulle. On suppose que l'air continue à s'échapper des porosités écrasées.



**Figure 2.52** – PUA – Essais de compression œdométrique – Influence du niveau d'élongation



**Figure 2.53** – PUA – Essais de compression œdométrique – Contrainte normée – Comparaison avec la traction uniaxiale

---

## **Conclusion**

*On constate que pour des contractions volumiques inférieures à 0.6, le comportement du PU A cellulaire est compressible, aussi bien sous chargement de traction et que de compression. Pour des contractions supérieures, il devient compact. Cette valeur est liée à la densité du matériau (0.6).*

*La relaxation du matériau sous chargement de compression œdométrique est légèrement supérieure à celle du matériau sous chargement de traction uniaxiale. La relaxation des contraintes sphériques est donc supérieure à celle des contraintes déviatoriques. Si l'on considère le matériau hétérogène, à l'échelle du  $\mu\text{m}$ , cette différence provient certainement de différence de sollicitation des parois sous les deux types de chargement globaux.*

---

## 2.4 – Influence des charges – Cas du SBR

Cette partie présente une étude complémentaire, bien qu'incomplète, de l'influence des charges de silice sur le comportement mécanique. Cette étude permet de mieux appréhender les difficultés liées à la modélisation du comportement d'un tel matériau, ainsi que de mieux cerner l'origine physique des propriétés mécaniques de ce matériau 'bi-phasé'. Elle permet également de mettre en évidence quelques mécanismes d'endommagement. Ceci est utile à la fois pour modéliser l'endommagement tout en connaissant les limites du modèle et aussi pour donner des pistes quant aux mécanismes d'endommagement en fatigue du matériau. De plus, qualifier ainsi l'effet des charges de silice devrait permettre, lors des études futures ayant pour objectif de modéliser le comportement de caoutchoucs chargés en silice, d'anticiper sur les propriétés du matériau d'après sa microstructure.

Cette étude commence par une bibliographie de l'effet des charges sur le renforcement (effet communément appelé 'effet Payne' aux faibles elongations) et sur l'adoucissement (dit 'effet Mullins').

Le deuxième paragraphe tente de mettre en évidence l'influence des charges sur le comportement mécanique. Les essais mécaniques sont effectués à la fois sur le SBRA chargé de silice, et sur un matériau composé uniquement de la gomme du SBR A. Le comportement du SBR non chargé est comparé au SBR chargé. Les résultats sont discutés par rapport à la littérature.

Le troisième paragraphe s'attache à la description de l'endommagement. Il commence par la présentation d'essais de traction uniaxiale contrôlés en elongation et effectués à 48 heures et 3 mois d'intervalle. Ces essais permettent de mettre en évidence la recouvrance ou non des propriétés mécaniques du SBR A à température ambiante et pendant ces intervalles de temps. La 'non-recouvrance' des propriétés sera alors assimilée à de l'endommagement. Des essais de traction in situ du matériau en traction permettent d'observer directement l'endommagement.

### 2.4.1 - Le renforcement et l'adoucissement – Eléments de bibliographie

L'ajout de charges à la gomme est fait pour la 1<sup>ère</sup> fois en 1820 par T. Hancock [Dannenberg, 1987]. Il avait initialement pour but de diminuer le prix de revient du caoutchouc. **L'action renforçante** des charges telles que les oxydes de zinc (ZnO) a, à partir de cette période, été rapidement mis en évidence. On entend par renforcement l'amélioration des propriétés à l'usage de la gomme. Il peut s'agir de l'augmentation du module tangent à l'origine, des modules sécants, de l'énergie à rupture, de la contrainte ou de l'elongation à rupture, de la résistance en fatigue, de la résistance à l'abrasion, ... [Dannenberg, 1975]. L'ajout de charges de noir de carbone (NC) a été réellement utilisé depuis le début du siècle. Les premières études ont été menées dans le but de mettre au point les pneus des voitures. L'ajout des charges de silice en vue de renforcer le matériau date des années 40. Son utilisation dans la fabrication des pneus est récente. Elle a nécessité de nombreuses études sur le rôle d'ajout d'organo-silanes permettant d'améliorer la dispersion et la cohésion de ces charges avec la matrice [Wolff, 1996]. La littérature portant sur les charges de silice est donc plus récente, et moins importante.

Associé à ces études sur le renforcement des caoutchoucs par les charges a été étudié **l'adoucissement du matériau**. On définit l'adoucissement du matériau par la diminution de ses propriétés mécaniques sous chargement cyclique. Ces études sont liées puisque l'adoucissement consiste souvent en la destruction du renforcement dû aux charges. Les processus physiques ou micromécaniques responsables de l'adoucissement des mélanges gomme/charges sous chargements répétés ont été décrit pour la première fois par Mullins en 1947 [Mullins, 1947], d'où l'appellation d'effet Mullins.

Notre synthèse bibliographique ne se veut pas exhaustive. Seuls les points qui peuvent aider à la compréhension des essais mécaniques décrits dans les paragraphes suivants sont détaillés. La synthèse se présente sous forme chronologique. Le renforcement et l'adoucissement étant liés, les auteurs décrivent en général les deux aspects. Les modèles qu'ils proposent s'affinent au cours du temps et permettent souvent d'expliquer à la fois le renforcement et l'adoucissement. Les études portent bien souvent sur les mélanges chargés de noir de carbone. Les résultats sont toutefois intéressants, et bien souvent, dans les cas cités ici, transposables aux charges de silice.

*Smallwood*, dans les années 40, décrit le renforcement de la gomme par les charges en comparant le comportement d'un élastomère chargé à celui d'une suspension colloïdale [Dannenberg, 1975]. Les particules rigides, dispersées, conduisent à l'augmentation du module, par analogie à l'augmentation de viscosité (loi d'Einstein). Le modèle est alors

$$E = E_0 (1 + 2.5 \Phi)$$

$E$  est le module d'Young du mélange,  $E_0$  celui de la gomme pure et  $\Phi$  la concentration volumique de charges.

*Guth&Gold* ont amélioré le modèle en considérant l'interaction entre les charges, puis en ajoutant un facteur de forme [Guth et al., 1945]. Ce dernier permet de rendre compte de l'aggrégation en forme allongée des particules de NC.

*Mullins*, en 1947, publie les résultats qu'il a obtenu en faisant subir des flexions répétées à plusieurs mélanges de caoutchouc [Mullins, 1947]. Il montre que l'adoucissement qui se produit sur des gommages non chargées est quasi inexistant. Par contre, il constate que l'adoucissement est d'autant plus important que l'est le renforcement dû aux charges. Le renforcement serait dû aux « liaisons » entre la matrice et les charges (faibles et fortes). Il cite également un autre processus de renforcement : la floculation des particules en agglomérats, voire en structure dite secondaire. L'adoucissement serait dû à la rupture des structures formées soit par les liaisons entre les charges et les chaînes, soit entre les charges elles-mêmes. Il note également que ces structures peuvent se reformer lors du retour à charge nulle.

*Blanchard&Parkinson* calculent le module de cisaillement  $G$  en considérant non seulement les nœuds chimiques entre les chaînes dus à la réticulation du caoutchouc, mais également les liens entre les charges et les chaînes, qui constituent des points d'ancrage [Mullins, 1969]. Le facteur  $\mu$  qu'ils introduisent dans la loi de comportement rend en quelque sorte compte de l'extensibilité limite des chaînes entre les charges.

*Mullins&Tobin*, en 1954, utilisent l'approche de Blanchard&Parkinson pour construire un modèle phénoménologique [Mullins, 1969]. Ils considèrent le caoutchouc comme un matériau composite à deux phases : une zone 'molle' et une zone 'dure' (charges + gomme occluse). La déformation est située exclusivement dans la zone molle, dont les propriétés sont proches de celles de la gomme pure. Les zones 'dures' deviennent 'molles' dès que la contrainte appliquée dépasse celle vue par le matériau au cours de son histoire.

*Bueche*, en 1961, propose un mécanisme de renforcement et d'adoucissement ainsi que sa modélisation [Bueche, 1961]. Les chaînes inter-particulaires, c'est à dire attachées à des particules différentes à leur deux extrémités, rompent à faible élongation si elles sont courtes et à plus forte élongation si elles sont longues. Les chaînes rompues ne contribuent plus à la contrainte. Il décrit également le recouvrement en température par le ré-attachement de la chaîne sur la surface de la particule. Le modèle prend en compte des paramètres tels que la force qui conduit à la rupture d'une chaîne, l'aire de la particule sur laquelle s'attache une chaîne, la distance moyenne séparant les charges, etc...Govindjee&Simo amélioreront ce modèle trente ans plus tard [Govindjee et al., 1991]. Ce dernier sera discuté dans la partie modélisation de l'endommagement.

*Payne&Whittaker* [Payne et al., 1971] publient un 'état de l'art' des connaissances sur les propriétés dynamiques des caoutchoucs à faible déformation en 1971. Ils s'appuient sur les travaux de Payne qui a étudié la variation des modules de cisaillement de phase  $G'$  et de perte  $G''$  en fonction de l'amplitude de la déformation. L'indice 0 indique les faibles amplitudes (de l'ordre de  $10^{-4}$ ) et l'indice  $\infty$  les plus grandes déformations (de l'ordre de 1). Ils comparent différents mélanges de caoutchouc, en faisant varier le pourcentage de charges, la température, la fréquence, le procédé de mise en œuvre du mélange, le degré de vulcanisation, ... Ils constatent que la différence  $G'_0 - G'_\infty$  est indépendante du degré de vulcanisation, donc indépendante de la longueur des chaînes entre points de réticulation. Cette différence est par contre très dépendante de la teneur en NC : le module  $G'_0$  augmente lorsque le pourcentage en NC augmente. Les mesures de conductivité suivent cette tendance, à savoir qu'à faible déformation, la conductivité augmente avec le pourcentage de NC. Elle chute par contre aux fortes amplitudes. Les modules  $G'_\infty$

présentent des valeurs similaires quelle que soit la teneur en NC. L'augmentation de la température conduit à la diminution du module  $G'_0$  et n'a aucune influence sur la valeur de  $G'_\infty$  (cas des concentrations importantes en NC). Le type de NC et la technique de mélangeage utilisée ont également une influence sur le module  $G'_0$ . Le module de perte  $G''$  passe par un maximum d'autant plus élevé que le pourcentage de NC est élevé. Ils expliquent les variations de la différence  $G'_0 - G'_\infty$  par la rupture et la reformation d'un réseau secondaire de NC, agrégé en structure. Le module  $G'_0$  est dû aux effets hydrodynamiques ainsi qu'au facteur de forme de l'arrangement des NC (réseau secondaire).

D'autre part, les modifications des propriétés viscoélastiques du mélange proviennent de la dispersion des particules rigides dans la gomme viscoélastique mais aussi d'une modification des temps de relaxation due à l'immobilisation d'une couche de gomme autour des charges. On parle de gomme liée. Les expériences sont également menées sur un caoutchouc chargé de kaolin et sur un système kaolin/eau. Les résultats obtenus sont similaires. Les kaolins dans l'eau forment une structure en 3 dimensions. Le système est alors à l'état de gel. L'application d'une déformation détruit le réseau 3D et amène le système à l'état liquide. Si la déformation est cyclique, le comportement présente de l'hystérèse.

*Dannenberg*, en 1966, propose le modèle de glissement moléculaire des chaînes à la surface des charges [Dannenberg, 1975]. La Fig. 2.54 illustre sa théorie. Ce modèle complète celui de Bueche. Il permet d'expliquer à la fois le renforcement du matériau, son adoucissement et un éventuel recouvrement des propriétés. Il souligne que ce processus est source d'hystérésis puisqu'il absorbe de l'énergie dans un premier temps (extension des chaînes – alignement) puis en dissipe par friction lors du glissement.

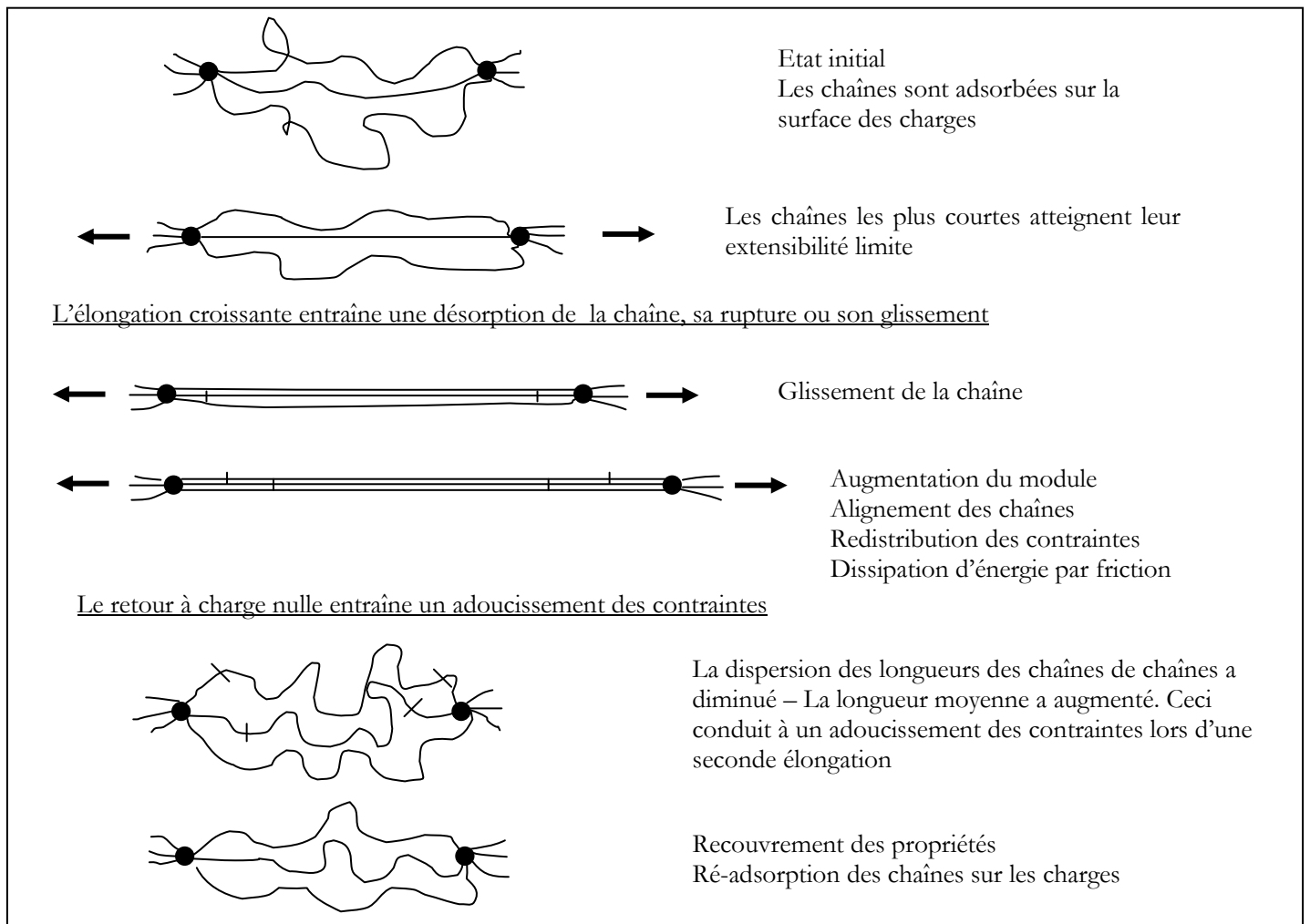


Figure 2.54 – Illustration de la théorie de Dannenberg

*Hamed&Hatfield*, en 1989, essaient de déterminer la part de caoutchouc lié, c'est à dire adsorbé par des liaisons physiques (liaisons faibles type van des Waals) ou des liaisons chimiques (liaisons fortes type covalente) [Hamed et al., 1989]. Ils utilisent des essais de gonflement dans un solvant et considèrent que la gomme de caoutchouc liée n'est pas dissoute. Ils montrent ainsi que les chaînes de poids moléculaires important se lient préférentiellement sur les NC.

*Ambacher, Strauss & Kilian*, en 1991, proposent un modèle physique de renforcement. Ce modèle prend en compte les liaisons entre charge/charge et chaîne/charge [Ambacher et al., 1991], [Kilian et al. 1994]. Le renforcement est contrôlé par la longueur des chaînes entre charges, l'adoucissement par le processus de glissement proposé par Dannenberg. Ils attribuent la déformation rémanente au glissement et à la rupture des contacts entre les charges. Ils la qualifient donc de plastique. Ce modèle sera décrit dans le chapitre 3.

*Wolff*, en 1996, publie une synthèse des connaissances acquises sur le renforcement des caoutchoucs par la silice [Wolff, 1996]. Il montre dans un premier temps que les charges de silice affectent la réticulation de la gomme si l'agent est le soufre. La réticulation n'est par contre pas affectée si un agent de type peroxyde est utilisé. Il compare également les composantes dispersives et spécifiques des énergies de surface du NC et de la silice. La composante dispersive du NC est très supérieure à celle de la silice. La composante spécifique de la silice est au contraire très supérieure à celle du NC. Les interactions (adsorption) des NC avec la gomme de caoutchouc faiblement polaire sont fortes, alors qu'elles sont faibles dans le cas des particules de silice. Les interactions entre les particules sont par contre beaucoup plus fortes dans le cas de la silice, d'où la tendance de celle-ci à former des réseaux « solides ». A une elongation de 1.4, Wolff montre que le réseau de silice est encore intact. A une elongation de 2.0, le réseau est partiellement détruit. A une elongation de 3, le renforcement dû aux charges de silice n'apparaît plus. Ceci indique que le réseau de charges de silice est complètement rompu. La formation d'un réseau de charges de silice présente comme inconvénient, outre le fait que les charges soient mal dispersées et que le renforcement diminue fortement dès une elongation de 2.0, d'engendrer une hystérèse importante (d'où échauffement du matériau). L'ajout de silanes permet de pallier ces inconvénients.

*Kraus*, en 1978, fait une synthèse de l'influence des noirs de carbone sur le renforcement [Kaus, 1978]. Il discute de leur influence sur le comportement viscoélastique. La dissipation est liée, selon lui, à l'agglomération et à la désagglomération des agrégats de noir de carbone, à l'amplification de la déformation due aux charges, à la perte de mobilité des molécules autour des charges et à l'altération du réseau de chaînes polymères.

*Maier&Göritz*, en 1996, mettent au point un modèle permettant de décrire l'effet Payne [Maier, 1996]. Comme Kraus, ils utilisent la théorie de Langmuir (absorption et désorption de molécules de gaz sur une surface). Cependant, ils considèrent que le renforcement est dû à un réseau de liens stables et instables entre les charges et les chaînes polymères, et non à des liaisons entre les charges. La dépendance du module  $G'$  avec l'amplitude de déformation provient de la rupture ou re-formation des liaisons charge/chaîne instables. Le module de perte prend en compte les frictions du réseau de chaînes et la dissipation dues au glissement des segments instables.

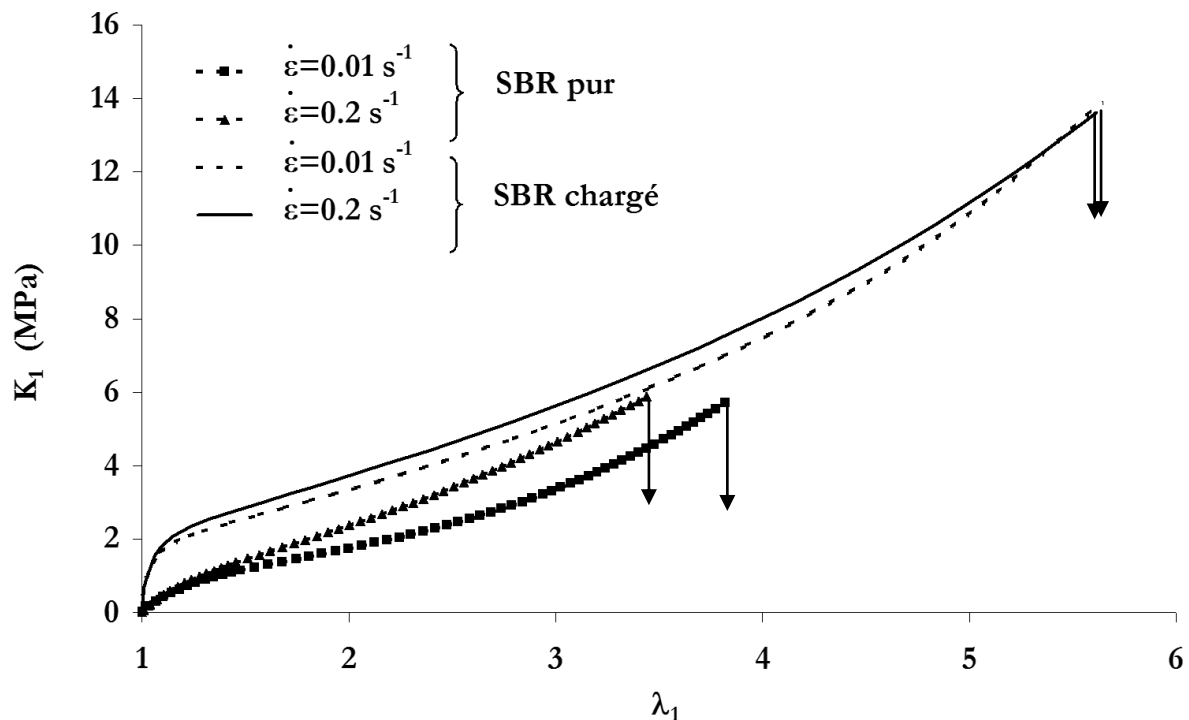
### 2.4.2 – Essais mécaniques – Comparaison SBR chargé / non chargé

Une façon simple de mettre en évidence l'influence des charges est de comparer le comportement de la gomme non chargée à celui de la gomme chargée. Le fournisseur a consenti, sur notre demande, à fabriquer, spécialement pour notre étude, un mélange non chargé : pas de silice et pas de noir de carbone. On qualifie ce mélange de 'pur'. La comparaison des comportements de ces deux mélanges éclaire quelques points concernant l'influence des charges sur le comportement. Cette étude annexe est très incomplète puisque nous n'avons aucune information sur les charges : leur taille, leur morphologie, leur fabrication, leur composition. Les conclusions sont donc qualitatives.

Les comportements des SBR chargé et pur sont comparés à l'occasion d'essais de traction uniaxiale, de relaxation en traction uniaxiale et de traction uniaxiale cyclique. La première série d'essais permet de comparer les modules tangents, à l'origine et aux elongations supérieures. Les essais de relaxation et de traction uniaxiale cyclique permettent de comparer les processus de relaxation et de dissipation.

#### Traction uniaxiale monotone

De la même façon que précédemment, les éprouvettes haltères sont poinçonnées dans les plaques de SBR pur et sont étirées grâce au dynamomètre jusqu'à rupture. La Fig. 2.55 présente les résultats obtenus pour deux vitesses de déformation de l'ordre de  $0.01 \text{ s}^{-1}$  et  $0.2 \text{ s}^{-1}$ . Les mêmes essais effectués à partir d'éprouvettes de SBR A, c'est à dire la même gomme mais chargée sont superposés.



**Figure 2.55** – Essais de traction uniaxiale jusqu'à rupture – Comparaison SBR chargé et pur – Influence de la vitesse de sollicitation

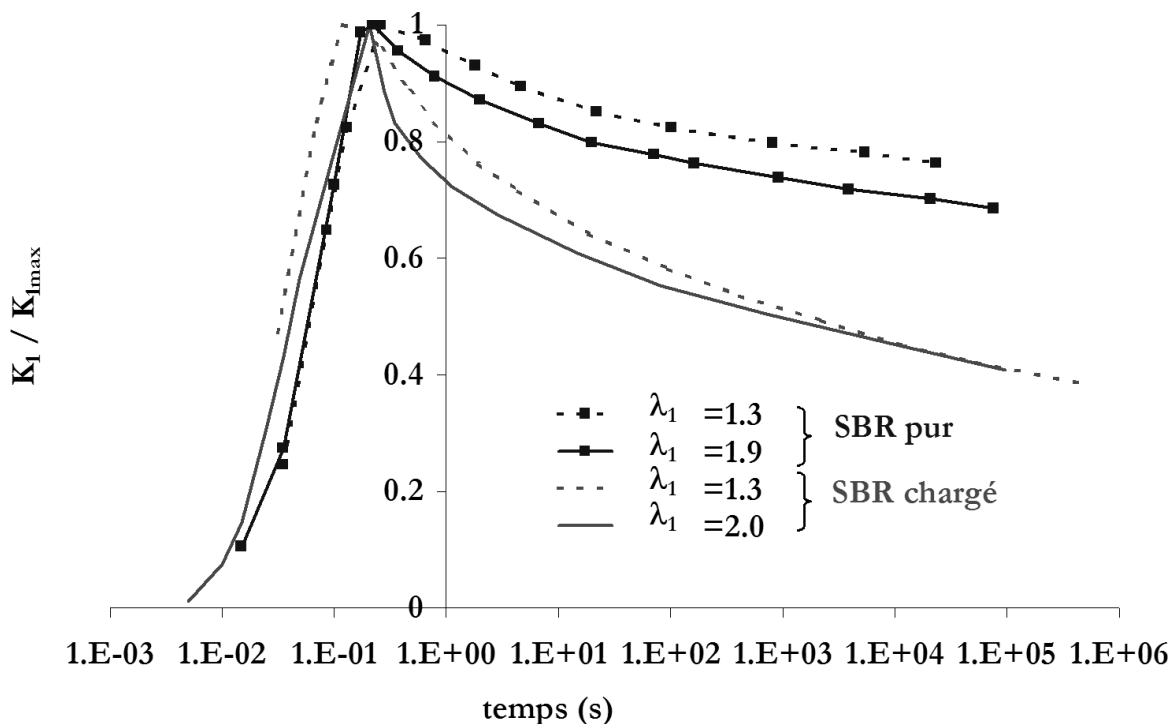
Le module tangent à l'origine du SBR pur est de 5 MPa à la vitesse de  $0.01 \text{ s}^{-1}$ . Il est de 100 MPa environ pour le SBR chargé. A des elongations plus importantes, les valeurs des modules tangents des SBR chargé et pur sont similaires. De telles observations montrent que la forte valeur du module tangent à l'origine provient du renforcement induit par les charges de silice [Payne, 1962]. Cet auteur, ainsi que [Kraus, 1978] pensent que le renforcement provient de la formation d'un réseau secondaire de charges floculées. Dannenberg [1975], dans sa synthèse des connaissances sur le renforcement, remarque trois effets dominants : l'effet composite, l'adsorption des chaînes élastomère sur la surface des charges et les liens

chimiques entre les chaînes et les charges. Dans le cas d'un caoutchouc chargé de silice, seul l'effet composite intervient. En effet, la silice fortement polaire ne crée pas de liaisons fortes avec les chaînes du caoutchouc apolaire. Il conclut également que le renforcement d'une gomme de caoutchouc par la silice provient essentiellement d'un réseau secondaire de charges floculées au sein de la matrice élastomère. [Wolff, 96] nous conforte dans cette idée en insistant sur la tendance des charges de silice à former des réseaux secondaires. Il a montré que les charges de silice, qui possèdent par défaut (i.e sans traitement spécifique) de faibles valeurs d'énergie de surface dispersive (faible adsorption des chaînes de caoutchouc) et de fortes énergies de surface spécifique (forte énergie de cohésion entre les charges) formaient un réseau de charges floculées 'résistant'. Le renforcement est ainsi important aux faibles elongations mais disparaît à plus forte elongation ( $\lambda_1 \geq 2$ ) car le réseau de silice se rompt. Cette tendance est encore renforcée par la capacité des charges de silice à former des liaisons hydrogène entre elles.

D'autre part, on constate dans les deux matériaux une influence de la vitesse de sollicitation. La viscoélasticité de la matrice au sens classique - frottement des chaînes, reptation, ...- intervient. Cette influence est plus marquée dans le cas du SBR pur. On suppose que les effets d'endommagement et de plasticité diminuent, relativement par rapport au SBR pur où ces effets n'interviennent pas, les effets viscoélastiques. Les additifs de type plastifiants, probablement présents dans les deux mélanges, peuvent également intervenir sur la dépendance du comportement par rapport à la vitesse de sollicitation.

### Relaxation en traction uniaxiale

Ces procédures d'essais sont explicitées dans le paragraphe 2.1. La Fig. 2.56 présente les résultats obtenus sur les deux matériaux, chargé et pur, pour des elongations de l'ordre de 1.3 et 2.0. On constate que dans les deux cas, la relaxation du matériau chargé est nettement supérieure à celle du matériau non chargé. D'autre part, la relaxation du SBR pur semble dépendre plus fortement de la valeur de l'elongation.



**Figure 2.56** – Essais de relaxation en traction uniaxiale - Comparaison SBR chargé et non chargé – Influence du niveau d'elongation sur la relaxation des contraintes



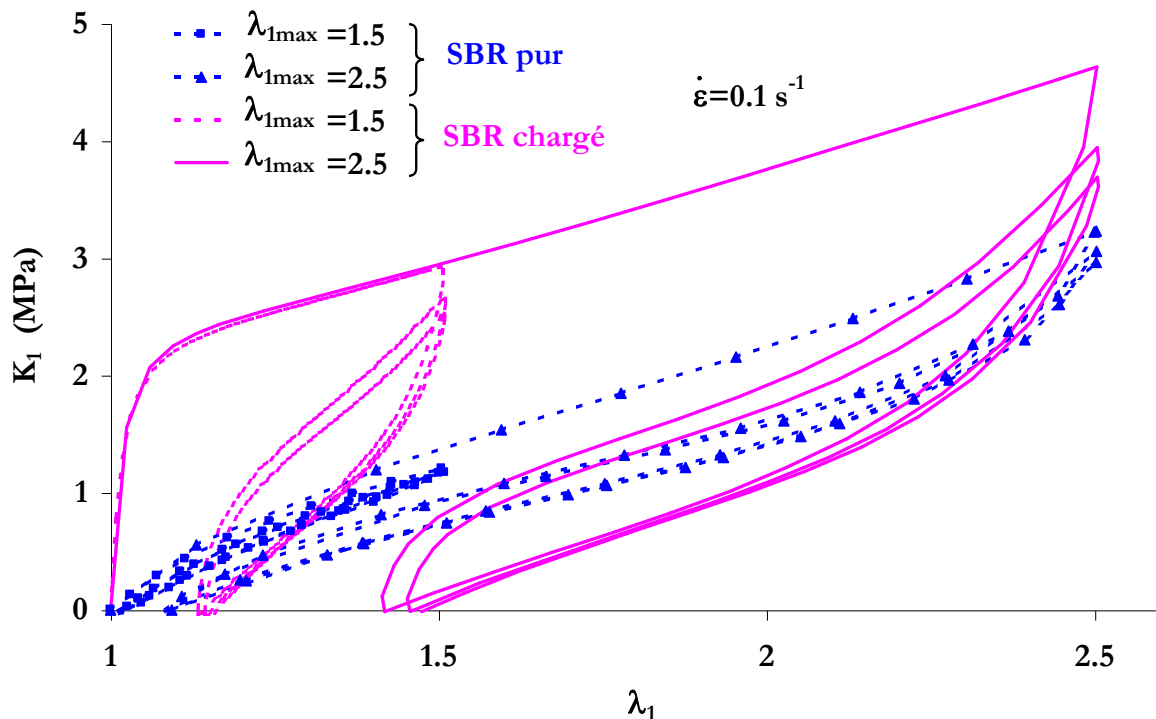
Mullins [1947] a comparé les amplitudes de relaxation de contraintes dans un caoutchouc pur et un caoutchouc chargé de 33 % en poids de noir de carbone (NC), à différentes températures. Il a constaté que la vitesse de relaxation de la contrainte était la même dans le caoutchouc pur, quelle que soit la température. Elle est par contre beaucoup plus importante dans le caoutchouc chargé et augmente avec la température. Il a conclu que la relaxation des contraintes dans le caoutchouc chargé était due en majeure partie à la relaxation ou à la rupture du réseau renforçant discuté dans les paragraphes précédents.

[Hamed, 1989] ou [Clément, 1999] expliquent ce phénomène en considérant la part de caoutchouc lié, c'est à dire immobilisé à la surface des charges. Cette gomme 'liée' présente des temps de relaxation différents de ceux de la gomme pure. La différence observée dans les comportements des SBR pur et chargé provient donc probablement à la fois de la relaxation/destruction du réseau de charges floculées et de la relaxation du caoutchouc lié. La triaxialité des contraintes, localement importante autour des charges de silice, peut également expliquer, partiellement, la diminution de la relaxation.

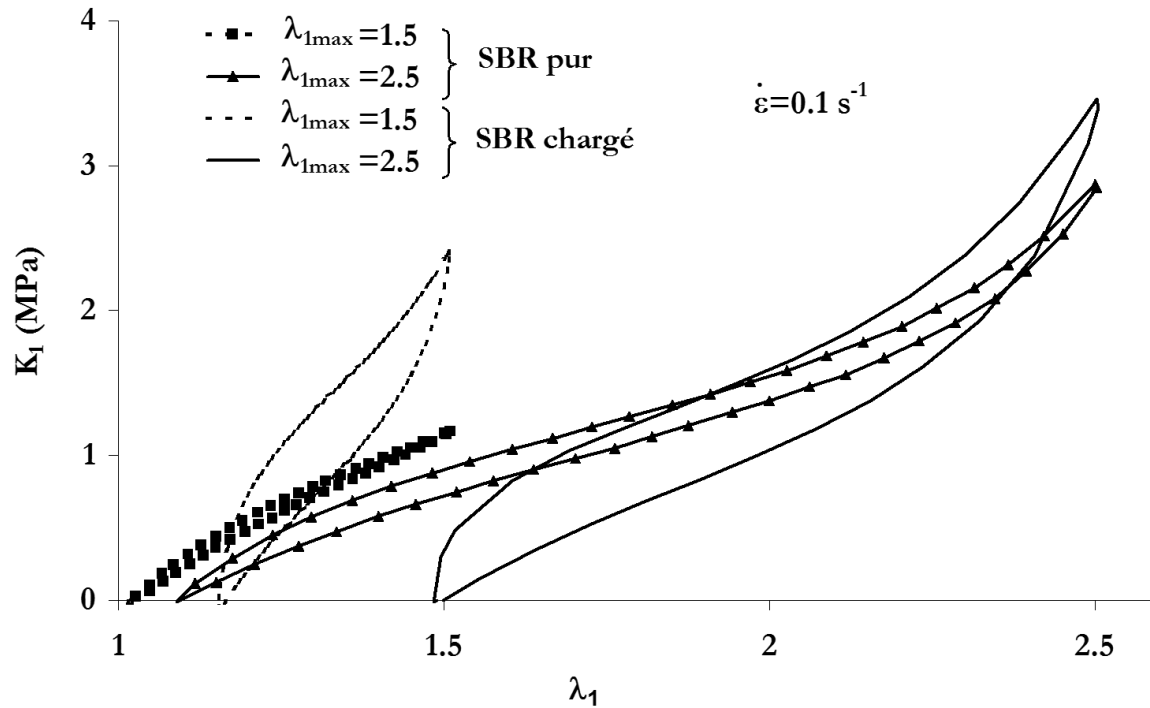
On observe d'autre part que la déformation rémanente à ces essais est nettement plus importante dans le cas du SBR chargé. [Wolff, 1996] écrit que cette déformation rémanente est due à la formation d'un nouveau réseau de silice. Ce réseau remplace le réseau initial du matériau vierge qui a été rompu au cours de l'essai. Le nouveau réseau formé à une certaine elongation, oppose une résistance au retour du matériau dans sa forme initiale. De plus, la rupture des contacts charge/chaîne entraîne la diminution de la force de rappel.

### Traction uniaxiale cyclique

La Fig. 2.57 présente les résultats obtenus sur le SBR chargé et pur, pour des elongations maximales égales à 1.5 et 2.5. Les trois premiers cycles sont représentés. La Fig. 2.58 présente les cinquièmes cycles isolés de ces mêmes essais. Le tableau de la Fig. 2.59 indique les énergies dissipées lors du 1<sup>er</sup> et du 5<sup>ème</sup> cycle pour les quatre essais, les pourcentages de ces énergies par rapport aux énergies fournies lors de la montée en charge du cycle correspondant, les rapports entre les contraintes maximales mesurées lors du 5<sup>ème</sup> cycle du SBR chargé et du SBR pur et les elongations rémanentes à la fin du 1<sup>er</sup> cycle.



**Figure 2.57** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max} = 1.5$  et  $2.5$  – Comparaison SBR chargé et non chargé



**Figure 2.58** – Essais de traction uniaxiale cyclique –  $\lambda_{1\max} = 1.5$  et  $2.5$  5<sup>èmes</sup> cycles – Comparaison SBR chargé et non chargé

$\lambda_1$ max	1.5 (chargé)	1.5 (pur)	2.5 (chargé)	2.5 (pur)
$E$ (J/mm <sup>3</sup> ) - 1 <sup>er</sup> cycle	580	60	3600	940
% $E$ dissipée - 1 <sup>er</sup> cycle	70	16	72	35
$E$ (J/mm <sup>3</sup> ) - 5 <sup>ème</sup> cycle	180	30	530	120
% $E$ dissipée - 5 <sup>ème</sup> cycle	36	9	31	12
$K_1$ 5 <sup>ème</sup> cycle SBR chargé / $K_1$ 5 <sup>ème</sup> cycle SBR pur	2		1.2	
$\lambda_{1\text{rém}}$ 1 <sup>er</sup> cycle	1.13	1.01	1.42	1.08

**Figure 2.59** – Essais de traction uniaxiale cyclique – Tableau récapitulatif des essais

On constate que l'énergie dissipée dans le SBR pur est plus de deux fois inférieure à celle dissipée dans le SBR chargé. D'autre part, les différences entre les contraintes maximales observées lors du 5<sup>ème</sup> cycle sont très supérieures dans le SBR chargé à une élongation de cyclage de 1.5. Elles sont par contre proches à une élongation de cyclage de 2.5. Enfin, l'élongation rémanente à la fin du 1<sup>er</sup> cycle est beaucoup plus faible dans le cas du SBR pur.

Ces observations confirment nos remarques précédentes. Les charges ont une influence importante sur la **dissipation** du premier cycle mais également des cycles suivants. Elles ont donc une influence à la fois sur la dissipation par effet Mullins (que nous considérons comme de l'endommagement), sur les propriétés 'plastiques' (glissement des contacts entre charges, modification de l'organisation interne du matériau, ...) et sur les propriétés viscoélastiques du matériau (frottements charge/charge et charge/chaîne, modification des propriétés de la gomme liée, ...).

Mullins [1969] a étudié l'effet des charges de noir de carbone sur la dissipation. Il attribue l'effet d'hystérésis à un effet « thixotrope », dû à la rupture et à la re-formation de la structure renforçante (le réseau secondaire. Comme nous l'avons déjà souligné, la dépendance de ces phénomènes

d'agglomération/désagglomération à la vitesse de sollicitation est peu connue. Certains auteurs considèrent que ces effets ne sont dépendants que de la sollicitation et peuvent donc être assimilés à de la plasticité [Miehe, 2000], [Kaliske, 1999]. Ils les modélisent comme tels. Dans le cadre de cette étude, nous avons décidé de privilégier l'approche viscoélastique. Nous considérons ces phénomènes viscoélastiques, mais avec des temps caractéristique courts.

Dans le même état d'esprit, Dannenberg [1975] a étudié l'influence de la nature de l'interface charge/gomme sur la dissipation. Il a montré que l'introduction de silanes dans le mélange conduisait à une meilleure dispersion des charges ainsi qu'à une meilleure adhésion de la chaîne polymère sur la charge. Ceci a eu pour conséquence de réduire la viscoélasticité et d'accroître le renforcement.

D'autre part, le **renforcement** par ces charges, encore très visible pour des élongations de cyclage de 1.5, est très atténué pour une élongation de cyclage de 2.5. Ceci confirme les observations de [Wolff, 1996] : le réseau de charges floculée est détruit à une élongation de 2.5. Le renforcement n'est donc plus effectif.

**L'élongation progressive** est probablement due en partie à la dissipation viscoélastique importante dans le SBR chargé et en partie à la non recouvrance de l'état initial du réseau de charges [Wolff, 1996]. Le modèle de Ambacher, Strauss et Kilian [Ambacher et al., 91] attribue la déformation rémanente à une déformation plastique au sein des agglomérats de charges et de gomme occluse. Lors du retour en charge, ces agglomérats rentrent en compression. Lorsque l'équilibre des contraintes est atteint (contrainte globale nulle) au cours du retour en charge, la déformation plastique engendre une déformation rémanente globale au sein du matériau.

---

## Conclusion

*Si l'on suppose que les matrices caoutchoutiques des deux SBR chargé et pur sont similaires, c'est à dire que les macromolécules ont la même répartition de longueur de chaînes, le même taux d'enchevêtrement, on peut conclure que :*

- *Le renforcement par les charges de silice aux faibles élongations (ou effet Payne) est très important puisque le rapport des modules tangents à l'origine entre gomme pure et gomme chargée est égal à 20.*
  - *Le renforcement par les charges de silice aux élongations de travail (entre 1 et 2.5) sous chargement cyclique devient quasiment nul pour une élongation de 2.5. [Wolff, 1996] explique cet effet par la destruction complète du réseau secondaire de charges flocuées.*
  - *L'endommagement ou effet Mullins est associé à la présence des charges.*
  - *La dissipation qui se produit en régime stabilisé est due partiellement à la viscoélasticité de la gomme (modifiée par la présence des charges) et partiellement à la rupture/reformation du réseau de charges flocuées. Ce dernier phénomène peut être considéré comme indépendant du temps et donc 'plastique'. Nous le considérons comme viscoélastique, mais faisant intervenir des temps caractéristiques courts.*
  - *Les charges ont une influence sur la déformation rémanente après chargement. Le réseau de silice peut avoir retrouvé une conformation différente après l'essai [Wolff, 1996]. Les agglomérats peuvent également avoir subi une déformation plastique au cours du chargement [Ambacher et al., 1991].*
-

### 2.4.3 – Etude de l'influence des charges sur l'endommagement

L'influence des charges de silice sur le comportement mécanique du SBR A a été mis en évidence. Nous nous interrogeons désormais à propos de leur influence sur l'endommagement.

Dans un premier temps, nous nous focalisons sur l'adoucissement des contraintes au cours du premier chargement : sa recouvrance, sa dépendance par rapport à la vitesse de sollicitation, son effet dans les directions transverses.

Dans un second temps, le matériau est sollicité in situ. L'endommagement est alors 'physiquement' observé.

#### 2.4.3.1 – Mise en évidence de l'endommagement sur le SBR chargé

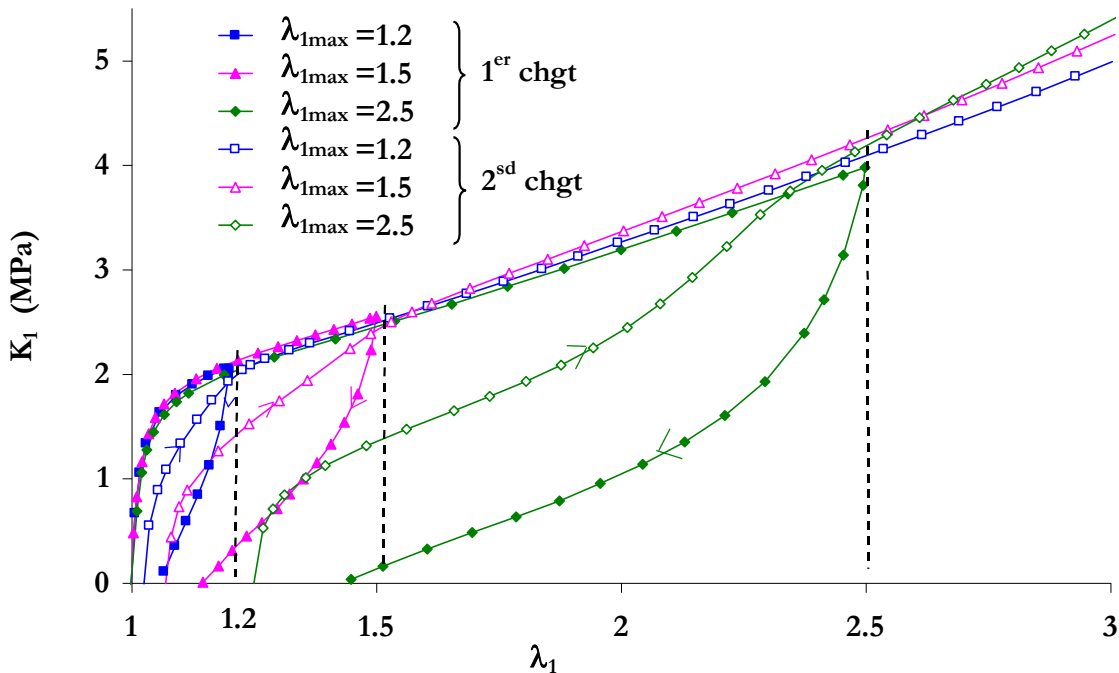
Les essais précédents montrent clairement l'influence des charges de silice sur les propriétés mécaniques du SBR chargé. Cependant, une question subsiste : les charges créent-elles de l'endommagement au sein du matériau ou bien tous ces effets sont-ils réversibles?

La difficulté essentielle est, dans notre cas, de découpler les effets de vitesse de déformation ou effets viscoélastiques (les propriétés sont recouvrables dans le temps) des effets d'endommagement (les effets deviennent permanents).

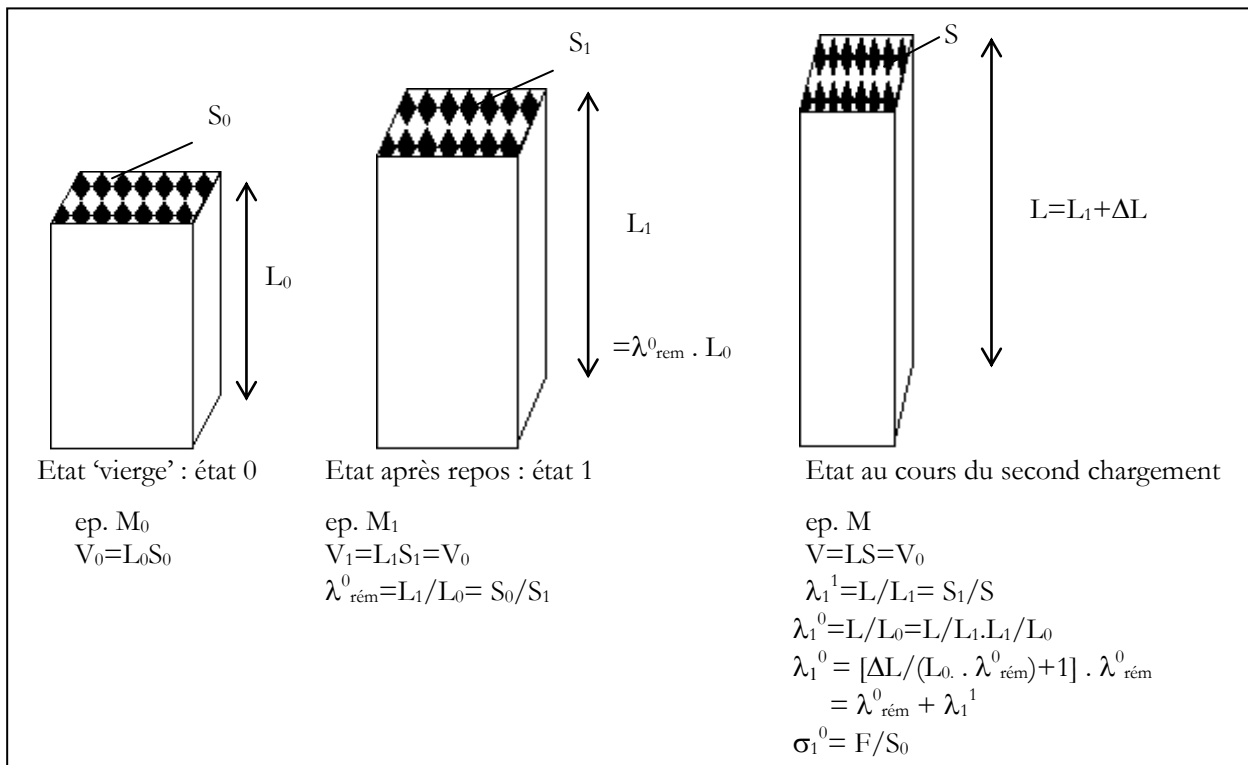
Pour répondre à cette question nous avons effectué des essais de traction uniaxiale successifs avec des temps de repos de 48 heures et 3 mois. L'anisotropie et la dépendance par rapport à la vitesse de chargement de l'adoucissement sont également étudiées.

#### Influence de l'élongation sur l'endommagement

Un échantillon de SBR est chargé jusqu'à une élongation fixée ( $\lambda_1=1.2$ ,  $1.5$  et  $2.5$ ) à une vitesse de déplacement de traverse de  $50 \text{ mm/min}$  (vitesse de déformation de  $0.01\text{s}^{-1}$ ). Il est ensuite relâché à contrainte nulle pendant 48 heures, et étiré à nouveau. Les propriétés viscoélastiques sont supposées quasiment recouvrées pendant cette période. Ces essais sont inspirés de [Mullins, 1947]. Les résultats sont rapportés sur la Fig. 2.60.



**Figure 2.60** – SBR A – Essais de traction uniaxiale - Influence d'un préchargement – Recouvrance de 48 heures



**Figure 2.61**– Détail du calcul des elongations et contraintes du 2<sup>ème</sup> chargement par rapport au 1<sup>er</sup> chargement

*Remarque :*

Les éprouvettes n'ont bien évidemment pas flué sous chargement nul tout en étant montées sur la machine d'essais. L'encadré de la Fig. 2.61 détaille les calculs des contraintes et les déformations par rapport à l'état vierge (état 0) d'après les contraintes et les déformations mesurées au cours de l'essai par rapport à l'état après repos de l'éprouvette (état 1). L'hypothèse de déformation isovolume est utilisée (nous avons vu qu'à charge nulle, elle était respectée). Les valeurs connues ou mesurables sont les sections de l'éprouvette aux états 0 et 1,  $S_0$  et  $S_1$ , la distance initiale entre les deux couteaux de l'extensomètre  $L_0$  (20mm) et l'allongement mesuré par l'extensomètre  $\Delta L$ .

Les différences de contraintes observées entre la première et la seconde montée en charge montrent clairement qu'un endommagement a lieu lors de la première montée en charge. Il est effectif jusqu'à l'élongation maximale atteinte lors de la première montée en charge. On conclut de façon simple que l'endommagement (adoucissement des contraintes aux élongations importantes) dépend de l'élongation maximale subie par le matériau au cours de son histoire de déformation.

Mullins [1947] a étudié l'influence d'élongations répétées. Il a observé que des élongations postérieures ne conduisaient qu'à une variation faible des propriétés mécaniques (modules).

D'autre part, le module tangent à l'origine apparaît identique lors des montées en charge successives. Ceci nous conduit à penser que les phénomènes associés à la destruction du renforcement aux faibles élongations sont renversables (effet Payne). Il serait intéressant, pour vérifier cette hypothèse, de mener des essais dynamiques (DMTA, US), avec une amplitude de sollicitation faible, sur le matériau vierge et sur le matériau pré-chargé.

Enfin, on note que la moitié environ de la déformation rémanente à la fin du premier cycle est recouvrée au cours des 48 heures de recouvrance à force nulle. La seconde moitié peut alors être supposée permanente, et donc d'origine plastique [Ambacher et al., 1991].

Le même essai a été effectué en chargeant une éprouvette jusqu'à une élongation de 2.0, mais en laissant l'échantillon recouvrer pendant 3 mois. La Fig. 2.62 présente les résultats obtenus. Les conclusions sont identiques : les contraintes mesurées lors de la deuxième montée en charge sont très inférieures à celles

mesurées lors de la seconde montée en charge et la déformation rémanente à la fin du premier cycle est recouvrée de moitié environ.

La Fig. 2.63 présente l'ensemble des résultats du paragraphe en utilisant des contraintes et des déformations normées. On appelle contrainte normée la contrainte de l'essai divisée par la contrainte maximale obtenue lors du 1<sup>er</sup> chargement et déformation normée la déformation nominale  $(\lambda_1 - 1)$  divisée par la déformation maximale obtenue lors de la 1<sup>ère</sup> montée en charge. On constate que les déformations rémanentes normées après le premier cycle et après la recouvrance sont superposées. Les contraintes normées sont également superposées au cours de la 2<sup>ème</sup> montée en charge lorsque la déformation atteinte est celle de la 1<sup>ère</sup> montée en charge. On confirme donc d'une part que la recouvrance des contraintes et de la déformation rémanente est quasiment 'achevée' après 48 heures puisqu'elle est la même que celle observée après 3 mois de recouvrance. La moitié de la déformation progressive est donc permanente. D'autre part on observe que l'endommagement est fonction de la plus grande déformation vue par le matériau.

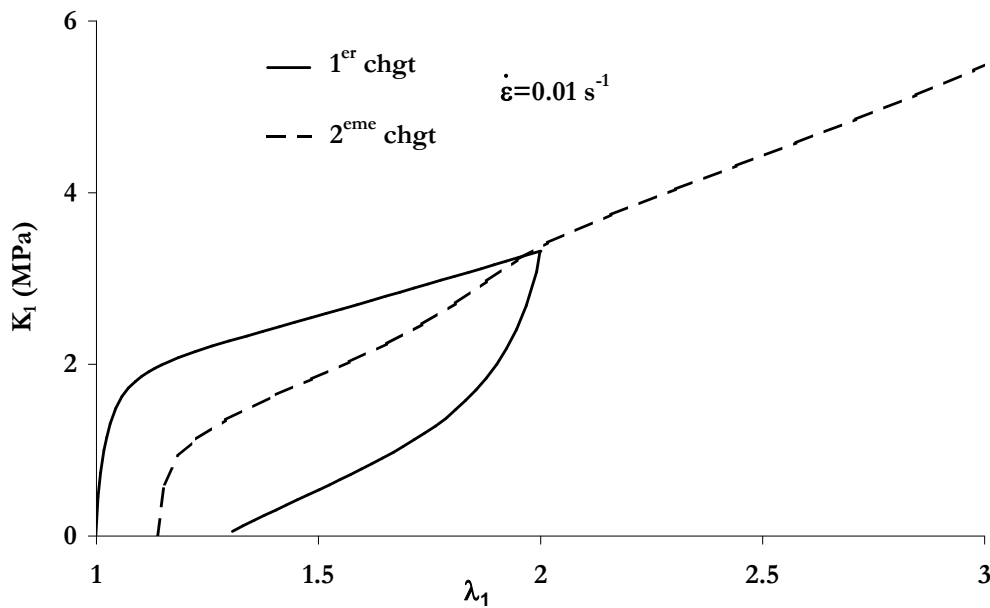


Figure 2.62 – SBR4 – Essai de traction uniaxiale - Influence d'un préchargement – Recouvrance de 3 mois

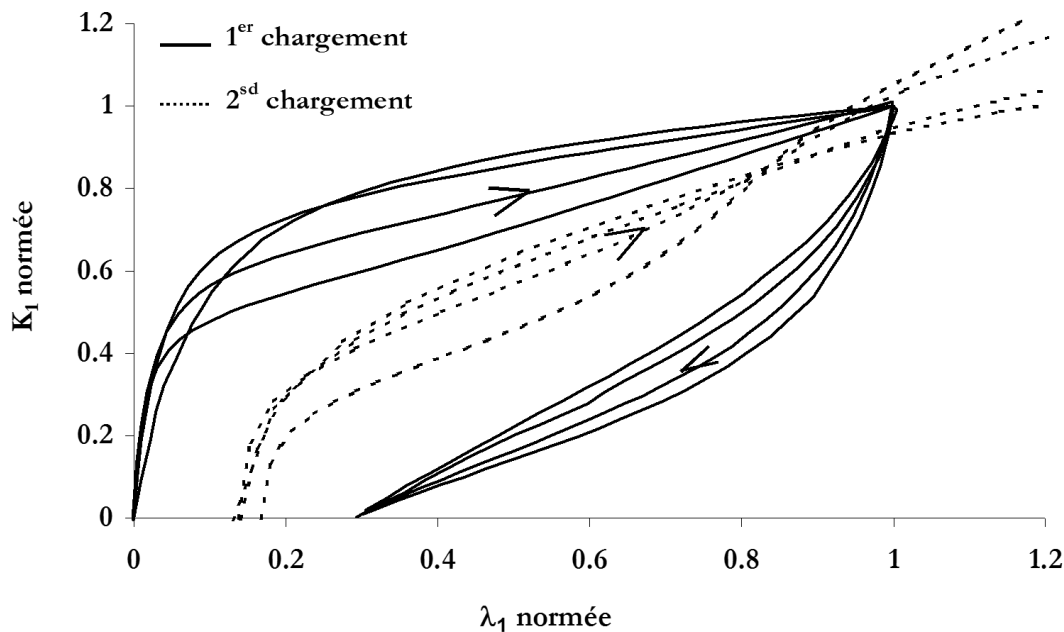
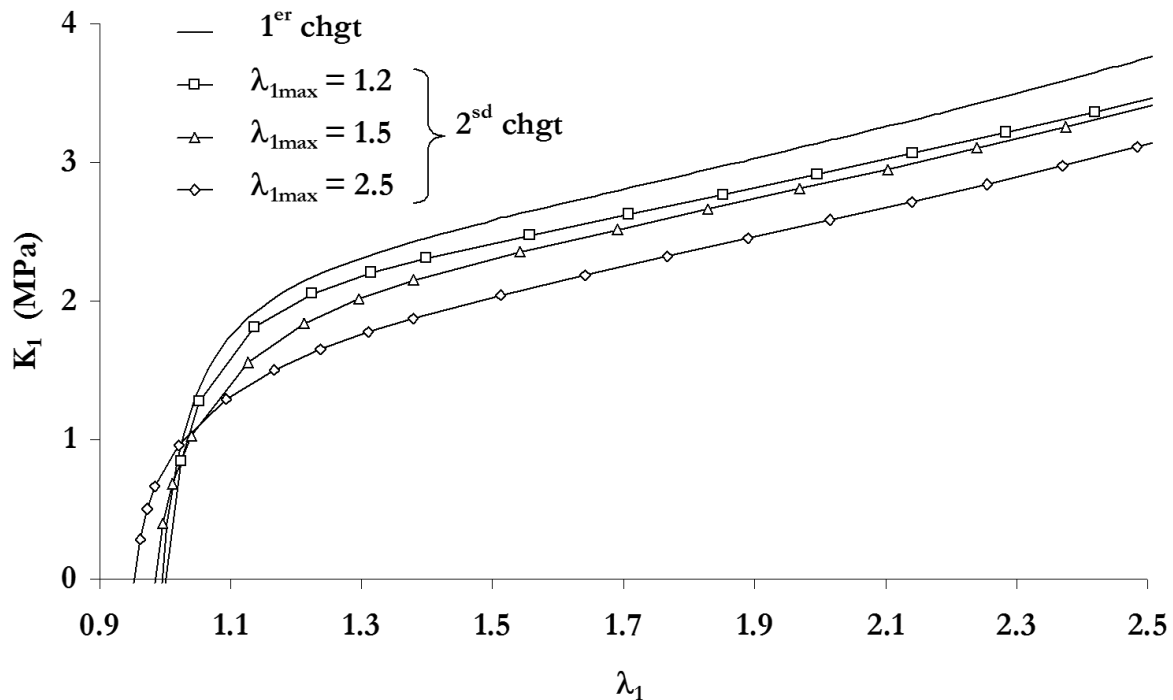


Figure 2.63 – SBR4 – Essais de traction uniaxiale - Influence d'un préchargement – Contrainte et élongation normalisées - Recouvrance de 48 heures et 3 mois

## Influence de la direction de chargement

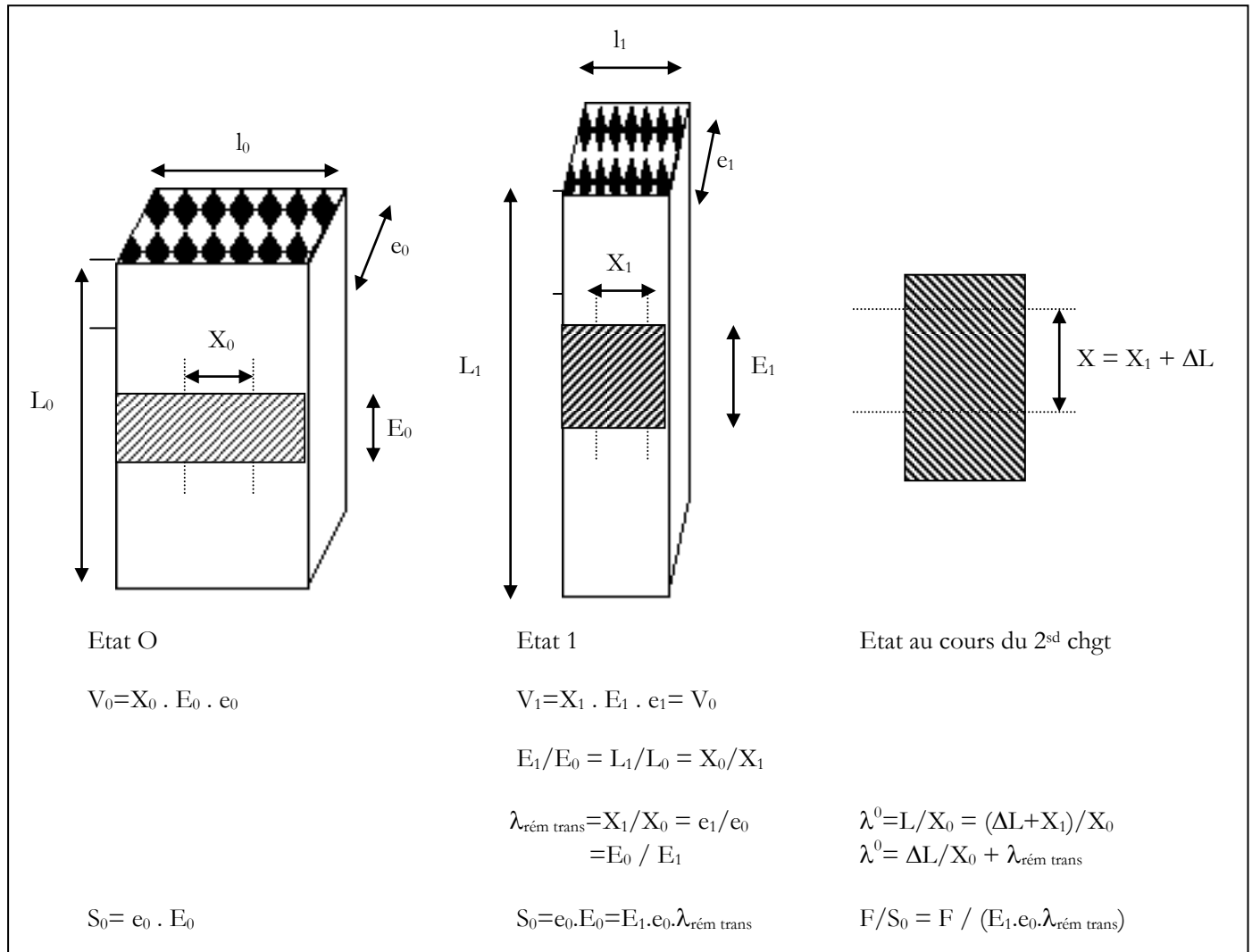
Des éprouvettes larges sont étirées à l'élongation voulue et ramenées à force nulle pendant 48 heures. Des bandes de matériau sont alors découpées transversalement dans les éprouvettes pré-chargées et sont étirées en traction uniaxiale. Trois éprouvettes sont pré-chargées aux mêmes élongations que précédemment : 1.2, 1.5, 2.5. Les résultats des seconds chargements sont présentés sur la Fig. 2.64. La courbe de premier chargement indiquée sur le graphe est issue de la sollicitation d'une éprouvette de SBR dans le sens perpendiculaire au calandrage, c'est-à-dire selon la direction transverse.



**Figure 2.64** – SBR A – Influence d'un préchargement sur le comportement dans la direction transverse – Recouvrance de 48 heures

### Remarque :

Un calcul est nécessaire pour connaître les élongations  $\lambda^0$  et les contraintes  $F/S_0$  par rapport à l'état 0. La Fig. 2.65 montre la façon dont sont menés ces calculs. L'hypothèse de déformation isovolume est utilisée.  $X_0$  et  $E_0$  sont les dimensions qu'aurait l'éprouvette testée lors du second chargement à l'état 0.  $X_1$  et  $E_1$  seraient ses dimensions après le repos consécutif au 1<sup>er</sup> chargement. Les valeurs connues et mesurables sont  $X_0$ , la distance initiale entre les couteaux : 12mm,  $e_0$  et  $e_1$  les épaisseurs de l'éprouvettes à l'état 0 et à l'état 1, et  $\Delta L$  l'allongement mesuré par l'extensomètre au cours de la seconde montée en charge. Ces calculs conduisent à une élongation transverse rémanente inférieure à 1. En effet, l'éprouvette se contracte dans la direction transverse.



**Figure 2.65** – Détail du calcul des élongations et contraintes du 2<sup>ème</sup> chargement par rapport au 1<sup>er</sup> chargement – Cas d'une 2<sup>ème</sup> traction dans la direction transverse

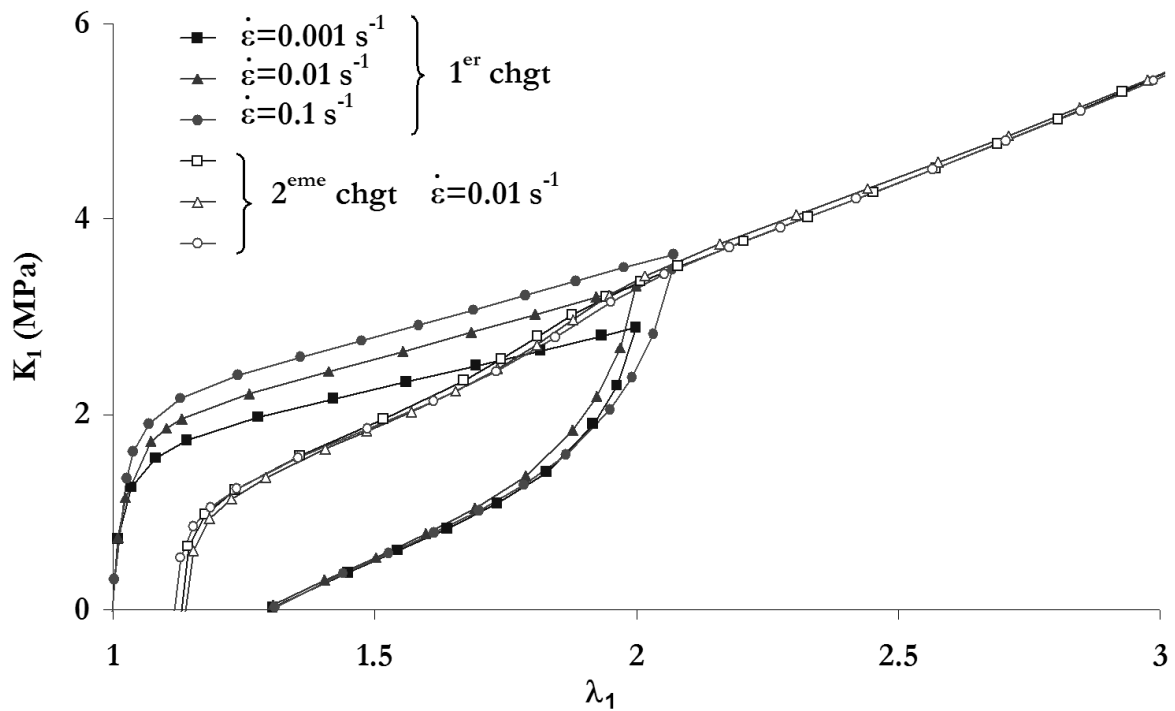
On constate que plus l'élongation du premier chargement augmente, plus l'éprouvette transverse est souple. Autrement dit, plus l'élongation vue par le matériau est importante, plus l'adoucissement est important. Dans ce cas, l'éprouvette ne rejoint pas la courbe de premier chargement puisque celui-ci a eu lieu dans la direction perpendiculaire.

En conclusion, l'endommagement n'est pas isotrope, mais il a une incidence sur le comportement dans les autres directions.

### ***Influence de la vitesse de déformations sur l'endommagement***

Trois éprouvettes sont étirées avec des vitesses de déformations respectivement égales à 0.001, 0.01 et 0.1 s<sup>-1</sup>. Elles sont ensuite laissées au repos (recouvrance partielle de trois mois) puis ré-étirées dans la même direction, à la même vitesse – Fig. 2.66 -. On note tout d'abord que les élongations atteintes lors du pré-chargement ne sont pas rigoureusement identiques. Ceci est dû à un mauvais asservissement au pilotage de la machine. Le résultat est cependant probant : les trois courbes de seconde traction sont superposées. Ceci semble indiquer que dans la gamme de vitesse de chargement explorée, cette dernière n'a pas d'influence sur l'endommagement.





**Figure 2.66** – SBR A – Essais de traction uniaxiale - Influence de la vitesse du préchargement – Recouvrance de 3 mois

## Conclusion

Ces essais permettent de conclure que :

- L'adoucissement des contraintes est effectif et permanent à l'échelle de temps considéré dans ce travail (quelques mois)
- Il augmente avec la sollicitation
- Il est indépendant de la vitesse de sollicitation
- Il a une influence sur le comportement du matériau dans le sens transverse. Il est toutefois moins prononcé.

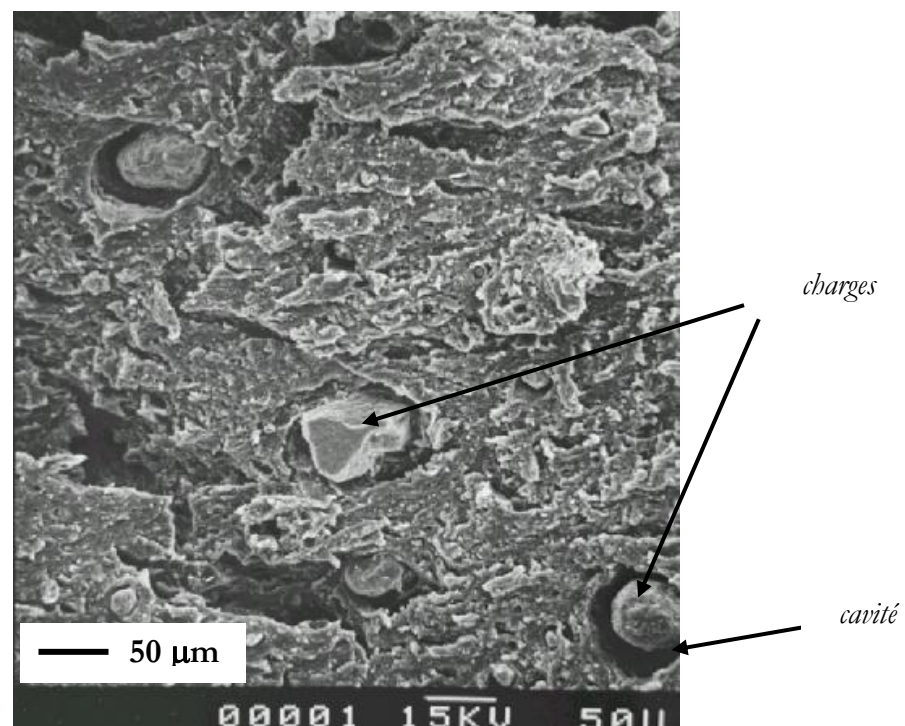
Nous constatons également que environ la moitié de la déformation progressive observé avec un cycle de chargement est permanente. Cette déformation permanente ou 'plastique' est dépendante de l'amplitude de la sollicitation, et indépendante de la vitesse de sollicitation.

### ***2.4.3.2 – Observation de l'endommagement au MEB - Essais de traction in situ***

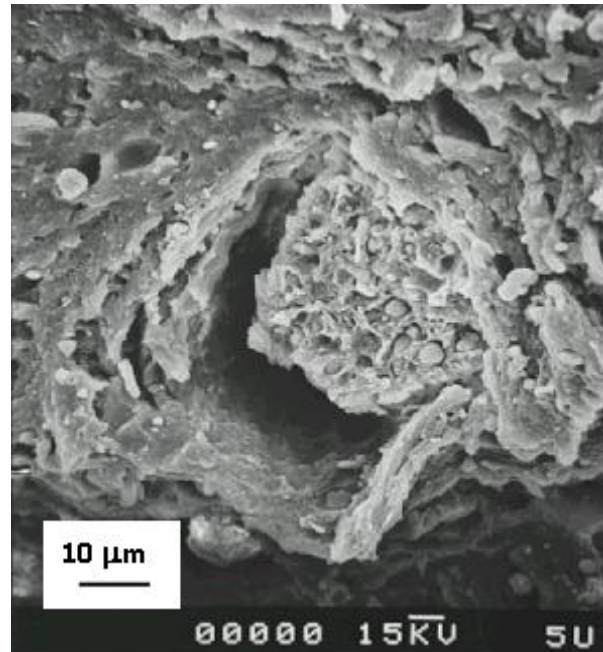
Les effets des charges de silice sur l'endommagement et sur la déformation volumique ont été mis en évidence de façon indirecte par des essais mécaniques. Les observations qui suivent confortent ces conclusions.

#### ***Observation d'une éprouvette rompue lors d'un essai de traction uniaxiale monotone***

Le faciès de rupture d'une éprouvette haltère rompue en traction uniaxiale monotone est observé. Les photos des Fig. 2.67 et 2.68 mettent en évidence que les charges ont une influence sur la rupture, notamment à cause des cavités qui se forment autour d'elles par décohesion. Ces cavités sont encore visibles sur les photos bien que l'échantillon ne soit pas sous tension. On imagine les vides qu'engendrent ces cavités dans le matériau sous tension. La rupture peut correspondre à la coalescence de ces cavités.

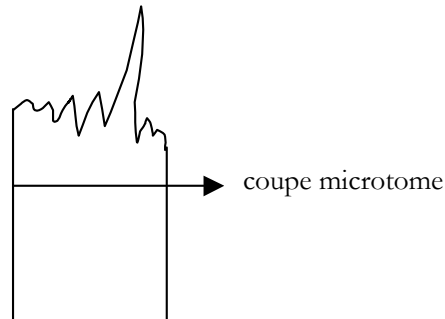


**Figure 2.67** – SBR4 – *Faciès d'une éprouvette rompue en traction uniaxiale – Observation des cavités formées autour des charges de silice*

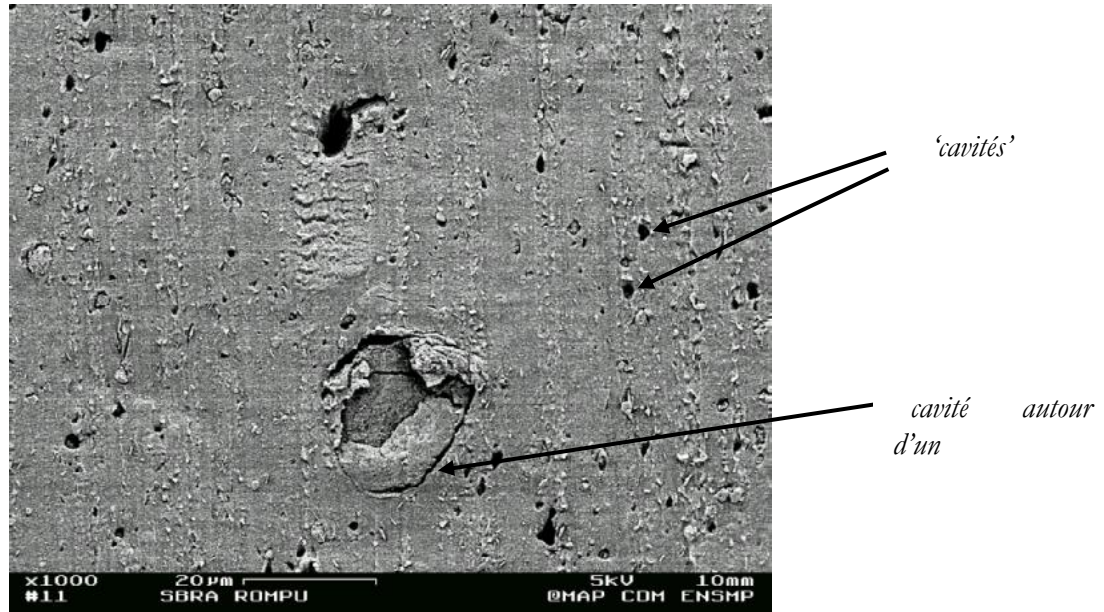


**Figure 2.68** – SBR4 – Faciès d’une éprouvette rompue en traction uniaxiale

La photo de la Fig. 2.70 est prise à partir d’une surface plane obtenue par coupe au microtome, à  $-65^{\circ}\text{C}$ , d’une d’éprouvette rompue en traction uniaxiale (schéma de la Fig. 2.69). Les cavités apparaissent autour des charges de silice. Des ‘trous’ ou cavités (qui n’apparaissent dans le matériau vierge) sont également visibles. Le matériau est endommagé dans tout le volume utile.



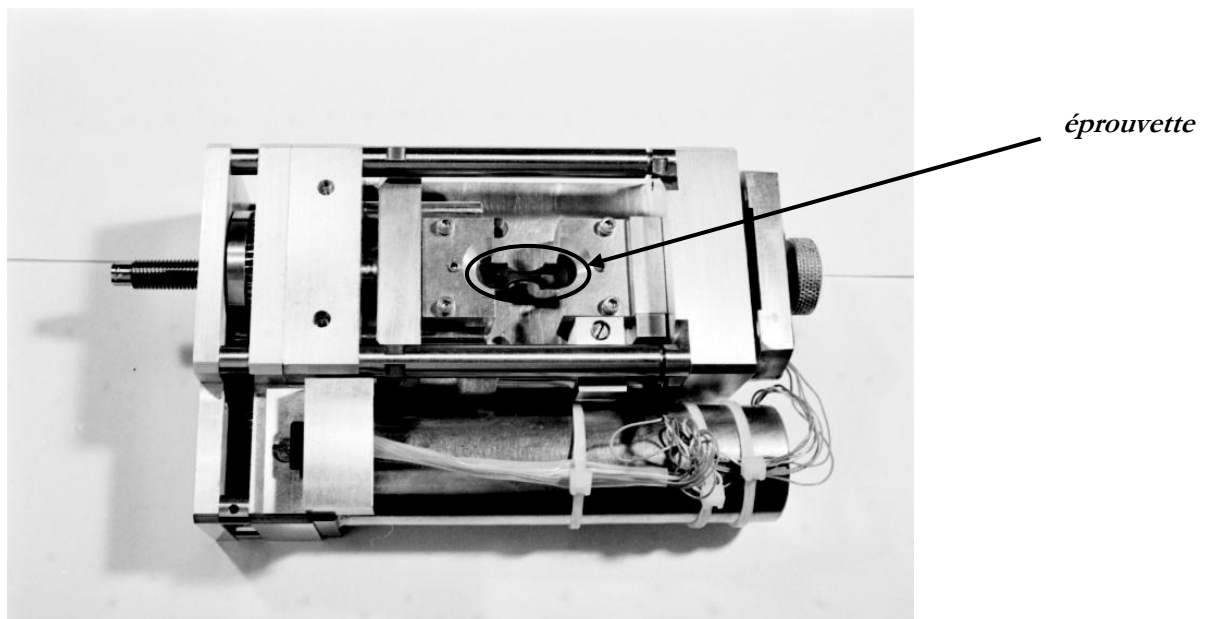
**Figure 2.69** – SBR4 – Schéma de la coupe d’une éprouvette rompue en traction uniaxiale



**Figure 2.70** – SBRA – Coupe d'une éprouvette rompue en traction uniaxiale – Observation de l'endommagement

### **Observation d'une éprouvette sollicitée in situ**

Un dispositif miniature de traction in situ, photographié sur la Fig. 2.71, est monté dans la chambre du MEB. Il permet d'observer les éprouvettes tout en les étirant. Les éprouvettes de SBR, mauvais conducteur électrique, sont recouvertes d'un dépôt d'or-palladium épais de plusieurs centaines d'angströms. Ce dépôt a l'inconvénient de craqueler aux grandes déformations. Il permet toutefois d'avoir de situer rapidement les zones de cavitation : le matériau 'charge' car ces zones ne sont pas métallisées (la qualité des photos en est par conséquent rendue médiocre). Ce dépôt permet également de repérer les zones qui relaxent (un 'bourrelet de dépôt craquelé' apparaît). Un autre dispositif astucieux a été utilisé lors du dernier essai : il permet de sortir l'éprouvette de la platine sans modifier l'élongation subie par l'éprouvette [Saintier, 1999]. La qualité des photos est meilleure puisque l'échantillon peut être re-métallisé en cours d'essai.



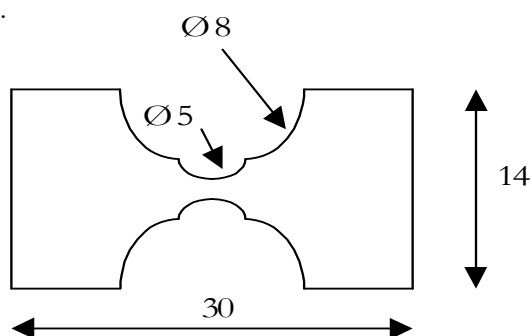
**Figure 2.71** – Platine de traction in situ



Notons que la plupart des photos sont prises à partir d'une image constituée avec les signaux des électrons rétrodiffusés. Ces images sont souvent de meilleure qualité, car les zones chargées (électriquement) apparaissent moins perturbées et les contrastes plus nets.

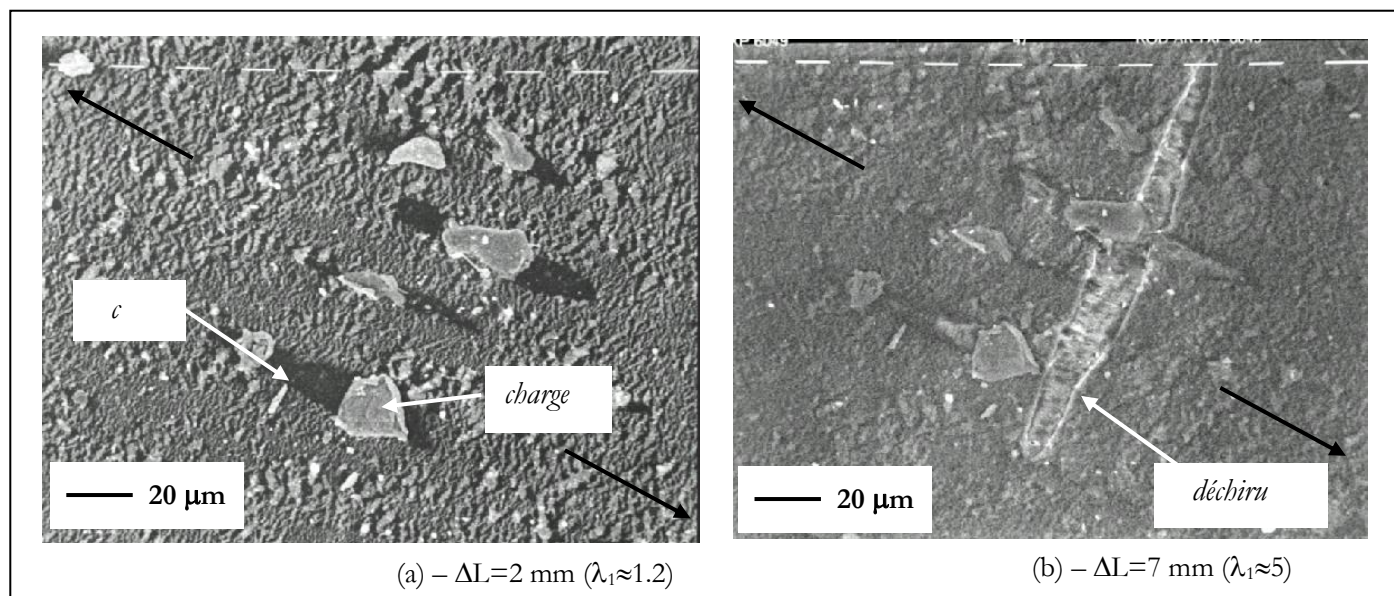
D'autre part, les déplacements de platine ou les élongations qui sont indiqués dans ce paragraphe donnent un ordre de grandeur de la déformation à laquelle apparaissent les phénomènes. Ces valeurs ne correspondent toutefois pas rigoureusement à l'apparition du phénomène car le faisceau d'électrons peut provoquer (et anticiper donc) l'apparition de l'endommagement (cavitation et/ou fissuration).

Les premières éprouvettes testées in situ ont été poinçonnées dans des plaques de SBR. C'est donc leur **surface** que l'on observe. La Fig. 2.72 présente le schéma de telles éprouvettes. Leur dimensions sont adaptées à celles de la platine.



**Figure 2.72** – Schéma de l'éprouvette de traction in situ

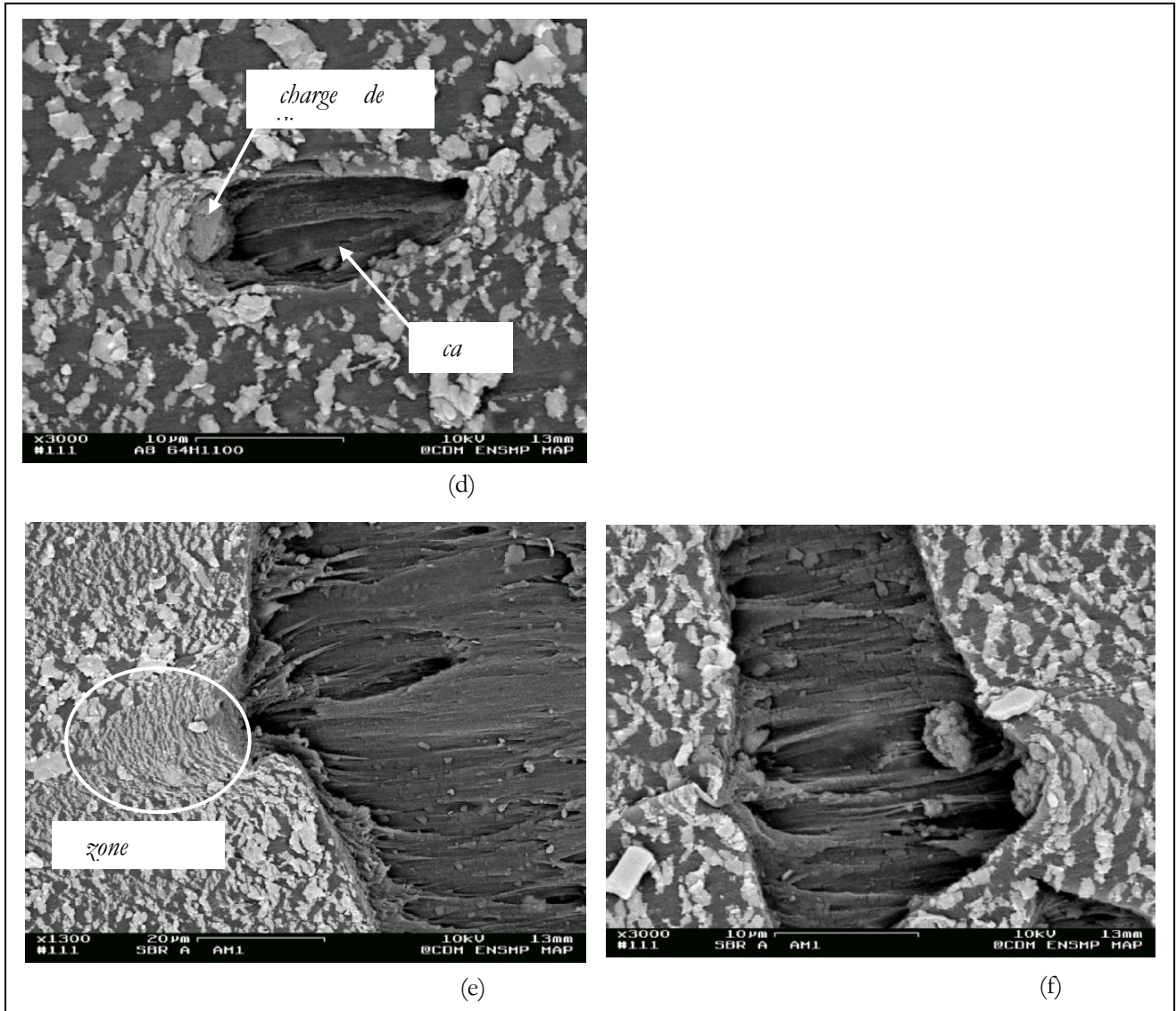
L'encadré de la Fig. 2.73 montre quelques clichés effectués sur ce type d'éprouvette (observation de la surface des plaques). La photo (a) est prise pour un déplacement de platine de 2 mm. Un calcul par éléments finis indique une élongation correspondante de 1.2 dans la zone centrale de l'éprouvette. On observe des cavités formées par décohesion à l'interface des charges et de la matrice. Ces charges contiennent principalement du carbone et de l'oxygène mais également 1 à 10% en poids de silice et 1 à 2 % d'aluminium, calcium, zinc. On suppose que ces charges n'ont pas été ajoutées volontairement au mélange. Les fissures du dépôt sont visibles. La cavitation apparaît sur l'ensemble de la zone utile. Le faisceau d'électrons influence peu ce phénomène. La photo (b) représente la même zone pour un déplacement de 7 mm ( $\lambda_1 \approx 5$ ). Une déchirure relie les deux cavités. Il semble que dans ce cas, le faisceau favorise (donc anticipe) l'apparition de ces déchirures car elles ne sont pas présentes sur l'ensemble de la surface.



**Figure 2.73** – Observation de la surface d'une éprouvette de traction in situ prélevée dans une plaque

L'éprouvette est ensuite ré-étirée à un déplacement de l'ordre de 16 mm (un montage de tension statique est utilisé) et re-métallisée. Les clichés (d), (e), et (f) font apparaître des cavités formées autour des charges

de silice - encadré de la Fig. 2.74 -. La nature des charges est vérifiée par des analyses par rayons X. Les cavités relaxées sont visibles par des 'bourellets de dépôt fissuré' – cliché (d) et (e) -. Des craquelures se développent à partir de ces cavités – cliché (e) et (f) -. Elles laissent apparaître des agrégats de silice et des 'filaments' de caoutchouc.

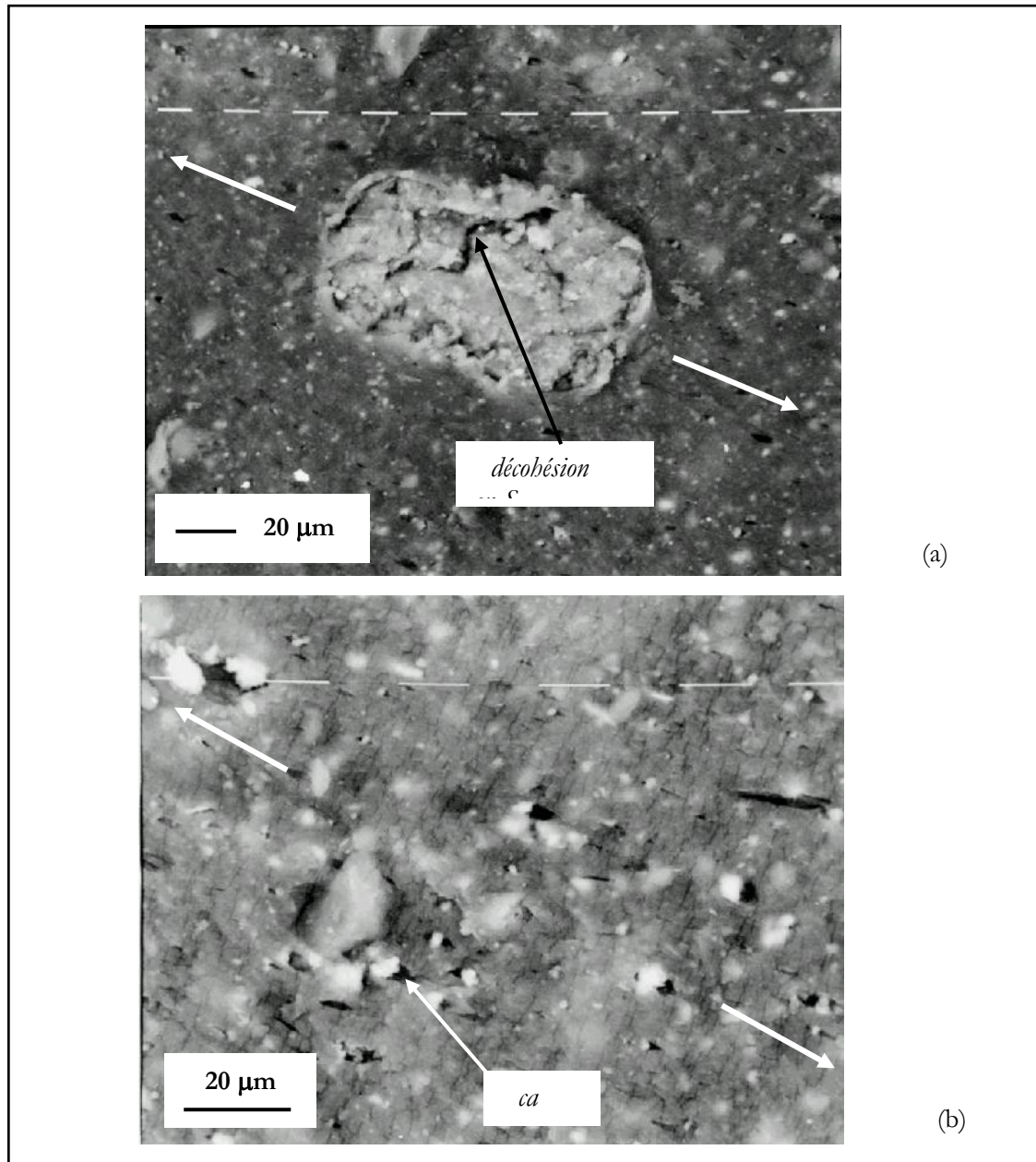


**Figure 2.74** – Observation de la surface d'une éprouvette de traction *in situ* prélevée dans une plaque –  $\Delta L = 16\text{mm}$

Il s'agit maintenant d'observer l'influence des charges de silice réellement présentes dans le volume du matériau. Des éprouvettes ont également été découpées dans **l'épaisseur de la plaque**. On obtient alors des bandes de largeur l'épaisseur de la plaque (3 mm). Ces bandes sont collées sur des mors et placées sur la platine de traction. La zone utile présente une longueur de 8 mm environ. Ces observations sont plus représentatives des phénomènes qui apparaissent au sein des caoutchoucs :

- $\lambda_1 \approx 1.1$  – Fig. 2.75 -.

Dès le début de l'essai, les agglomérats de silice semblent présenter une décohésion 'intra-granulaire' en forme de S - cliché (a) -. Des cavités naissent autour des agrégats de silice - cliché (b) -.



**Figure 2.75** –Eprouvette de traction *in situ* prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 1.1$  – Observation de décohésion au sein des agglomérats de silice et de cavitation par décohésion autour des agrégats.

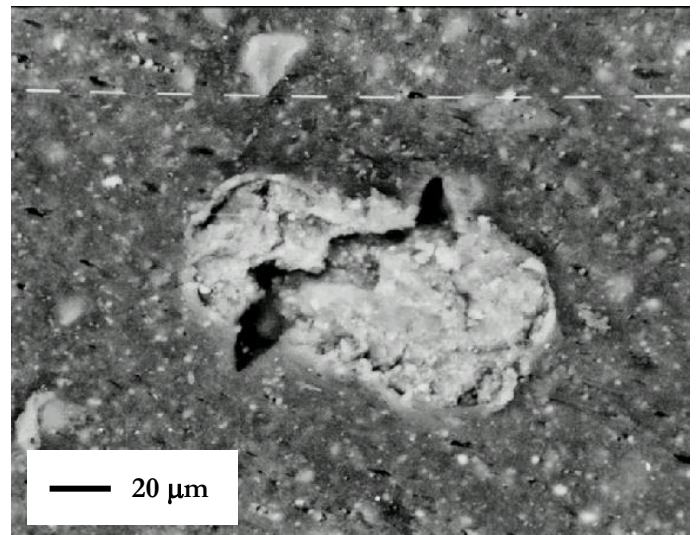
- $\lambda_1 \approx 1.5$  – Fig. 2.76 -

Le cliché (c) montre des décohésions à l'interface entre des charges et la gomme. Ces charges sont celles que l'on observait en surface. Elles sont plus rares à l'intérieur du matériau. La décohésion 'intra-granulaire' observée naissante sur le cliché 2.75 (a) apparaît clairement à cette elongation - cliché (d) -. Une fissure est amorcée sur cette décohésion et se propage dans la matrice. Le cliché (e) montre ce même type de décohésion entre les agrégats, mais dans tout l'agglomérat. Le cliché (f) détaille l'agglomérat. Les 'filaments' de gomme qui relient les agrégats pour donner une cohésion à l'agglomérat apparaissent clairement. Ils subissent une elongation importante. Le cliché (g) montre une cavitation par décohésion autour d'un agglomérat compact de silice.

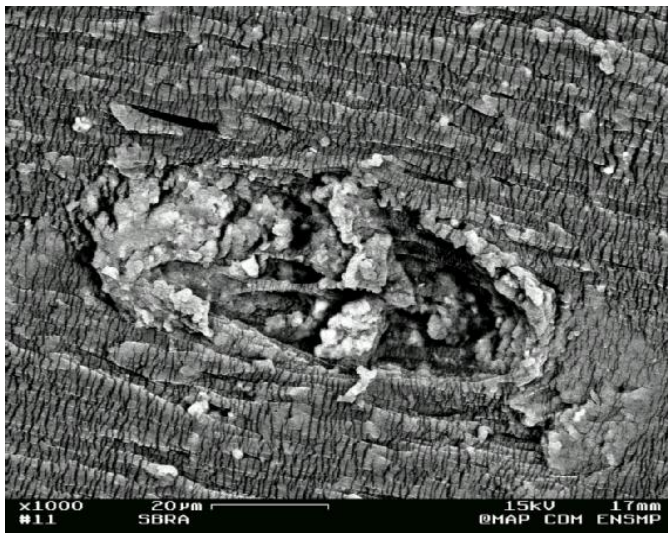




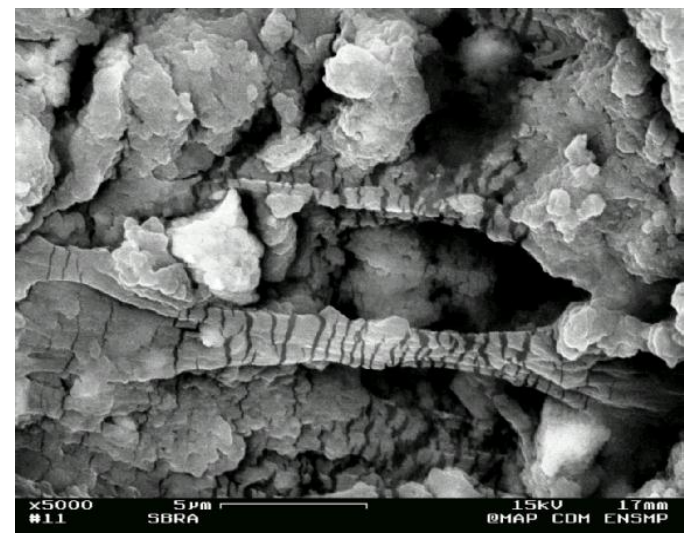
(c)



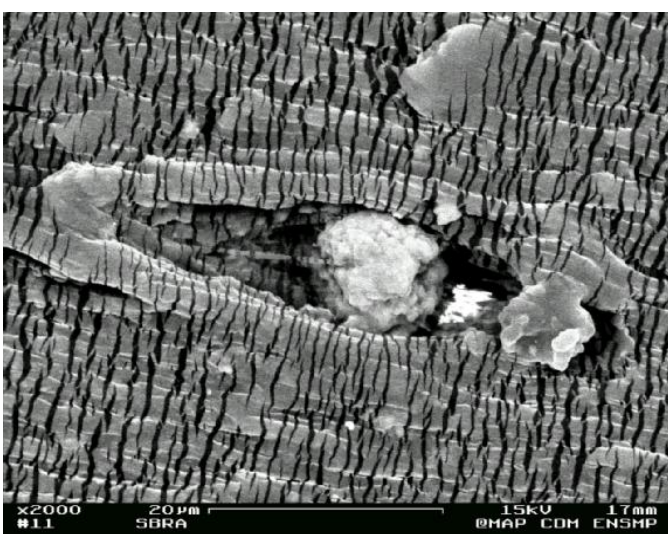
(d)



(e)



(f)



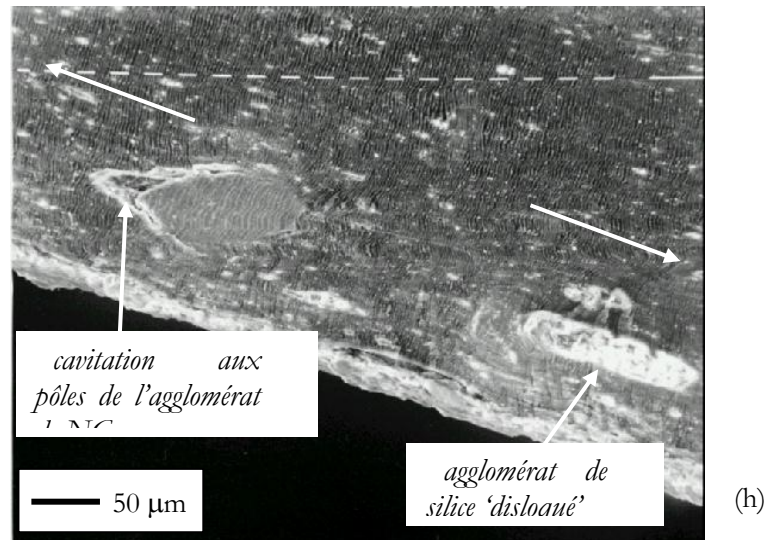
(g)

Figure 2.76 – Eprouvette de traction *in situ* prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 1.5$



- $\lambda_1 \approx 2$  – Fig. 2.77 –

Un agglomérat de silice apparaît ‘disloqué’ par décohesion . Un agglomérat de noir de carbone (NC) présente une décohesion à l’un de ses pôles. L’agglomérat de NC présente une bonne cohésion interne puisqu’il n’est pas disloqué. D’autre part, ces observations montrent clairement qu’il est source d’endommagement pour des elongations très supérieures à celles qui correspondent à l’endommagement par les charges de silice. [Saintier, 1999] observe l’endommagement en fatigue de caoutchouc naturel chargé de noir de carbone. Le mécanisme d’initiation qu’il propose est : cavitation dans la gomme, aux pôles de la charge, cavitation par décohesion à partir des cavités formées, initiation de la fissure sur ce défaut. Ce mécanisme semble avoir lieu dans le cas de nos agglomérats de noir de carbone.



**Figure 2.77**—Eprouvette de traction *in situ* prélevée dans la tranche d’une plaque –  $\lambda_1 \approx 2$

- $\lambda_1 \approx 3$  – Fig. 2.78 –

La photo (i) représente la charge de silice déjà observée sur les clichés des Fig. 2.75(a) et 2.76(d). La fissure s’est propagée. L’agglomérat est coupé en deux. Le cliché (j) illustre le même phénomène. L’agglomérat ‘disloqué’, présenté sur la figure précédente, est également à l’origine de l’apparition d’une fissure - cliché (k) -. Les agrégats (de taille 1  $\mu\text{m}$ ) apparaissent en grand nombre dans les fissures, comme l’illustre le cliché (l). Le NC est source de cavitation dans la matrice. Ceci prouve sa bonne cohésion avec la matrice – cliché (m) -.

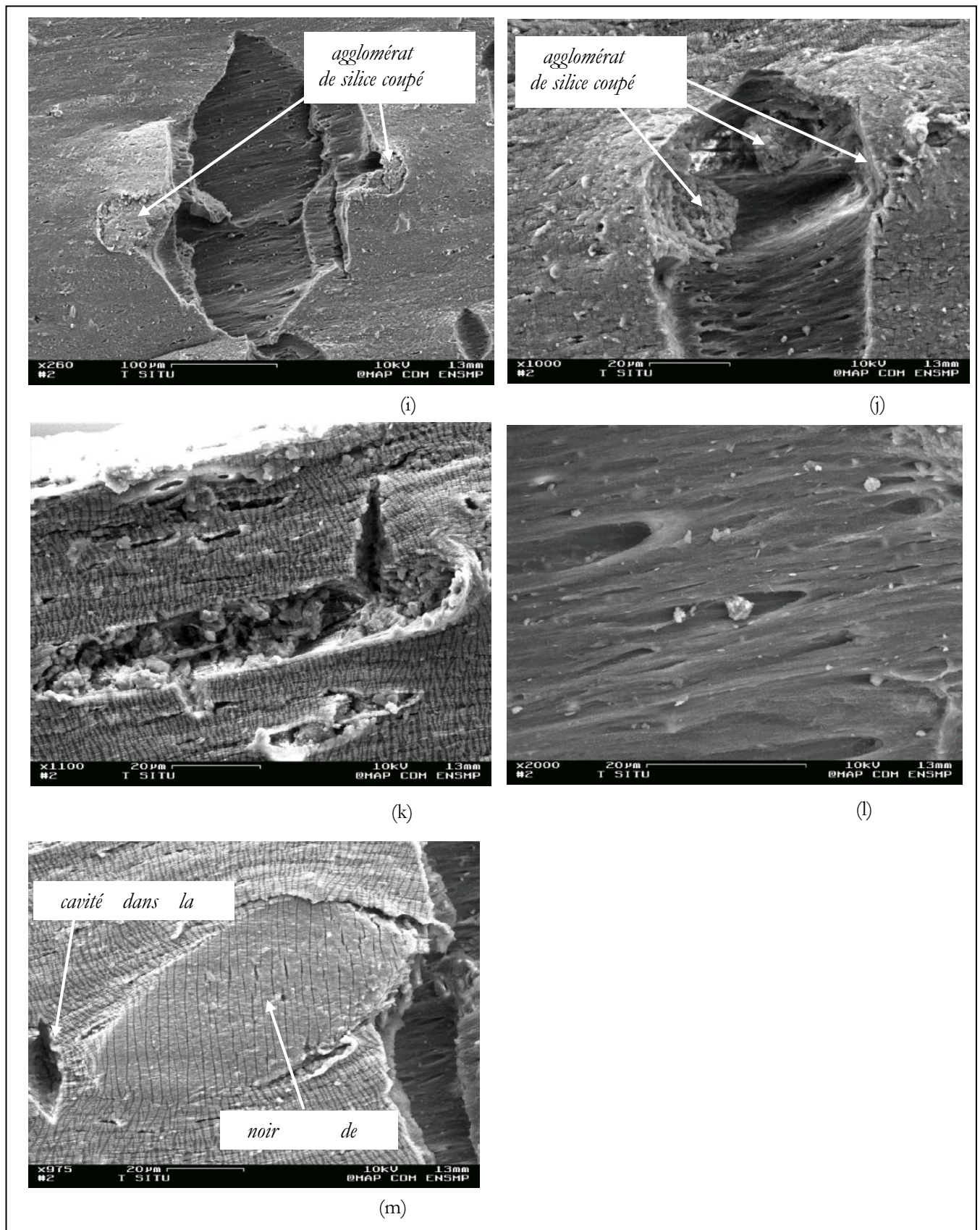


Figure 2.78 - Epreuve de traction *in situ* prélevée dans la tranche d'une plaque –  $\lambda_1 \approx 3$

---

## **Conclusion**

*Les agglomérats de silice sont une source importante d'endommagement du caoutchouc. Les observations illustrent les mécanismes décrits dans la littérature [Ambacher et al., 1991]. L'agglomérat est composé d'agrégats de silice et de gomme. Lors de l'application d'une élongation, **l'agglomérat** se rompt en son sein car d'une part les agrégats ne peuvent pas accommoder la déformation et les liaisons qui maintenaient leur cohésion se rompent et d'autre part, les chaînes élastomères subissent une élongation très supérieure à l'élongation globale et se cassent, glissent, ou se désorbent de la surface des agrégats. Les **agrégats**, qui sont composés de particules de silice présentent une bonne cohésion interne mais une mauvaise cohésion avec la matrice. Les décohésions agrégat/matrice apparaissent donc à des élongations assez faibles.*

*Ces deux types d'endommagement (décohésion au sein de l'agglomérat et cavitation autour des agrégats) sont sources de déformation volumique. Les fissures sont alors initiées à partir de ces défauts.*

*Les noirs de carbone sont source de cavitation dans la matrice à leur pôle à des élongations beaucoup plus importantes. Ceci prouve leur bonne cohésion interne et leur bonne adhérence avec la matrice.*

---

## 2.5 - Conclusions

Les caractérisations mécaniques des deux élastomères caoutchouc styrène-butadiène, de nuance A, chargé de silice (SBR A) et polyuréthane réticulé cellulaire (PU A) ont été menées.

Plusieurs essais ont été conduits sur des éprouvettes de géométrie simple (haltère, lanière, pion). Les chargements de traction et compression uniaxiales, compression eudiométrique et traction plane ont été appliqués avec des trajets variables (monotone, cyclique, relaxation) et différentes vitesses de sollicitation.

La caractérisation du comportement du **SBR de nuance A** met en avant différents aspects :

- Elasticité non linéaire

Ce comportement dit hyperélastique est typique des élastomères (et inhérent à leur définition)

- Raideur très importante aux faibles elongations

Ce renforcement aux faibles elongations est lié à la présence des charges de silice [Payne, 1962]

- Dépendance du comportement à la vitesse de chargement ou viscoélasticité

- Dissipation d'énergie importante lors du premier cycle

Elle est due aux phénomènes habituellement regroupés sous le nom d'effet Mullins. Cet effet conduit à l'adoucissement du matériau. Il s'apparente à de l'endommagement [Simo, 1987]. S'ajoutent les phénomènes de glissement de charges les unes par rapport aux autres, modification de l'organisation du réseau de charges floculées. Ces effets peuvent être assimilés à de la plasticité [Miehe, 2000].

- Déformation permanente

Elle est probablement due à la réorganisation du réseau de charges. Elle peut donc être considérée plastique [Kilian et al., 1994].

- Déformation volumique

Les mesures de champ de déformation effectuées en collaboration avec l'Ecole des Mines d'Alès mettent en évidence une déformation volumique (30% à  $\lambda_1=4.5$ ) du matériau sollicité en traction. Cette déformation s'annule lors du retour à charge nulle. Elle est liée au phénomène de cavitation autour des charges de silice.

Notons que la déformation est isovolume lorsque le matériau est sollicitée en compression eudiométrique.

L'étude de **l'influence des charges de silice sur le comportement mécanique** montre que ces dernières interviennent dans chacun des aspects décrit ci-dessus. En effet, le module tangent à l'origine en traction uniaxiale, égal à 100 MPa, est 20 fois inférieur sur la même gomme non chargée. Ce renforcement aux faibles elongations provient, selon la bibliographie, à la fois de la dispersion de particules rigides (la silice) dans une matrice molle (la gomme SBR) et de la floculation de ces charges pour former un réseau rigide.

La dissipation viscoélastique est également amplifiée par la présence de charges. La littérature attribue ce phénomène d'une part à la modification des propriétés viscoélastiques de la matrice liée aux charges (ou occluse entre les charges) ([Hamed, 1989], [Clément, 1999]) et d'autre part à la rupture/reformation du réseau secondaire de charges floculées [Wolff, 1996]. La déformation rémanente observée après un essai de traction uniaxiale cyclique est attribuée environ à 50% à la viscoélasticité du matériau et à 50% à la déformation plastique ayant lieu dans les agglomérats de charges, ou à la modification du réseau de charges sous sollicitation.

**L'endommagement** a été mis en évidence à la fois lors des essais mécaniques cycle/temps de repos/cycle, mais aussi lors d'observation in situ du matériau sous chargement. Deux types d'endommagement sont observés : rupture des agglomérats de silice en leur milieu (les chaînes qui maintiennent la cohésion des agrégats entre eux ne peuvent pas accommoder la déformation et se rompent) et cavitation par décohéation aux pôles des agrégats de silice (indissociables). Les fissures sont

alors initiées à partir de ces défauts. Ces phénomènes conduisent à la création de vides dans la matière et induisent donc une déformation volumique. Cette dernière n'a pas lieu lorsque le matériau est sollicité sous un chargement de compression puisque les cavités ne s'ouvrent pas.

Des essais mécaniques de traction, compression et torsion ont également été effectués sur des structures de SBR A : éprouvettes axisymétriques entaillées. Ces résultats serviront à valider la loi de comportement.

Une étude présentée en annexe montre que la mise en forme (plaques calandrées, pions moulés, plots injectés et AE mises en forme par compression transfert) a une influence notable sur le comportement mécanique. Nous considérons toutefois qu'elle n'est pas rédhibitoire : les plots, les AE et les semelles pourront être simulés avec une loi de comportement identifiée à l'aide d'essais effectués sur des plaques.

La caractérisation du **PU de nuance A** met en avant différents aspects du comportement :

- Hyperlasticité

Cet aspect du comportement est typique des élastomères

- Compressibilité

La nature cellulaire de ce matériau engendre sa variation de volume lorsqu'il est sollicité en traction et en compression. Pour des déformations volumiques inférieures à 0.6, il devient compact. Cette valeur est liée à la densité du matériau (0.6), elle même en rapport avec la densité de porosité

- Viscoélasticité

Le comportement dépend de la vitesse de sollicitation. Les essais de relaxation montrent que la relaxation des contraintes dépend peu de l'élongation imposée.

- Déformation permanente

Elle constitue un pourcentage faible de la déformation progressive. Cette dernière est donc considérée de nature essentiellement viscoélastique.

Les composantes 'hyperélasticité compressible' et 'viscoélasticité' seront pris en compte dans la loi de comportement.

L'annexe 2E montre que la dispersion des propriétés mécaniques du PU est notable au sein d'une même plaque mais également au sein d'un même lot d'éprouvettes sur différentes plaques. La loi de comportement sera identifiée à partir d'essais effectués sur des éprouvettes issues de différentes plaques. L'erreur est ainsi moyennée et le comportement simulé intermédiaire entre les deux extrêmes expérimentaux.

Le PU A n'a pu être mis en oeuvre que sous forme de plaques. Aucune structure n'a donc pu être testée.

## Bibliographie

**Agassant, Avenas, Sergent** - *La mise en forme des matières plastiques* - Technique et Documentation, Lavoisier, **1986**

**Ambacher, Strauss, Kilian, Ulm, Wolff** - *Reinforcement in Filler-Load Rubbers* - Kautschuck+Gummi - Kunststoffe 44. Jahrgang, Nr. 12/**1991**

**Bueche** - *Mullins effect and rubber-filler interactions* - Journal of applied polymer science, vol.15, pp.271-281 **1961**

**Clément** – *Etude des mécanismes de renforcement dans les réseaux polyméthylsiloxane chargés de silice* – Thèse Paris VI – 16/11/**1999**

**Dannenberg** - *The effects of surface chemical interactions on the properties of filler-reinforced rubbers* - Rubber Chemistry and Technology, , vol 48, **1975**

**Dannenberg** - *Product modifications important in fillers* - Elastomerics, dec **1987**

**Govindjee, Simo** - *A micro-mechanically bases continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins'effect* - Journal of Mechanics and Physics of Solids. Vol.39. No. 1 pp. 87-112 **1991**

**Guth, Gold** – Journal of applied physics – vol. 16, pp.20 **1945**

**Hamed, Hatfield** - *On the role of bound rubber in carbon-black reinforcement* - Rubber Chemistry and Technology, vol 62, pp143-156, **1989**

**Harwood, Mullins, Payne** - *Stress softening in natural Rubber Vulcanizates - Part.II Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers* - Journal of applied polymer science, vol.9, pp.3011-3021 **1965**

**Kalliske, Rothert** - Viscoelastic and elastoplastic damage formulations - Constitutive Models for Rubbers, Dorfmann & Muhr, Balkema, Rotterdam, **1999**

**Killian, Strauss, Hamm** - *Universal properties in filler-loaded rubbers* - Rubber Chemistry and Technology, vol 67(1), 1-16, **1994**

**Kraus** - *Reinforcement of elastomers by carbon black* - Rubber Chemistry and Technology, vol 51, n.2, pp297-321, **1978**

**Laraba** - *Etude des comportements hyperélastique et viscohyperélastique de deux élastomères par extensométrie optique bidimensionnelle* - Thèse Ecole Centrale Paris, **1998**

**Maier, Göritz** - *Molecular interpretation of the Payne effect* - Kautschuck+Gummi - Kunststoffe 49. Jahrgang, Nr. 1/**1996**

**Miehe et Keck** - *Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation* - Journal of Mechanics and Physics of solids, 48 pp. 323-365, **2000**

**Mullins** - *Effect of stretching on the properties of rubber* - Journal of Rubber Research, vol.16, n°12, p.275-289, dec. **1947**

**Mullins** - *Softening of rubber by deformation* - Rubber Chemistry and Technology, vol 42, **1969**

**Payne** - Journal of applied polymer science, vol.6, pp.57 **1962**

**Payne, Whittaker** - *Low strain dynamic properties of filled rubber* - Rubber Chemistry and Technology, vol 44, pp440-478, **1971**

**Piques, Dufresne** - Comportement viscoélastique des élastomères - Cours DEA Mécanique et Matériaux, **1997**

**Saintier, Cailletaud, Piques.**- *Fatigue Lifetime prediction of natural rubber components under axial and multiaxial loading* – ECF13 Proceedings, **1999**

**Simo** - *On a fully three-dimensionnal finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects* - Computer methods in applied mechanics and engineering 60, p153-173, **1987**

**Wolff** - *Chemical aspects of rubber reinforcement by filler* - Rubber Chemistry and Technology, vol 69 n.3, pp325-346, **1996**

---

# Chapitre 3

## Modélisation du comportement mécanique

---

*Ce chapitre décrit la modélisation des comportements du caoutchouc styrène butadiène (SBR) chargé de silice et du polyuréthane réticulé cellulaire (PU). Les essais mécaniques, détaillés dans le chapitre 2, ont permis de conclure que le comportement du SBR fait intervenir l'hyperélasticité incompressible, la viscoélasticité et l'endommagement, et le comportement du PU l'hyperélasticité compressible et la viscoélasticité.*

*Le comportement de ces élastomères a été caractérisé jusqu'à des elongations de 3. Les lois de comportement devront donc être écrites dans le cadre mécanique des grandes transformations. L'approximation qui consiste, en petites déformations, à superposer la configuration initiale et la configuration de travail, n'est plus valide ici. Quelques rappels sur la description de ce nouveau cadre mécanique font l'objet du premier paragraphe.*

*Le second paragraphe décrit successivement les équations des lois de comportement hyperélastique incompressible et hyperélastique compressible, des lois d'endommagement et des lois viscoélastiques. Deux approches sont étudiées pour décrire la viscoélasticité en grandes transformations : l'approche par intégrale héréditaire et l'approche par variables internes. Un paragraphe concerne les lois élasto-plastiques. Elles constituent une perspective intéressante pour améliorer la modélisation du SBR chargé de silice.*

*Le troisième paragraphe décrit l'identification des modèles constitués par le couplage de deux ou trois des équations décrites précédemment et appliquées aux comportements du SBR chargé de silice et du PU cellulaire. Ces identifications, assez complexes, passent par l'étude de la sensibilité des coefficients des différentes lois sur la valeur de la contrainte puis par le choix des essais mécaniques représentatifs et pertinents pour l'identification. Une discussion clôt cette partie.*

*Le quatrième paragraphe présente les simulations des essais complexes (multiaxiaux) effectués avec les lois identifiées précédemment à partir des essais simples. Elles permettent de valider ces lois et d'en connaître les limites. Les calculs effectués par les deux approches viscoélastiques sont comparés.*



## 3.1 - Rappels mécaniques sur le cadre des transformations finies

*La difficulté liée à l'écriture des lois de comportement en transformations finies provient de la non superposition de la configuration de référence avec la configuration de travail. En effet, en petites déformations, toutes les configurations peuvent être supposées superposées. En transformations finies, ou grandes transformations, trois configurations sont classiquement utilisées pour la description des lois : la configuration initiale, la configuration mixte et la configuration actuelle.*

Les lois de comportement doivent être exprimées avec des variables duales et satisfaire le principe d'objectivité.

Dans l'ensemble du chapitre, les vecteurs sont notés en gras  $\mathbf{v}$ , les tenseurs d'ordre 2 sont écrits avec une police spécifique :  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{E}$ . Les indices supérieurs  $^t$  et  $^{-1}$  indiquent respectivement la transposée et l'inverse du tenseur. Le point "." décrit l'opération de contraction de deux tenseurs, les deux points ":" l'opération de double contraction.

### Description des déformations et des efforts

Les éléments contenus dans ces rappels sont principalement extraits du cours de [Sidoroff, 1982].

#### Mouvement d'un point matériel

Soit  $\mathbf{X}$ , position du point matériel à  $t_0$ , avant déformation

Soit  $\mathbf{x}$ , position du point matériel à  $t$ , après déformation  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$

Les coordonnées peuvent être définies par rapport à la configuration de référence  $C_0$ , elles sont alors dites **lagrangiennes**, ou par rapport à la configuration actuelle  $C_t$ , elles sont alors dites **eulériennes**. Comme nous l'avons souligné, ces deux configurations ne sont pas équivalentes. Il faut travailler dans l'une ou dans l'autre.

Le **tenseur gradient de la transformation** ou application linéaire tangente  $\mathbb{F}$  définit la loi de transformation du vecteur matériel  $d\mathbf{X}$  (au voisinage du point  $\mathbf{X}$ ).

$$d\mathbf{X} \longrightarrow d\mathbf{x} = \mathbb{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (1)$$

Ce tenseur relie la configuration actuelle à la configuration de référence. Il n'est donc ni lagrangien, ni eulérien. Il est dit **mixte**.

Notons que le tenseur gradient n'est pas symétrique dans le cas général.

Les lois de transformation d'un vecteur matériel  $\mathbf{X}$ , d'un élément de surface  $dS_0$  et d'un élément de volume  $dv_0$  sont résumées :

$$\mathbf{n} dS = J \mathbb{F}^{-t} \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad J = \det \mathbb{F} \quad (2)$$

$$dv = J dv_0 \quad (3)$$

#### Tenseurs de déformations

Le tenseur de déformation doit caractériser complètement la déformation du solide (les variations de longueur, d'angles, de dilatations volumiques).

Soient  $d\mathbf{X}_1$  et  $d\mathbf{X}_2$ , deux vecteurs matériels de  $C_0$ , configuration initiale, deviennent  $d\mathbf{x}_1$  et  $d\mathbf{x}_2$  dans  $C_t$ , configuration actuelle. Les changements de forme peuvent être décrits par (4) et (5).

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{X}_1 \cdot \mathbb{F}^t \cdot \mathbb{F} \cdot d\mathbf{X}_2 \quad (4)$$

$$d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = d\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^t)^{-1} \cdot d\mathbf{x}_2 \quad (5)$$

Les tenseurs symétriques suivants sont alors définis :

- **tenseur droit de Cauchy-Green** ou tenseur des dilatations  $\mathbb{C} = \mathbb{F}^t \cdot \mathbb{F}$

$\mathbb{C}$  est un tenseur lagrangien.

Les variables 'élongations' utilisées lors du dépouillement des essais mécaniques et définies comme les rapport des longueurs à l'instant  $t$  sur les longueurs initiales, correspondent aux racines des valeurs propres de ce tenseur. Dans le cas d'un tenseur gradient de la transformation  $\mathbb{F}$  diagonal, les élongations peuvent être considérées comme les composantes de ce tenseur.

- **tenseur gauche de Cauchy-Green**  $\mathbb{B} = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^t$

$\mathbb{B}$  est un tenseur eulerien.

On peut également définir:

- **tenseur de Green-Lagrange**  $\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{C} - \mathbb{I})$  ,  $\mathbb{I}$  : tenseur identité

$\mathbb{E}$  est un tenseur lagrangien

- **tenseur d'Almansi**  $\mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{B}^{-1})$

$\mathbb{A}$  est un tenseur eulerien.

En petites déformations, tous ces tenseurs sont équivalents.

#### Tenseurs vitesse de déformation

Le tenseur  $\mathbb{L}$  est défini en (6) :

$$\dot{d\mathbf{x}} = \dot{\mathbb{F}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbb{L} \cdot d\mathbf{x} \quad \mathbb{L} = \dot{\mathbb{F}} \cdot \mathbb{F}^{-1} \quad (6)$$

Les parties symétrique  $\mathbb{D}$  et non symétrique  $\mathbb{W}$  de  $\mathbb{L}$  sont :

$$\mathbb{D} = \mathbb{L}^s = \frac{1}{2}(\mathbb{L} + \mathbb{L}^t) \quad \mathbb{W} = \mathbb{L}^a = \frac{1}{2}(\mathbb{L} - \mathbb{L}^t) \quad (7)$$

Les vitesses de déformation sont alors définies :

- dans la configuration actuelle  $C_t$  par  $\mathbb{D}$

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = 2 d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbb{D} \cdot d\mathbf{x}_2 \quad (8)$$

La dérivée du produit scalaire de deux vecteurs du système exprime la dérivée par rapport au temps de la dilatation du système. Cette dérivée est la vitesse de déformation.

- dans la configuration de référence  $C_0$  par  $\dot{\mathbb{E}}$

$$\frac{d}{dt}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2) = 2 d\mathbf{X}_1 \cdot \dot{\mathbb{E}} \cdot d\mathbf{X}_2 \quad (9)$$

Ces deux tenseurs sont reliés par le tenseur gradient de la transformation.

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad \mathbf{D} = \mathbf{F}^{-t} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (10)$$

Les mesures eulériennes des vitesses de déformation  $\dot{\mathbf{A}}$  ou  $\dot{\mathbf{B}}$  ne sont pas objectives car ces tenseurs ne sont pas nuls dans un mouvement de corps rigide.

### Tenseurs de contrainte

Le vecteur contrainte  $\mathbf{T} = d\mathbf{f}/dS$  caractérise les efforts intérieurs de cohésion, c'est à dire les actions entre les 'particules' du système. Lorsque l'on déforme le système, les forces intérieures  $\mathbf{f}$  sur la surface  $dS$  s'opposent à la déformation.

L'effort  $d\mathbf{f}$  exercé sur une partie du solide à travers un élément de surface  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$  s'écrit :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (11)$$

Cette description est faite dans la configuration actuelle  $C_t$

Le tenseur  $\mathbf{T}$  est le *tenseur de Cauchy*. Il est *eulérien, symétrique*.

Les tenseurs déduits de  $\mathbf{T}$  sont :

- *tenseur de Piola-Kirchoff 1* ou tenseur de Boussinesq  $\mathbf{K}$

Il est défini tel que :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad (12)$$

$dS_0$  est l'élément de surface décrit dans la configuration de référence  $C_0$ ,  $d\mathbf{f}$  est la force intérieure de cohésion décrite dans la configuration actuelle  $C_t$ .

Ce tenseur n'est ni lagrangien, ni eulérien. Il est dit *mixte* : il correspond à une application de  $C_0$  vers  $C_t$ . De plus, ce tenseur n'est pas symétrique.

- *tenseur de Piola-Kirchoff 2* ou tenseur de Piola-lagrange  $\mathbf{S}$

Il est défini tel que

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dS_0 \quad (13)$$

$dS_0$  est l'élément de surface décrit dans la configuration de référence  $C_0$ ,  $d\mathbf{f}_0$  la force intérieure de cohésion décrite dans  $C_0$ . Ce tenseur est *lagrangien* et symétrique.

- *tenseur de Kirchoff*  $\mathbf{H}$

Il est défini tel que :

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T} \quad \mathbf{J} = \det \mathbf{F} \quad (14)$$

Il est *eulérien*, symétrique.

Ces tenseurs sont reliés par le tenseur gradient  $\mathbf{F}$  liant la configuration de référence  $C_0$  à la configuration actuelle  $C_t$ . On a :

$$\mathbf{J} \mathbf{T} = \mathbf{H} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}^t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^t \quad (15)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}^{-1t} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-1t}$$

Notons que les tenseurs de Piola-Kirchoff 2 et de Kirchoff n'ont aucune signification physique.

## Travail des actions intérieures $W_i$

Les équations d'équilibre admettent que pour toute partie du solide, les efforts appliqués doivent former un torseur nul. Il en résulte une équation résultante (16) dans  $C_t$  ou (17) dans  $C_0$ , et une équation de moments qui exige la symétrie du tenseur de Cauchy.

$$\operatorname{div} \mathbb{T} + \rho \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ dans } C_t, \quad \operatorname{div} \mathbb{T} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \mathbb{K} + \rho_0 \mathbf{F}_0 = \mathbf{0} \text{ dans } C_0, \quad \operatorname{div} \mathbb{K} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial X_j} \quad (17)$$

Le théorème des travaux virtuels est déduit de ces formules en leur multipliant un champ de vitesse virtuel. On obtient alors l'expression du travail des actions intérieures  $W_i$  ou la puissance spécifique ou massique  $\Pi_{\text{int}}$ . Cette dernière peut s'écrire de différentes façons, suivant que l'on travaille avec des tenseurs lagrangiens, eulériens ou mixtes.

$$\Pi_{\text{int}} = \frac{1}{\rho_0} \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} = \frac{1}{\rho_0} \mathbb{K} : \dot{\mathbb{F}} = \frac{1}{\rho_0} \mathbb{H} : \mathbb{D} = \frac{1}{\rho} \mathbb{T} : \mathbb{D} \quad (18)$$

Les grandeurs dans l'expression de la puissance sont dites duales.

## Thermodynamique - Bilan d'énergie

Le premier principe thermodynamique exprimant la conservation de l'énergie totale (19), alliée au théorème de l'énergie cinétique (20) conduit à l'expression de **la forme eulérienne locale de conservation d'énergie** (21).

$$\frac{d}{dt} (E+K) = \mathcal{P}_{\text{ext}} + Q \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} (K) = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad (20)$$

$E$  est l'énergie interne du système,  $K$  l'énergie cinétique,  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$  la puissance des efforts extérieurs,  $\mathcal{P}_{\text{int}}$  la puissance des efforts intérieurs,  $Q$  la puissance calorifique apportée.

$$\rho \dot{e} = \mathbb{T} : \mathbb{D} + \rho_0 r - \operatorname{div}_x(\mathbf{q}) \quad (21)$$

$e$  est l'énergie interne par unité de masse,  $\mathbb{T}$  tenseur de Cauchy,  $\mathbb{D}$  la partie symétrique du tenseur de vitesse de déformation,  $r$  l'apport de chaleur par unité de masse et de temps,  $\mathbf{q}$  la puissance calorifique surfacique (ou débit de chaleur).

De même, la **forme lagrangienne locale de la conservation d'énergie** s'écrit:

$$\rho_0 \dot{e} = \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} + \rho_0 r - \operatorname{div}_X(\mathbf{Q}) \quad (22)$$

$Q_i$  est la puissance calorifique traversant la surface de référence.  $\mathbf{Q} = \mathbb{J} \mathbb{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$

Le second principe de la thermodynamique pose

$$\frac{dS}{dt} \geq \mathfrak{S}_{\text{ext}} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}_{\text{int}} = \frac{dS}{dt} - \mathfrak{S}_{\text{ext}} \geq 0 \quad (23)$$

$S$  est l'entropie du système,  $\mathfrak{S}_{\text{int}}$  le taux de production interne d'entropie,  $\mathfrak{S}_{\text{ext}}=Q/\theta$  le taux d'apport extérieur d'entropie par unité de temps.

En utilisant le théorème de la divergence et la forme eulérienne (24) ou lagrangienne (25) locale de conservation d'énergie, on obtient *l'inégalité de Clausius Duhem*.

$$\Phi = -\rho \left( \dot{\mathbf{e}} - \theta \dot{\eta} \right) - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} + \mathbb{T} : \mathbb{D} \geq 0 \quad , \quad \mathbf{g} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}} \quad (24)$$

$$\Phi_0 = -\rho_0 \left( \dot{\mathbf{e}} - \theta \dot{\eta} \right) - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} + \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} \geq 0, \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \quad (25)$$

où  $\dot{\eta}$  est la dérivée par rapport au temps de l'entropie spécifique.

La grandeur  $\Phi$  introduite est la dissipation volumique d'énergie provenant de l'irréversibilité.

$\mathfrak{S}_{\text{int}}$  peut s'écrire sous la forme (26).

$$\mathfrak{S}_{\text{int}} = \int \int \int_{D_0} \frac{1}{\theta} \Phi_0 \, dv_0 = \int \int \int_D \frac{1}{\theta} \Phi \, dv \quad (26)$$

Si on écrit la dérivée de l'énergie interne  $e$  sous la forme :

$$\dot{\mathbf{e}} = \theta \dot{\eta} + \mathbf{w} \quad (27)$$

$\mathbf{w}$  correspond à une puissance reçue de l'extérieur. Cette grandeur est appelée *puissance spécifique réversible reçue*.

On peut écrire, en considérant l'énergie libre spécifique  $\psi$  :

$$\dot{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{e}} - \theta \dot{\eta} = \dot{\psi} + \eta \dot{\theta} + \theta \dot{\eta} - \theta \dot{\eta} = \dot{\psi} + \eta \dot{\theta} \quad (28)$$

La *dissipation spécifique totale* peut alors s'écrire comme (29) dans  $C_t$  ou (30) dans  $C_0$ .

$$\Phi = \mathbb{T} : \mathbb{D} - \rho \dot{\mathbf{w}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \quad (29)$$

$$\Phi_0 = \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} - \rho_0 \dot{\mathbf{w}} - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \quad (30)$$

Il apparaît ainsi deux types de dissipation  $\Phi^1$  et  $\Phi^2$ , notées en configuration eulérienne (31) et lagrangienne (32):

$$\Phi^1 = \mathbb{T} : \mathbb{D} - \rho \dot{\mathbf{w}} \quad , \quad \Phi^2 = -\frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \quad (31)$$

$$\Phi_0^1 = \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} - \rho \dot{\mathbf{w}} \quad , \quad \Phi_0^2 = -\frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \quad (32)$$

$\Phi^1$  est la *dissipation intrinsèque volumique*,  $\Phi^2$  est la *dissipation thermique volumique*.

---

### Conclusion

Le tableau de la Fig. 3.1 résume brièvement des variables couramment utilisées

configuration lagrangienne	configuration mixte	configuration eulerienne
	déformation	
$\mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbb{F}^t \cdot \mathbb{F} - \mathbb{I})$ tenseur de Green Lagrange	$d\mathbf{X} \longrightarrow d\mathbf{x} = \mathbb{F} \cdot d\mathbf{X}$ tenseur gradient de transformation	$\mathbb{A} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - (\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^t)^{-1})$ tenseur d'Almansi
	contrainte	
$d\mathbf{f}_0 = \mathbb{S} \cdot \mathbf{n} dS_0$ tenseur de Piola-Kirchoff 2	$d\mathbf{f} = \mathbb{K} \cdot \mathbf{n} dS_0$ tenseur de Piola-Kirchoff 1	$d\mathbf{f} = \mathbb{T} \cdot \mathbf{n} dS$ tenseur de Cauchy

**Figure 3.1** – Rappels des notations utilisées pour la description des tenseurs de déformation et de contrainte en grandes transformations

## 3.2 - Les lois de comportement

Les cinq paragraphes qui suivent sont dédiés à la description, non exhaustive, des principales approches utilisées pour l'écriture des lois hyperélastiques incompressible et compressible, des lois d'endommagement, des lois élasto-plastiques et des lois viscoélastiques. Deux approches viscoélastiques sont étudiées et utilisées : l'approche par intégrale héréditaire et l'approche par variables internes.

Chacun des paragraphes commence par un bref rappel bibliographique des lois disponibles, se poursuit avec la description qualitative d'une ou deux approches qui nous paraissent intéressantes et qui nous ont influencé dans le choix des équations mises en œuvre dans le code de calcul ZéBuLoN développé au Centre des Matériaux [Besson et al., 1997], [Zset, 1999]. Il se termine par une description plus précise des approches que nous avons choisies de développer.

Rappelons que la loi de comportement d'un matériau doit permettre de relier le tenseur des contraintes au tenseur des déformations en tout point du solide, quel que soit l'instant considéré. D'une façon générale, la loi est une fonctionnelle de réponse  $\mathbf{F}$ .

$$\mathbb{T} = \mathbf{F}_{\tau \leq t} (\{\mathbf{F}(\tau)\}) \quad (33)$$

La loi de comportement doit vérifier **le principe d'indifférence matérielle ou d'objectivité** :

«La loi de comportement doit être invariante dans tout changement de référentiel»

La loi de comportement devra alors s'exprimer en fonction de variables objectives (et duales).

L'écriture des lois avec des variables lagrangiennes est objective. C'est celle que nous choisissons.

La loi de comportement doit également **vérifier les symétries matérielles** (symétrie des propriétés mécaniques). Si le matériau est isotrope, la loi doit être invariante dans toute rotation de la configuration de référence.

Notons dès à présent que les lois de comportement décrites ci-dessous sont écrites dans le cas d'un matériau supposé homogène et isotrope.

### 3.2.1 - Les lois hyperélastiques quasi-incompressibles

Les lois de comportement élastiques non linéaires sont en général exprimées à partir des expressions de la densité d'énergie de déformation ou potentiel hyperélastique, noté  $W$ . Dans le cas d'un processus isotherme et réversible, ce potentiel correspond à l'énergie libre  $\psi$  ou à la puissance spécifique  $w$  – équation (28) -. La loi de comportement est alors obtenue par dérivation de ce potentiel en suivant les lois thermodynamiques.

Ce chapitre reprend dans un premier temps les équations thermodynamiques explicitées dans le paragraphe précédant afin d'exprimer la loi de comportement dans le cadre de l'élasticité. Les problèmes liés à l'incompressibilité sont ensuite cités. Le troisième paragraphe expose quelques exemples de modèles hyperélastiques couramment utilisés. Le potentiel choisi pour simuler le comportement hyperélastique du SBR est alors commenté. Les lois de comportement sont explicitées pour deux cas particuliers : la traction/compression uniaxiale et la traction plane.

Les essais mécaniques décrits dans le chapitre 2 mettent en évidence la déformation volumique du SBR en traction. Cependant, sous un chargement de compression, ce dernier est incompressible. Nous faisons donc le choix de modéliser le comportement du SBR avec une loi hyperélastique incompressible.

## Thermodynamique

Dans le cadre de l'élasticité 'parfaite', la dissipation est nulle. Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope, en conditions adiabatiques et anisothermes, les expressions de la dissipation explicitées dans le paragraphe 3.1.2 deviennent (34) en configuration actuelle, (35) en configuration lagrangienne, et (36) en configuration mixte.

$$\begin{aligned}\Phi &= \mathbb{T} : \mathbb{D} - \rho \dot{w} = \mathbb{T} : \mathbb{D} - \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbb{B}} : (\mathbb{L} \cdot \mathbb{B}) \\ &= (\mathbb{T} : \mathbb{D}) - \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbb{B}} \mathbb{B} : \mathbb{D} = \left( \mathbb{T} - \rho \frac{\partial W}{\partial \mathbb{B}} \mathbb{B} \right) : \mathbb{D} = 0\end{aligned}\quad (34)$$

$$\Phi_0 = \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} - \rho_0 \dot{w} = \left( \mathbb{S} - \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{E}} \right) : \dot{\mathbb{E}} = 0 \quad (35)$$

$$\Phi_0 = \mathbb{K} : \dot{\mathbb{F}} - \rho_0 \dot{w} = \left( \mathbb{K} - \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{F}} \right) : \dot{\mathbb{F}} = 0 \quad (36)$$

Les **lois de comportement** sont donc (37) dans la configuration  $C_t$ , (38) dans la configuration  $C_0$ , et (39) en configuration mixte.

$$\mathbb{T} = \rho \mathbb{B} \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbb{B}} \quad (37)$$

$$\mathbb{S} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{E}} \quad (38)$$

$$\mathbb{K} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{F}} \quad (39)$$

Ces lois permettent de décrire un **comportement réversible instantanément non dépendant du temps, non linéaire**.

## Incompressibilité

Un matériau incompressible est un matériau qui se déforme sans changement de volume. Les caoutchoucs sont en général considérés comme quasi-incompressibles. Sollicités sous contrainte hydrostatique, ils engendrent des déformations très faibles. D'une façon générale, il faut ajouter à (33) une contrainte indéterminée, ne travaillant pas dans tout mouvement compatible avec la liaison.

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}(\{\mathbb{F}(t)\}) + \mathbb{T}_0 \quad \text{avec} \quad \mathbb{T}_0 : \mathbb{D} \equiv 0 \quad (40)$$

De nombreux auteurs discutent les possibilités d'intégrer cette contrainte dans la loi [Heuillet et al., 1995], [Sidoroff, 1982], [Palgen, 1989] ...

Lors d'une transformation isochore,  $\mathbb{T}_0$  est de la forme  $-p\mathbb{I}$ .

En effet,  $\det \mathbb{F} = 1$



$$\text{Or} \quad d(\det \mathbb{F}) = \det \mathbb{F} \cdot \text{tr}(d\mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^{-1}) \quad (41)$$

Dans le cas particulier considéré, on a donc

$$0 = 1 \cdot \text{tr}(\mathbb{D}) \quad (42)$$

Ceci équivaut à  $\text{tr}(\mathbb{D}) = 0$ .

La double condition à l'incompressibilité

$$\mathbb{T}_0 : \mathbb{D} \equiv 0 \quad (43)$$

$$\text{tr}(\mathbb{D}) = D_{ii} = 0 \quad (44)$$

implique que

$$\mathbb{T}_0 \equiv -p \mathbb{I} \quad (45)$$

## Quelques rappels de cinématique

Dans les paragraphes suivants interviennent les trois invariants du tenseur de Cauchy Green droit, ou tenseur des dilatations  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ . Rappelons leur définition :

$$I_1 = \text{trace}(\mathbb{C}) \quad (46)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{trace} \mathbb{C})^2 - \text{trace} \mathbb{C}^2] \quad (47)$$

$$I_3 = \det \mathbb{C} \quad (48)$$

Les dérivées des invariants du tenseur  $\mathbb{C}$  par rapport à lui-même sont :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbb{C}} = \mathbb{I} \quad (49)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \mathbb{C}} = I_1 \mathbb{I} - \mathbb{C} \quad (50)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial \mathbb{C}} = I_3 \mathbb{C}^{-1} \quad (51)$$

Dans le cas d'un tenseur  $\mathbb{C}$  diagonal  $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ , les invariants du tenseur de Cauchy Green sont:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (52)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (53)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (54)$$

D'autre part, il nous faut définir les élongations  $\lambda_i$ , couramment mentionnées puisqu'elles sont utilisées pour la description des essais expérimentaux. Elles correspondent au rapport de la longueur  $L$  de la zone de mesure de l'éprouvette à l'instant  $t$  sur la longueur initiale  $L_0$  de cette même zone ( $\lambda_i = L/L_0$ ).

Ces élongations principales correspondent aux racines des valeurs propres du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbb{C}$ . Si le tenseur gradient de la transformation  $\mathbb{F}$  est diagonal, les élongations correspondent à ses composantes.

Dans le cas d'un essai de traction uniaxiale et si  $\lambda$  est l'élongation dans la direction de traction, les tenseurs  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{F}$  s'écrivent, en considérant le comportement isotrope et incompressible :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$$

## Expression du potentiel $W$ – Quelques exemples

La littérature propose diverses expressions de la densité d'énergie de déformation  $W$ . En général, on groupe les approches en deux grandes classes : l'approche microscopique ou micromécanique et l'approche macroscopique, phénoménologique. De nombreux auteurs [Heuillet et al., 1995], [Yeoh, 1993], [Davet, 1985],... discutent et comparent l'utilisation de ces potentiels.

### Exemples de modèles statistiques

Le modèle 'original', développé par **Flory** en 1953 a été élaboré à partir de considérations thermodynamiques et statistiques [Verdu, 1997]. L'auteur détermine le comportement gaussien d'une chaîne puis, en appliquant une condition de déformation homogène (modèle de Voigt), il détermine le comportement d'un réseau polymérique [Burr, 1999]. Le modèle s'appuie sur plusieurs hypothèses :

- L'élasticité est d'origine entropique dans le cas des caoutchoucs. La force de rappel est due à la diminution d'entropie engendrée par la réduction du nombre de conformations pouvant être adoptées par les chaînes qui sont mobiles entre deux noeuds. On peut imaginer cette théorie en disant que la diminution de l'entropie est engendrée par l'alignement des chaînes. Le terme d'énergie interne est négligé devant le terme entropique.
- Les chaînes au repos n'ont pas d'orientation privilégiée (pelotes isotropes).
- La détermination de la répartition des longueurs de chaîne (lors de l'application d'une déformation) obéit à une statistique gaussienne.
- L'« homogénéisation » du modèle développé pour une chaîne suppose que l'énergie libre de  $n$  chaînes est égal à  $n$  fois l'énergie libre d'une chaîne et que les déformations macroscopiques sont affines des déformations microscopiques.
- Le réseau de chaînes est idéal (toutes les chaînes sont élastiquement actives), stable (pas de post-réticulation)

La relation contrainte-déformation obtenue par Flory est alors :

$$K = \frac{f}{S_0} = \frac{\rho_0 R \theta}{M_c} \cdot (\lambda - \lambda^{-2}) = nk\theta (\lambda - \lambda^{-2}) \quad (55)$$

$K$  est la contrainte nominale (ou de Piola-Kirchoff 1),  $S_0$  la surface initiale de l'éprouvette sollicitée,  $\rho_0$  la masse volumique,  $M_c$  la masse molaire moyenne entre noeuds,  $n$  le nombre de chaînes par unité de volume,  $k$  la constante de Boltzmann.  $\lambda = L/L_0$  est l'élongation nominale.  $L_0$  est la longueur initiale de la zone utile,  $L$  sa longueur à l'instant considéré.

Cette loi est finalement souvent insuffisante pour décrire le comportement des caoutchoucs réels.

**Kühn & Gr $\ddot{u}$ n** ont proposé en 1942 une nouvelle distribution de probabilité  $p(r)$  sous la forme d'une fonction de Langevin  $\mathcal{L}$  [Arruda et al., 1993]. Cette nouvelle statistique permet de prendre en compte l'extensibilité limite des chaînes.

$$\ln(p(r)) = N \left[ \frac{r}{Nl} \beta + \ln\left(\frac{\beta}{\sinh \beta}\right) \right] \quad (56)$$

$$\beta = l^{-1}(r/Nl) \text{ et } l(x) = \coth(x) - 1/x \quad (56) \quad (57)$$

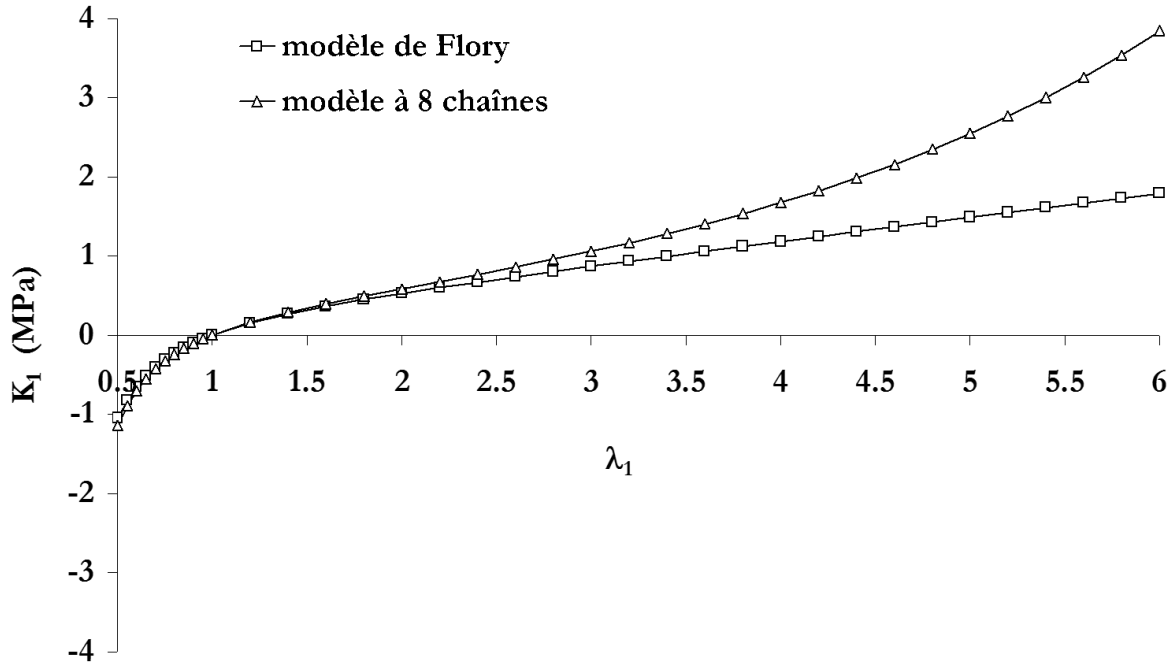
$N$  est le nombre de segments de la chaîne caractérisée par la distance  $r$  reliant ses deux extrémités.  $l$  est la longueur de la chaîne.

**Arruda&Boyce** ont utilisé cette statistique pour décrire le comportement d'une chaîne et un modèle à huit chaînes pour décrire le comportement du réseau [Arruda et al., 1993]. Ils obtiennent l'expression du potentiel suivante :

$$W = nk\theta \left[ \frac{1}{2} (I_1 - 3) + \frac{1}{20N} (I_1^2 - 9) + \frac{11}{1050N^2} (I_1^3 - 27) \right] \quad (58)$$

$I_1$  est le premier invariant du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbb{C}$ .

La Fig. 3.2 illustre les réponses obtenues sur les modèles de Flory et d'Arruda&Boyce (ou à 8 chaînes) en simulant un essai de traction uniaxiale. Les paramètres sont choisis égaux à  $\rho_0=1$ ,  $nk\theta=0.3$  et  $N=10$ . L'amélioration apportée par Arruda&Boyce est nette aux extensions importantes. Il permet de simuler la rigidification du caoutchouc due à l'alignement des chaînes.



**Figure 3.2** – Comparaison du modèle de Flory et du modèle à huit chaînes (ou de Arruda & Boyce)  
Simulation de la rigidification du caoutchouc grâce au modèle à huit chaînes

### Exemples de modèles phénoménologiques

**Mooney**, en 1940, introduit un potentiel dépendant linéairement des deux premiers invariants du tenseur de Cauchy Green [Yeoh, 1993].

$$W(I_1, I_2) = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (59)$$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes à déterminer à partir des résultats expérimentaux.

$I_1, I_2$  : premier et second invariants du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbb{C}$

Ce modèle, comme nous le verrons plus loin, correspond à une extension du modèle de Flory.

Le modèle de **Rivlin généralisé** se base sur un développement en séries de Taylor du potentiel  $W$  et généralise le modèle de Mooney [Yeoh, 1993]. En considérant l'isotropie du comportement, on écrit le potentiel en fonction des invariants du tenseur de Cauchy-Green droit.

$$W(I_1, I_2, I_3) = \sum_i \sum_j \sum_k [C_{ijk} \cdot (I_1 - 3)^i \cdot (I_2 - 3)^j \cdot (I_3 - 1)^k] \quad (60)$$

$W$  : potentiel hyperélastique

$C_{ijk}$  : coefficients d'élasticité,  $C_{000}=0$

$I_1, I_2, I_3$  : invariants du tenseur de Cauchy-Green droit  $\mathbb{C}$

Par la suite, d'autres expressions plus complexes ont été proposées.

**Hart-Smith**, en 1966, propose un potentiel sous la forme [Hart-Smith, 1966]:

$$W(I_1, I_2) = C_1 \int \exp [ (C_3 (I_1 - 3)^2 dI_1 + C_2 \ln (I_2/3) ] \quad (61)$$

**Ogden**, en 1972, fait intervenir des puissances sur les dilatations principales  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  et  $\lambda_3^2$  [Ogden, 1972]:

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad (62)$$

Une autre démarche consiste à optimiser les fonctions  $\partial W / \partial I_1$  et  $\partial W / \partial I_2$ , supposées dépendantes uniquement des invariants  $I_1$  et  $I_2$ , respectivement. [Diani, 1999] propose d'identifier la fonction  $f(I_1)$  sur les essais de traction uniaxiale, essais au cours desquels la fonction  $g(I_2)$  est posée nulle, et la fonction  $g(I_2)$  sur les essais de traction équibiaxiale.

## Notre choix : Le modèle de Rivlin généralisé

Une étude bibliographique couplée à l'expérience du laboratoire nous a conduit à choisir un potentiel de type **Rivlin généralisé** – équation (60) -. Le nombre de coefficients du potentiel dépend du domaine de déformations balayé, du type de sollicitation [Laraba, 1998].

Nous choisissons de travailler dans la configuration lagrangienne car la loi est ainsi objective. D'après l'équation (59), la contrainte de Piola-Kirchoff 2 peut s'écrire en fonction des invariants du tenseur  $\mathbb{C}$  :

$$\mathbb{S} = \rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{E}} = 2\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{C}} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbb{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbb{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbb{C}} \right) \quad (63)$$

$$\text{Or} \quad \frac{\partial I_1}{\partial \mathbb{C}} = \mathbb{1} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbb{C}} = I_1 \mathbb{1} - \mathbb{C} \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbb{C}} = I_3 \mathbb{C}^{-1} \quad (64)$$

L'équation devient alors

$$\mathbb{S} = 2\rho_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{C}} = 2\rho_0 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 \right) \mathbb{1} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbb{C} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 \mathbb{C}^{-1} \quad (65)$$

Si l'on considère un matériau incompressible, le terme  $I_3$  est égal à 1 et la dérivée partielle  $\partial W / \partial I_3$  n'est pas définie. La contrainte est ainsi définie à une pression hydrostatique  $(p + p_0)$  près. La contrainte s'exprime alors par la relation

$$\mathbb{S} = 2 \left[ \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbb{1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbb{1} - \mathbb{C}) + (p + p_0) \mathbb{C}^{-1} \right] \quad (66)$$

Le terme  $p$  est assimilé à un multiplicateur de Lagrange <sup>1</sup>. Ce dernier terme, transposé dans la configuration actuelle, équivaut au terme  $p\mathbb{1}$  ajouté à la contrainte de Cauchy et décrit dans le premier paragraphe. Le terme  $p_0$  correspond au décalage de l'origine des pressions qui permet de vérifier les conditions initiales ( $\mathbb{F}=\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{S}=\mathbb{O}$ ).

Si le potentiel de Rivlin exprimé en fonction des coefficients d'élasticité  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{02}, C_{30}$  devient alors:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (67)$$

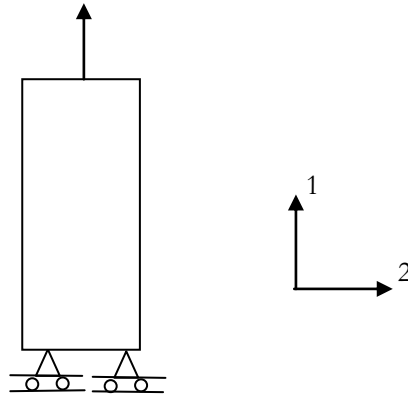
Les dérivées du potentiel par rapport aux invariants sont:

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = C_{10} + C_{11}(I_2 - 3) + 2 C_{20}(I_1 - 3) + 3 C_{30}(I_1 - 3)^2 \quad (68)$$

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = C_{01} + C_{11}(I_1 - 3) + 2 C_{02}(I_2 - 3) \quad (69)$$

### Expression de la contrainte dans le cas d'un essai de traction uniaxiale

L'essai est schématisé sur la Fig. 3.3.



**Figure 3.3** – Schéma des conditions limites de l'essai de traction uniaxiale

Le tenseur  $\mathbb{C}$  dans le repère principal est de la forme (hypothèse d'incompressibilité):

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup> Numériquement, ce terme est calculé de telle sorte que les conditions d'incompressibilité et les conditions limites soient respectées

$\lambda$  est l'élongation mesurée expérimentalement. Elle correspond à la racine de la composante principale maximale du tenseur des dilatations.

Le tenseur  $\mathbb{S}$ , en tenant compte des conditions limites, est :

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la contrainte dans le cas d'un essai de traction uniaxiale peut être mené dans le cas particulier, en prenant en compte les hypothèses d'incompressibilité et des conditions limites dès le début des calculs, ou dans le cas plus général. Ces deux raisonnements sont présentés en annexe 3A.

La contrainte principale maximale  $S_1$  de Piola-Kirchoff n°2 ( $\mathbb{S}$  tenseur lagrangien) est alors égale à :

$$S_1 = 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^3}\right) [C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda} + 3C_{11} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - 1\right) + 2C_{20} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right) + 2C_{02} \left(2 + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda}\right) + C_{30} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right)^2] \quad (70)$$

La contrainte de Piola-Kirchoff n°1 ( $\mathbb{K}$  tenseur mixte) est déduite en utilisant les relations de passage (15):

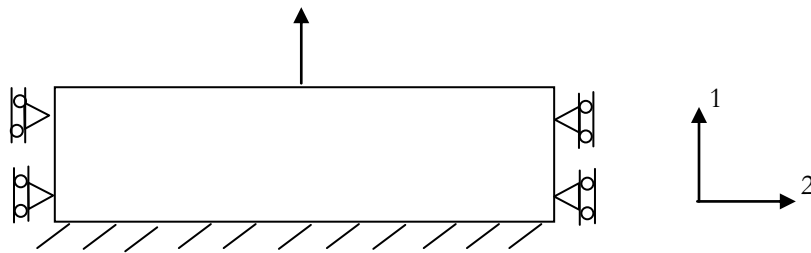
$$K_1 = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) [C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda} + 3C_{11} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - 1\right) + 2C_{20} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right) + 2C_{02} \left(2 + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda}\right) + C_{30} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3\right)^2] \quad (71)$$

Notons que si les coefficients  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$  et  $C_{30}$  sont nuls, le coefficient  $C_{10}$  peut être identifié au

coefficient de la loi de Flory :  $C_{10} = \frac{\rho_0 R \theta}{M_c}$

### Expression de la contrainte dans le cas d'une traction plane

L'essai est schématisé sur la Fig. 3.4.



**Figure 3.4** – Schéma des conditions limites de l'essai de traction plane

Exprimons le tenseur  $\mathbb{C}$  dans le repère principal:

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

De la même façon que précédemment, on obtient :

$$K_1 = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3}\right) [C_{10} + C_{01} + 2(C_{11} + C_{20} + C_{02}) \left(\lambda^2 - 2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + 3C_{30} \left(\lambda^2 - 2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^2] \quad (72)$$

Dans le cas de cet essai, la contrainte  $K_2$  n'est pas nulle. Toutefois, c'est la contrainte  $K_1$  qui est mesurée expérimentalement et qui sera utilisée comme référence lors de l'identification de la loi de comportement.

### 3.2.2 - Les lois hyperélastiques compressibles

Les expressions thermodynamiques sont les mêmes que celles décrites dans le cas quasi-incompressible. La différence majeure est que dans le cas présent, le 3<sup>ème</sup> invariant du tenseur  $\mathbb{C}$  est différent de 1. Analytiquement, l'écriture des lois est plus délicate car elle fait intervenir les trois elongations principales, liées entre elles non plus grâce à la condition de l'incompressibilité mais à travers la loi de comportement. Numériquement, ces lois sont par contre plus simples à écrire puisque la gestion délicate de l'incompressibilité n'intervient pas.

Les approches utilisées sont en général macroscopiques. Les modèles sont phénoménologiques.

Deux expressions du potentiel  $W$  sont disponibles sur le code de calcul que nous utilisons [Zset, 1999] : le potentiel de Mooney et le potentiel d'Ogden.

Le **potentiel de Mooney** s'écrit [Zset, 1999] :

$$W = m_1 (I_1 - 3) + m_2 (I_2 - 3) + 0.5 m_3 (m_1 + m_2) (I_3 - 1) \quad (73)$$

avec  $J = \sqrt{I_3}$

$m_1, m_2, m_3$  sont les paramètres à optimiser.

Le **modèle d'Ogden** est plus élaboré mais plus complexe [Zset, 1999] :

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} \left[ \lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3 + \frac{1}{\beta_i} (J^{-\alpha_i \beta_i} - 1) \right] \quad (74)$$

$\alpha_i, \beta_i, \mu_i$  sont les paramètres à optimiser.

La loi d'Ogden permet de simuler correctement la densification du matériau (rigidification du comportement lors d'un essai de compression hydrostatique) grâce à la fonction  $J^{-x}$ . Cet effet ne peut être décrit par le potentiel de Mooney.

### Notre choix : le potentiel de Mooney

Le modèle de Mooney a été choisi pour représenter le comportement du PU. Il permet de prendre en compte la compressibilité du matériau sans simuler son comportement pour des variations de volume importantes (inférieure à 0.6 dans le cas du PU A). Ceci est suffisant pour le domaine que nous explorons (faibles déformations de compression).

La loi de comportement de Mooney est alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= p_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{E}} = 2p_0 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{C}} = 2p_0 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbb{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbb{C}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbb{C}} \right) + p_0 \mathbb{C}^{-1} \\ &= 2p_0 \left[ m_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbb{C}} + m_2 \frac{\partial I_2}{\partial \mathbb{C}} + 0.5 m_3 (m_1 + m_2) \frac{\partial I_3}{\partial \mathbb{C}} \right] + p_0 \mathbb{C}^{-1} \end{aligned} \quad (75)$$

Le terme  $p_0$  correspond au décalage de l'origine des pressions qui permet de vérifier les conditions initiales ( $\mathbb{F} = \mathbb{1} \quad \mathbb{S} = \mathbb{O}$ ).

La contrainte ne peut être exprimée en fonction d'une seule élongation dans le cas d'un essai de traction uniaxiale car la relation entre les élongations principales dépend de la loi de comportement.

### 3.2.3 - Les lois d'endommagement

L'effet Mullins, ou adoucissement, ou endommagement, est observé dans la plupart des élastomères. Il est toutefois nettement plus prononcé dans les élastomères chargés. Il est dans la plupart des cas modélisé avec des lois d'endommagement.

Deux types de lois ont été développés au cours des trente dernières années. Le premier type concerne les lois micromécaniques, basées sur la description physique et mécanique de l'endommagement. Ces modèles sont intéressants mais sont dans la plupart des cas unidimensionnels [Bueche, 1961], [Ambacher et al., 1991], [Kilian et al., 1994]. Un seul modèle est à notre connaissance développé en 3 dimensions et utilisé dans les codes de calcul. Il s'agit du modèle de Govindgee et Simo [Govindgee et al., 1991, 1992].

D'autres auteurs développent des lois plus phénoménologiques [Miehe, 1995]. Ces modèles s'appuient sur des considérations mécaniques macroscopiques.

Ces deux modèles, [Govindgee et al., 1991, 1992]. et [Miehe, 1995], permettent de simuler un hystérésis indépendant de la vitesse de déformation et un adoucissement des contraintes. L'endommagement y est représenté par une variable scalaire de l'énergie libre locale. Il est donc isotrope. Ils ne permettent cependant pas de simuler une déformation permanente ou une variation de volume liées à l'endommagement (création de cavités).

[Holzapfel et al., 1999] proposent un modèle qui prend en compte à la fois l'anisotropie de l'endommagement et les déformations résiduelles. [Andrieux, 1996] propose de prendre en compte une variation de volume directement liée à l'endommagement. Ces modèles n'ont pas été exploités dans le cadre de notre travail.

Les trois paragraphes suivants décrivent successivement le modèle de Govindgee et Simo [Govindgee et al., 1991, 1992], puis celui de Ambacher, Strauss&Kilian, [Ambacher et al., 1991], [Kilian et al., 1994], et enfin le modèle de Miehe [Miehe, 1995]. Le dernier paragraphe présente le modèle qui a été adopté dans ce travail. Il est inspiré de celui de Miehe.

Les modèles de Govindgee&Simo et de Miehe, ainsi que le modèle que nous avons utilisé s'appuient sur les développements de [Lemaitre et al., 1985] et [Kachanov, 1986] appliqués à la description phénoménologique de l'endommagement. Le potentiel de déformation (ou énergie libre)  $W$  du matériau endommagé s'écrit en fonction du potentiel du matériau non endommagé  $W_0$  :

$$W = (1-D) W_0 \quad (76)$$

$D$  est la variable d'endommagement

#### **Le modèle de Govindgee et Simo** [Simo, 1987], [Govindgee et al., 1991, 1992]

Le modèle de Govindgee et Simo s'appuie sur l'approche de Bueche [Bueche, 1961]. Cette théorie considère les chaînes adsorbées à la surface des charges et reliant les charges. Ces chaînes, étirées au delà de leur longueur maximale, rompent ou se désorbent de la surface des charges. Ceci entraîne l'adoucissement de l'élastomère chargé. Dans le modèle de Govindgee et Simo, le matériau élastomère est considéré comme un matériau composite contenant gomme et charges. L'énergie libre de ce composite ne comprend que l'énergie libre de la gomme puisque celle des charges, considérées rigides, est nulle. Les calculs sont effectués dans un volume élémentaire représentatif. La relation micro-macro est définie à partir des résultats de Hill [Hill, 1972].



**L'énergie libre** de la matrice  $W_m$  est composée de l'énergie libre des chaînes entre points de réticulation  $W_{pp}$  et de l'énergie libre des chaînes entre les charges  $W_{cc}$  – Fig. 3.5 - .

$$W_m = (1-v_p)(W_{cc} + W_{pp}) \quad (77)$$

$v_p$  est la fraction volumique de charges

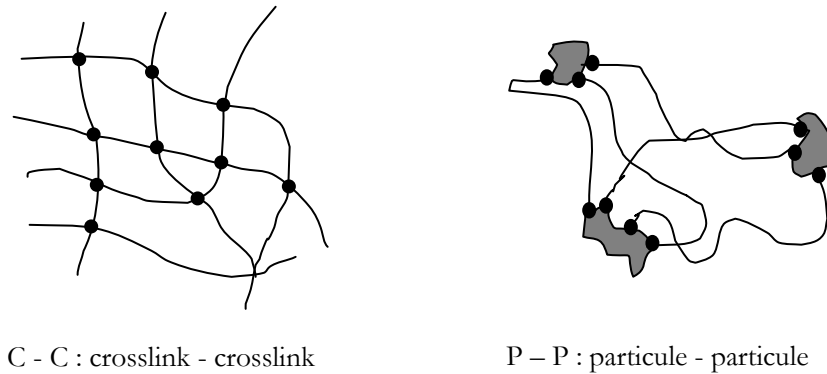
De même, la **déformation** a lieu uniquement dans la matrice (notion d'amplification de la déformation amenée par Mullins et Tobin [Mullins, 1969]). Ainsi, on a

$$\mathbb{F}_m = [1/(1-v_p)] \mathbb{R} (\mathbb{U} - v_p \mathbb{I}) \quad , \mathbb{F} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{U} \quad (78)$$

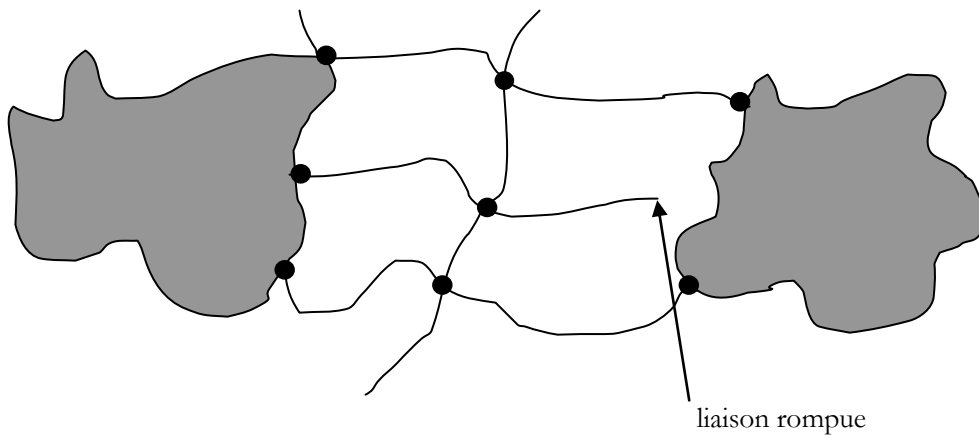
$\mathbb{F}$  est le tenseur gradient de la transformation du matériau,  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{U}$  sont les produits de sa décomposition polaire en tenseur de rotation et tenseur de déformation pure droit.  $\mathbb{F}_m$  tenseur gradient de la transformation de la matrice.  $v_p$  est la fraction volumique de charges

Enfin, **l'endommagement** se produit sur les chaînes entre les charges. Le nombre de ces chaînes diminue lorsque le matériau subit une déformation - Fig. 3.6 - .

Notons que ce modèle est isotrope.



**Figure 3.5** – Décomposition du réseau : contributions des chaînes entre nœuds de réticulation et des chaînes inter-particulaires à l'énergie libre - [Govindgee et al., 1991]



**Figure 3.6** – Schéma des liaisons entre particules lors d'une sollicitation : les chaînes les plus courtes se détachent de la surface de la particule - [Govindgee et al., 1991]

**Le modèle de Ambacher, Strauss et Kilian** [Ambacher et al., 1991], [Kilian et al., 1994]

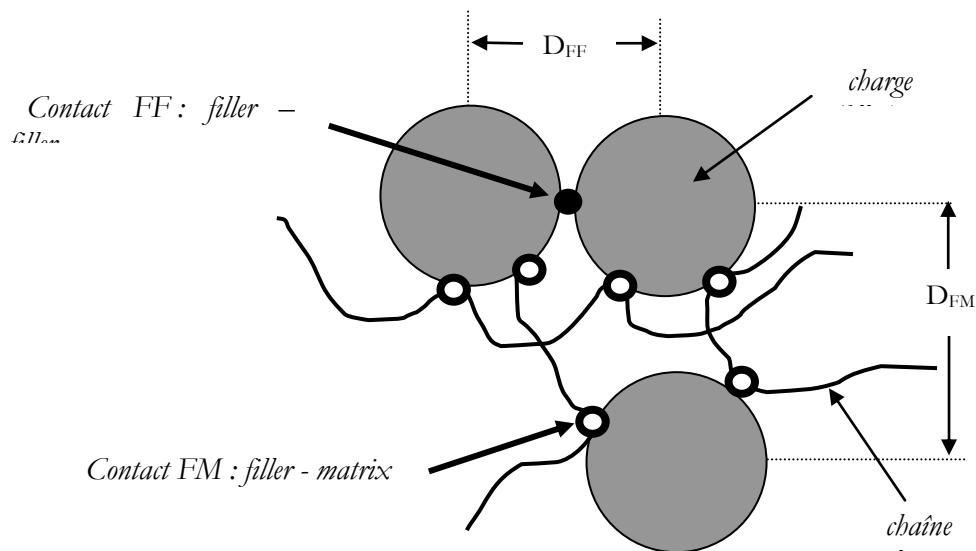
Ces auteurs modélisent l'effet Mullins par une destruction de l'effet renforçant des charges. Le matériau est également considéré comme un composite : la force résultante est la somme d'une force provenant des charges et d'une force provenant de la matrice.

La contribution de la matrice est décrite grâce à une loi de type Van des Waals, non gaussienne. Les charges sont considérées comme des agglomérats de particules et de chaînes. Deux types de force maintiennent la cohésion de cet agglomérat : les forces de liaisons entre les particules (contacts FF : Filler to Filler) et les forces de liaison entre les particules et les chaînes (contacts FM : Filler to Matrix) – Fig. 3.7 -. Les chaînes qui relient les particules au sein d'un agglomérat sont courtes et subissent une élongation très supérieure à l'élongation globale vue par le matériau. Elles stockent donc une grande quantité d'énergie et contribuent ainsi au renforcement. Les liaisons fortes entre les charges – liaisons FF - y contribuent également.

Ce renforcement est rapidement détruit puisque les contacts Filler-Filler sont rompus dès les faibles élongations. De plus, les chaînes entre particules se cassent ou se désorbent de la surface de la charge si elles atteignent leur extension limite. Les contacts Filler-Matrix sont alors rompus.

La loi de comportement prend en compte le pourcentage de charges dans la matrice, les forces de glissement entre charges et entre charges et chaînes, les distances représentatives de ces contacts  $D_{FF}$  et  $D_{FM}$  et le volume des agglomérats. Ce dernier est pris en compte à travers un facteur de percolation.

Ce modèle permet également de prendre en compte l'élongation rémanente qui se produit après le premier cycle. Cette déformation est, selon les auteurs, de type 'plastique' puisqu'elle est due à la rupture ou au glissement des contacts FF (à faible élongation) puis des contacts FM (à plus forte élongation). Lors du déchargement, les agglomérats subissent une force de compression. Une partie de la déformation 'plastique' est recouvrée. La force nulle est atteinte lorsque les forces exercées sur la matrice et sur les agglomérats se compensent. L'élongation rémanente est alors supérieure à 1.



**Figure 3.7** – Schéma de liaisons qui maintiennent la cohésion dans un agglomérat : liaison entre particules et liaison entre particules et chaînes - [Kilian et al., 1994]

### Le modèle de Miehe [Miehe, 1995]

Miehe a développé un modèle qui prend en compte à la fois l'endommagement décrit plus haut, discontinu puisqu'il ne dépend que de l'élongation maximale vue par le matériau au cours de son histoire, mais aussi un endommagement continu, ou accumulation d'endommagement, qui dépend de toute l'histoire de la déformation vue par le matériau.

Si  $d$  est l'endommagement, on a :

$$d = d_\alpha(\alpha) + d_\beta(\beta) \quad (79)$$

$d_\alpha(\alpha)$  est l'endommagement discontinu et  $d_\beta(\beta)$  l'endommagement continu.  $0 \leq d \leq 1$ .  
Cet endommagement ne concerne que la partie isochore de l'énergie libre (donc des contraintes).

La partie isochore de l'énergie libre devient

$$\psi_{iso} = (1-d) \psi_{0 \text{ iso}} \quad (80)$$

$\psi_{0 \text{ iso}}$  est l'énergie libre non endommagée.

Désignons par  $f$  la force thermodynamique associée au dommage  $d$ . Elle correspond alors, au signe près, à l'énergie libre non endommagée  $\psi_0$ . Son évolution est donc :

$$\dot{f} = \mathbb{H}_0 : \mathbb{D} \quad (81)$$

$\mathbb{H}_0$  est la contrainte de Kirchhoff non endommagée et  $\mathbb{D}$  le tenseur vitesse de déformation eulérien.

La variable  $\alpha(t)$  qui gouverne l'endommagement discontinu est alors égale à l'énergie maximale atteinte au cours de l'histoire du matériau.

$$\alpha(t) = \text{Max}_{s \in [0, t]} f(s) \quad (82)$$

La variable  $\beta(t)$  qui gouverne l'endommagement continu prend en compte toute l'histoire de la déformation.

$$\beta(t) = \int_{-\infty}^t \dot{f}(s) ds \quad (83)$$

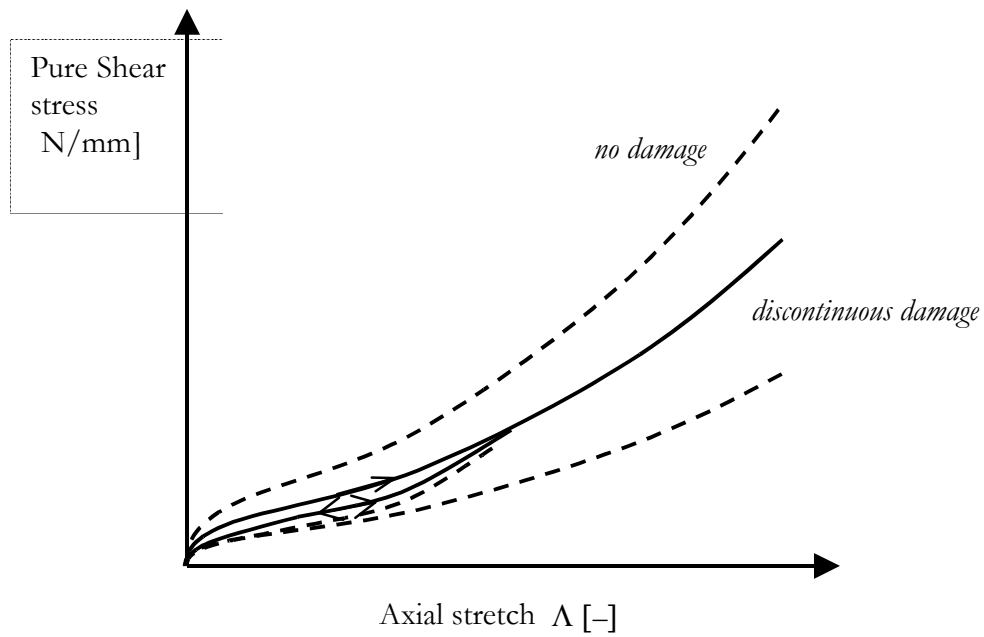
Enfin, l'évolution des dommages suit une loi de saturation (loi de type Arrhenius) :

$$d_\alpha(\alpha) = d_\alpha^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\eta_\alpha}\right) \right] \quad (84)$$

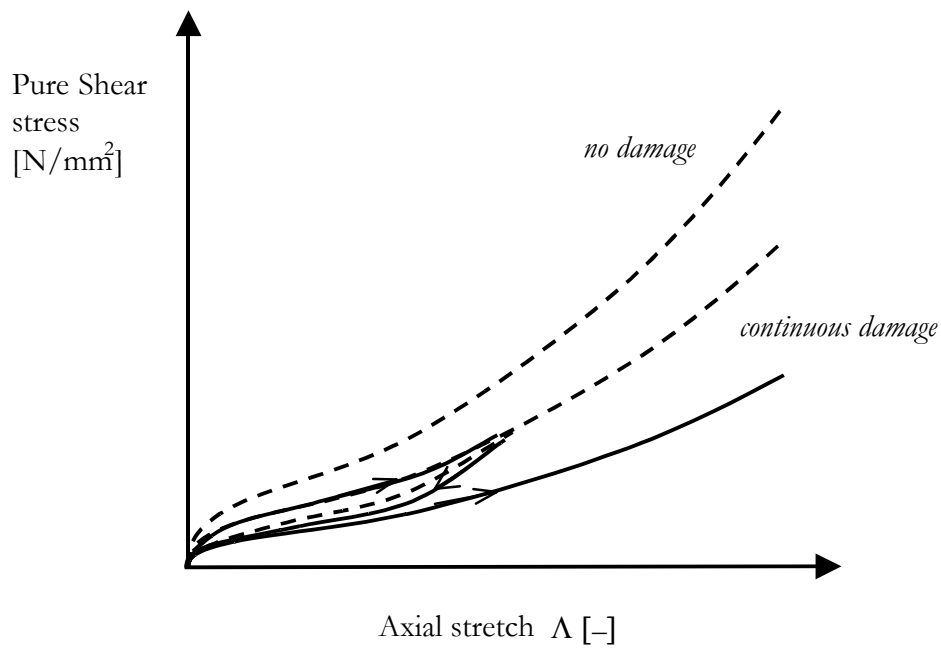
$$d_\beta(\beta) = d_\beta^\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\beta}{\eta_\beta}\right) \right] \quad (85)$$

$d_\alpha^\infty$ ,  $\eta_\alpha$ ,  $d_\beta^\infty$  et  $\eta_\beta$  sont les paramètres à optimiser à partir des résultats expérimentaux.

Les Fig. 3.8 et 3.9 illustrent les deux aspects continu et discontinu du modèle.



**Figure 3.8** – Cycles de cisaillement pur - Illustration du modèle d'endommagement discontinu (courbes en traits pleins) selon [Miehe, 1995]



**Figure 3.9** – Cycles de cisaillement pur - Illustration du modèle d'endommagement continu (courbes en traits pleins) selon [Miehe, 1995]

## Le modèle utilisé au cours de cette étude

Les observations et résultats d'essais de traction uniaxiale sur le SBR chargé de silice présentés dans le chapitre 2 (§ 2.4) nous permettent de conclure que l'adoucissement du matériau a lieu essentiellement au cours de la première montée en charge, qu'il dépend de l'élongation maximale vue par le matériau, qu'il est anisotrope et non recouvrable à température ambiante dans les échelles de temps considérées (3 ans). L'adoucissement peut donc être assimilé à de l'endommagement. Nous avons également observé que la sollicitation de ce matériau conduisait à une déformation volumique. Cette déformation volumique est toutefois réversible (elle s'annule pour un retour à charge nulle) et n'est donc pas directement liée à l'endommagement, irréversible, du matériau.

Pour des raisons de simplification d'écriture du modèle, nous considérons l'endommagement isotrope [Miehe, 1995], [Govindjee et al., 1991, 1992]. D'autre part, et afin de mettre en œuvre notre modèle sur un code de calcul par élément finis, il est apparu naturel de généraliser le paramètre élongation maximale déterminant l'endommagement par un paramètre prenant en compte la triaxialité du chargement : l'élongation principale maximale  $F_1$ .

### Détermination de la cinétique d'endommagement

Considérons la force thermodynamique  $f$  associée au dommage  $d$ . On a alors :

$$f = \frac{\partial W}{\partial d} = \frac{\partial [(1-d)W_0]}{\partial d} = -W_0 \quad (86)$$

$W$  est l'énergie du matériau,  $W_0$  son énergie non endommagée

Cette variable est utilisée pour exprimer un domaine à l'intérieur duquel l'endommagement est fixe. La fonction seuil  $s$  définit la pseudo-surface de charge (par similitude avec la plasticité) :

$$s(f, q) = f - q(d) \quad (87)$$

La fonction  $q(d)$  détermine la cinétique d'endommagement.

La règle de normalité impose

$$\dot{s} = 0 \quad \dot{q} = \dot{f} = \dot{W}_0 \quad (88)$$

Or

$$\dot{q}(d) = \frac{\partial q}{\partial d} \dot{d} \quad (89)$$

Nous supposons que le rayon du domaine de non-endommagement est donné par

$$q(d) = -\eta \cdot \ln \left( \frac{d^\infty - d}{d^\infty} \right) \quad (90)$$

$\eta$  et  $d^\infty$  sont des paramètres liés au matériau

L'équation (89) devient alors :

$$\int_0^W \frac{\partial W_0}{\eta} = \int_0^d \frac{\partial(d)}{d^\infty - d} \quad (91)$$

La résolution de cette équation conduit à exprimer le dommage sous la forme [Laraba, 1999]

$$\dot{d} = d_{\infty} \left[ 1 - e^{\frac{-\dot{W}_0}{\eta}} \right] \quad (92)$$

Nous retrouvons bien la cinétique proposée par [Miche, 1995].

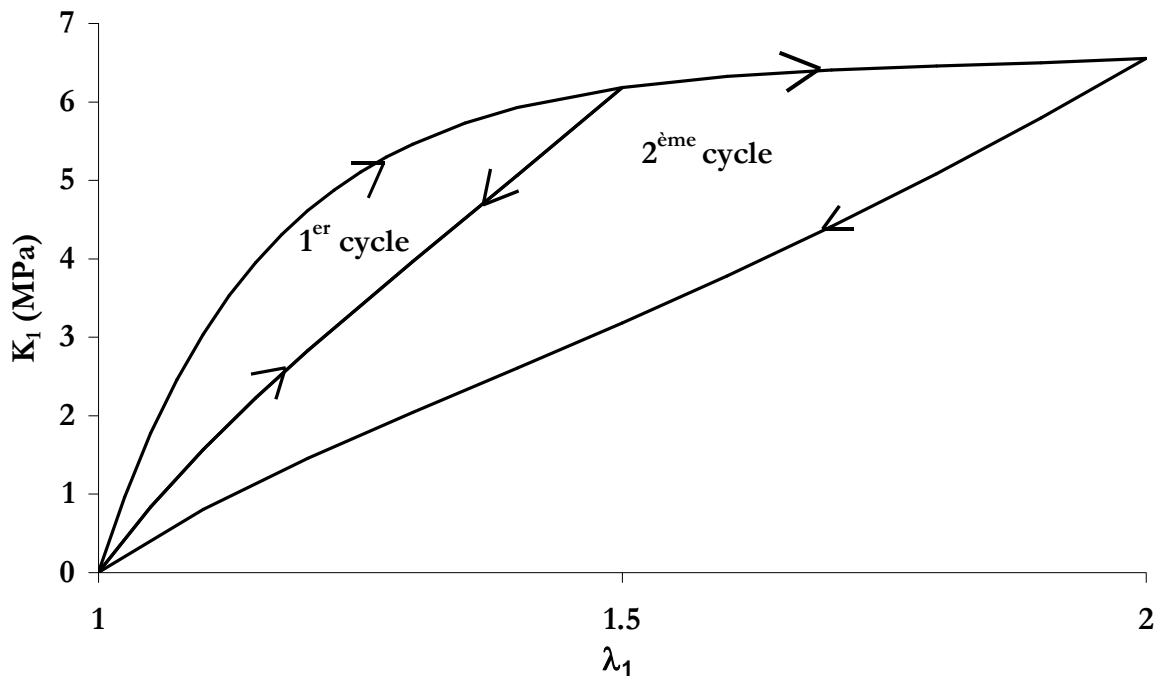
### Prise en compte du paramètre l'élongation maximale principale $F_1$

Nous nous inspirons de la cinétique décrite ci-dessus pour écrire la cinétique de la loi d'endommagement gouverné par l'élongation maximale principale  $F_1$  atteinte par le matériau au cours de son histoire. L'équation prend alors la forme suivante:

$$\begin{cases} \text{si } \dot{F}_1 > 0 & \dot{d}(F_1) = d_{\infty} \left[ 1 - e^{\frac{-(F_1 - 1)}{\eta}} \right] \\ \text{si } \dot{F}_1 = 0 & \dot{d}(F_1) = 0 \end{cases} \quad (93)$$

où  $d_{\infty}$  et  $\eta$  sont les paramètres à déterminer,  $d_{\infty}$  est l'endommagement maximal possible et  $\eta$  un paramètre qui détermine l'échelle d'élongation sur laquelle l'endommagement a lieu.

La Fig. 3.10 illustre la loi lors d'un chargement de deux cycles avec une élongation maximale croissante. On constate que le trajet de chargement du second cycle est superposée au trajet de déchargement du premier cycle. L'endommagement est constant au cours de cette période puisque l'élongation maximale atteinte au cours du premier et égale à 1.5 n'a pas été surpassée. Lorsque le second chargement atteint l'élongation de 1.5, l'endommagement continue à évoluer.



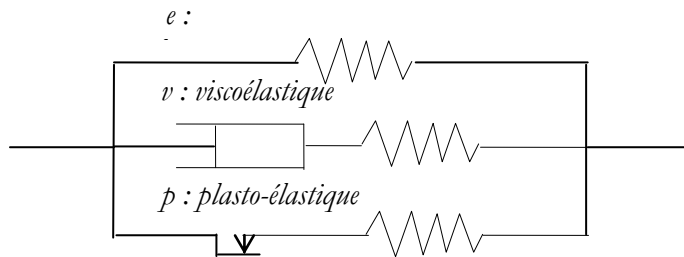
**Figure 3.10** – Illustration du modèle d'endommagement discontinu utilisé dans ce travail – Deux cycles de traction uniaxiale avec des élongations maximales égales à 1.5 puis 2

### 3.2.4 - Les lois élasto-plastiques

Certains auteurs considèrent que la dissipation observée lors du chargement cyclique d'un élastomère chargé peut provenir non pas de la dépendance du comportement par rapport au temps mais par rapport à l'amplitude de chargement [Kaliske et al., 1998, 1999], [Miehe et al., 2000]. Ils nomment alors cette composante du comportement 'plasticité', par extension de la notion de 'plasticité' appliquée aux métaux [Eterovic et al., 1990].

[Kaliske et al., 1998, 1999] attribuent ce comportement plastique aux glissements et à la rupture des contacts charges/charges et charges/chaînes. Ils s'inspirent du modèle de [Ambacher et al., 1991], [Kilian et al., 1994] qui attribuent une déformation plastique au sein d'élastomères chargés à l'évolution (ruptures, glissements) des contacts entre les charges. [Kaliske et al., 1998, 1999] ajoutent que ces glissements et ces ruptures se produisent à des chargements macroscopiques différents, selon la nature de la liaison.

[Miehe et al., 2000] présentent une modélisation élastique-viscoélastique-plastoélastique avec endommagement appliquée aux élastomères chargés. Le modèle peut être illustré, en 1 dimension, par le modèle rhéologique suivant :



**Figure 3.11** – Illustration du modèle de [Miehe et al., 2000] en 1 dimension

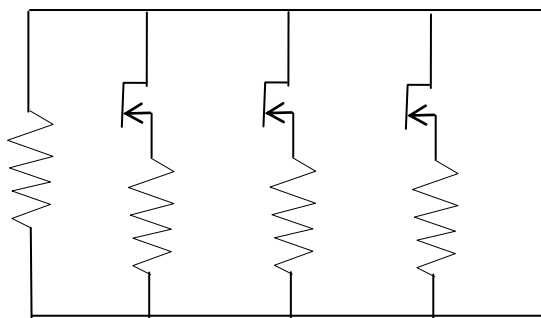
La contrainte totale (de piola-Kirchoff n°2) est la somme des contributions de chaque branche :

$$S = S^e + S^v + S^p \quad (94)$$

$S^e$  est la contrainte élastique,  $S^v$  est la contrainte visco-élastique et  $S^p$  est la contrainte plasto-élastique.

L'endommagement affecte chacune des trois branches.

[Kaliske et al., 1998, 1999] utilisent un modèle de Prandtl généralisé :



**Figure 3.12** – Illustration du modèle rhéologique 1D de Prandtl généralisé par [Kaliske et al., 1998, 1999] en trois dimensions et en grandes transformations

Comme précédemment, l'endommagement affecte chacune des branches à travers le ressort.

Appliquer une limite d'élasticité différente sur chaque patin permet de simuler les différents types de glissements et ruptures qui ont lieu, selon leur nature (contact charge/charge ou charge/chaîne), à des chargements macroscopiques différents.

Ce type de modélisation pourrait convenir pour décrire l'effet 'thixotrope' décrit par [Mullins, 1969] ou [Kraus, 1978]. Cet effet est très marqué dans le cas de charges de silice (forte composante spécifique de l'énergie de surface des charges de silice) puisque le réseau secondaire formé par les charges est détruit sous un chargement important et se reconstruit (selon un 'chemin' différent) lors du retour à charge nulle [Wolff, 1996]. De plus, ces modèles permettent de simuler une déformation rémanente indépendante de la vitesse. Le paragraphe 2.4 (Fig. 2.63) prouve que les déformations rémanentes que nous observons après un chargement cyclique sont partiellement recouvrées (effet viscoélastique) et partiellement permanentes (effet plastique).

Ces modèles, bien qu'intéressants et adaptés à la description de nos matériaux, n'ont pas été mis en œuvre dans le code de calcul ZéBuLoN [Zset, 1999]. Nous avons choisis de privilégier l'approche viscoélastique (dépendant du temps) dans la description des comportements complexes des SBR chargés de silice et du polyuréthane cellulaire.

### 3.2.5 - Les lois viscoélastiques : l'approche fonctionnelle

Modéliser le comportement viscoélastique d'un matériau élastique non linéaire aux grandes transformations pose deux problèmes majeurs. D'une part, la non linéarité du comportement élastique rend délicate l'application du principe de superposition de Boltzmann généralement utilisé. D'autre part, l'écriture en grandes transformations impose que les configurations de travail aux différents temps considérés ne sont pas superposées. Une grande attention doit être portée sur la configuration utilisée pour décrire les contraintes et les déformations, et sur leur transport.

Deux grandes classes de modèles ont été développés pour répondre à ce problème: l'approche fonctionnelle faisant intervenir des intégrales héréditaires, développée par [Bernstein et al., 1963], [Simo, 1987], [Govindjee et al. 1992], [Tanner, 1988], [O'Dowd et al., 1995], [Schapery, 1969] et l'approche par variables internes, développée grâce aux travaux de [Germain, 1986], [Sidoroff, 1974, 1975a, 1975b, 1977, 1980]....

De nombreux auteurs revoient et discutent certains de ces modèles [Soulimani, 1993], [Hassani, 1997], [Johnson et al., 1994, 1995], .....

Les paragraphes suivants s'attachent au rappel de la viscoélasticité en petites déformations, source des développements ultérieurs, à la description du modèle de BKZ [Bernstein et al., 1963] , puis à la description du modèle que nous avons choisi, proche de celui de BKZ et utilisé dans le code de calcul Abaqus [Abaqus, 5.8]. Le dernier paragraphe décrit un modèle développé par Septanika et Ernst pour décrire le comportement de caoutchoucs à court et long termes et qui est finalement proche du modèle précédant [Septanika et al., 1998].

### Viscoélasticité linéaire en petites déformations

L'approche fonctionnelle correspond à une extension de la viscoélasticité linéaire en petites déformations. Quelques rappels sont donc nécessaires [Piques, 1997].

Dans un cadre d'élasticité linéaire et dans le cas d'un matériau isotrope, la réponse en contrainte déviatorique  $\Delta\tau$  à une sollicitation  $\Delta\gamma$  est telle que

$$\Delta\tau(t) = G(t-t') \Delta\gamma \quad (95)$$



$G(t-t')$  est le module de relaxation en cisaillement.

La réponse globale à une succession d'incrément de déformations prend la forme :

$$\tau(t) = \sum_i \Delta\tau(\gamma_i, t-t'_i) = \sum_i G(t-t'_i) \Delta\gamma_i \quad (96)$$

Ceci résulte du **principe de superposition de Boltzman**. Il est applicable dans le cas des matériaux pour lesquels la fonctionnelle entre les contraintes et les déformations est linéaire.

Enfin, pour une sollicitation continue et homogène dans le temps, on écrit :

$$\tau(t) = \int_0^t G(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \gamma(t') dt' \quad (97)$$

En intégrant cette relation par parties, on obtient :

$$\tau(t) = G_0 \gamma(t) - \int_0^t \dot{G}(t-t') \gamma(t') dt' \quad (98)$$

En utilisant un changement de variables dans l'intégrale, on obtient :

$$\tau(t) = G_0 \gamma(t) + \int_0^t \dot{G}(t') \gamma(t-t') dt' \quad (99)$$

Généralisé à trois dimensions et dans le cas d'un matériau isotrope, on peut écrire :

$$\mathbb{T}^D(t) = \int_0^t G(t-t') \frac{\partial}{\partial t'} \mathbb{E}^D(t') dt' \quad (100)$$

$\mathbb{T}^D$  est le tenseur de contrainte déviatorique et  $\mathbb{E}$  le tenseur de déformation (les tenseurs de Green-Lagrange et d'Almansi sont équivalents en petites déformations)

En intégrant par parties, on obtient :

$$\mathbb{T}^D(t) = G_0 \mathbb{E}^D(t) - \int_0^t \dot{G}(t-t') \mathbb{E}^D(t') dt' \quad (101)$$

et par un changement de variable :

$$\mathbb{T}^D(t) = G_0 \mathbb{E}^D(t) + \int_0^t \dot{G}(t') \mathbb{E}^D(t-t') dt' \quad (102)$$

### Le modèle de BKZ [Bernstein et al., 1963], [Tanner, 1988]

Bernstein, Kearsley, Zapas partent de l'équation (98) et généralisent cette formulation à la viscoélasticité non linéaire en grandes transformations [Bernstein et al., 1963]. Ils considèrent la configuration actuelle comme référence et posent  $\tau_0(t)=0$ . De plus, ils utilisent la variable  $m(s)$  et la fonction potentielle  $U$  telles que

$$m(s) = -dG / ds \text{ et } m = dU/d\gamma \quad (103)$$

$\gamma$  est la déformation en cisaillement.

Ceci revient à faire dépendre le module  $G$  de la déformation.

Ils obtiennent alors la version unidimensionnelle du modèle de Kaye – BKZ :

$$\tau(t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \gamma}(\gamma(t'), t-t') \gamma(t') dt' \quad (104)$$

Notons que dans l'hypothèse hyperélastique, c'est à dire élastique non linéaire, le module  $G$  dépend de la déformation  $\gamma$ . Le principe de superposition de Boltzman et l'intégration par parties sont donc basés sur des hypothèses non respectées.

Cette relation est ensuite généralisée à 3 dimensions, à l'aide des outils suivants:

$$\mathbb{F}(t, t') = \partial \mathbf{x}(t) / \partial \mathbf{x}(t') \quad (105)$$

$$\mathbb{C}(t, t') = \mathbb{F}^t(t, t') \cdot \mathbb{F}(t, t') \quad (106)$$

$$\mathbb{E}(t, t') = 0.5 (\mathbb{C}(t, t') - \mathbb{1}) \quad (107)$$

$\mathbb{F}$ ,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{E}$  sont les tenseurs gradient de la transformation, tenseur de Cauchy Green droit et tenseur de Green Lagrange.

Dans le cas d'un matériau incompressible, on écrit alors :

$$\mathbb{T}(t) = -p\mathbb{1} + \int_{-\infty}^t \mathbb{F}(t, t') \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}(t, t')} \cdot \mathbb{F}^t(t, t') dt' \quad (108)$$

$\mathbb{T}(t)$  est la contrainte de Cauchy.

L'intégrale est ensuite transposée dans la configuration actuelle  $C_t$ .

On définit alors

$$\mathbb{F}(t') = \partial \mathbf{x}(t') / \partial \mathbf{x}(t) = \mathbb{F}^{-1}(t, t') \quad (109)$$

La forme originale de l'équation de BKZ est obtenue:

$$\mathbb{T}(t) = -p\mathbb{1} + \int_{-\infty}^t \mathbb{F}^{-1}(t') \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbb{E}(t, t')} \cdot \mathbb{F}^{-t}(t') dt' \quad (110)$$

Lodge, Kaye modifièrent cette loi et aboutirent aux modèles portant leurs noms [Tanner, 1998].

[Simo, 1987], [Govindjee et al. 1992] développe un modèle proche de celui de BKZ. Il est basé sur la décomposition additive des contraintes en contrainte initiale (élastique) et hors-équilibre (viscoélastique), sur le découplage des réponses volumiques et déviatoriques et sur une équation de viscosité linéaire. Ce modèle présente l'avantage, par rapport au modèle de BKZ, de n'être pas restreint à l'hypothèse d'isotropie de la réponse.

## Le modèle de Septanika et Ernst [Septanika et al., 1998]

Septanika et Ernst modélisent le comportement d'un élastomère présentant des déformations irréversibles, des relaxations de contraintes, du fluage, des déformations rémanentes et du vieillissement par une loi hyperélastique couplée à des modèles dépendants du temps [Septanika et al., 1998]. Ils distinguent le comportement dépendant du temps à 'court terme', assimilé à l'effet Mullins, du comportement dépendant à 'long terme', assimilé au comportement en relaxation et en vieillissement.

L'aspect hyperélastique est modélisé par un modèle à 8 chaînes. L'aspect 'court terme' est modélisé par une loi d'endommagement empruntée à Simo [Simo, 1987]. L'aspect 'long terme' est décrit par un modèle d'altération du réseau développé par Tobolsky [Green et al., 1946]. Cette théorie considère que l'élastomère qui a changé d'état, c'est-à-dire qui a subi une déformation ou une contrainte mécanique, forme un nouveau réseau, différent du réseau initial. Ce dernier est le résultat d'une destruction partielle du réseau initial ainsi que d'une re-formation d'un réseau différent. Ces phénomènes de destruction et re-formation sont contrôlés par une fonction de relaxation (rupture des chaînes) et une fonction de croissance (re-formation des liaisons).

Ainsi, un matériau à l'instant  $t$  comprend une portion de réseau initial  $\Phi_0$  et une portion  $\Phi_i$  de réseau différent du réseau initial. Les auteurs définissent un tenseur gradient de la transformation de la portion  $\Phi_i$ .

$$\mathbb{F}_{\Phi_i} = \mathbb{F}_r(t, \tau) \quad (111)$$

Il s'agit du tenseur gradient de transformation 'relative' au temps  $t$  par rapport au temps  $\tau$  ( $t > \tau$ ). Ils montrent également que :

$$\mathbb{F}_r(t, \tau) = \mathbb{F}(t) \cdot \mathbb{F}^{-1}(\tau) \quad (112)$$

La partie déviatorique de l'énergie libre du matériau global  $\Psi_0$  peut s'écrire :

$$\Psi_0 = (\Psi_d)_{\Phi_0} + \sum_{i=1}^N (\Psi_d)_{\Phi_{\tau i}} \quad (113)$$

$(\Psi_d)_{\Phi_{\tau i}}$  concerne les portions de matériau dont la microstructure est reformée dans l'intervalle de temps  $[t_{i-1}, t_i]$ .

D'autre part, le nombre de chaînes  $n_0(t)$  actives au temps  $t$  dans le réseau  $\Phi_0$  est décrit par :

$$n_0(t) = n_0 R(t) \quad (114)$$

$R(t)$  est une fonction de relaxation (chaînes rompues)

Le nombre de chaînes  $n_i$  du réseau  $\Phi_i$  formées dans l'intervalle de temps  $[t_{i-1}, t_i]$  est décrit par :

$$n_i(t) = n_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (115)$$

$P(t)$  est une fonction de croissance (re-formation de chaînes actives)

Ainsi,  $n_i(t-t_i)$ , représentant le nombre de chaînes du réseau  $\Phi_i$  actives au temps  $t$  est décrit par

$$n_i(t-t_i) = n_0 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\partial P(\tau)}{\partial \tau} d\tau R(t-t_i) \quad (116)$$

En conclusion de l'article, les auteurs simulent correctement des essais de relaxation et de fluage, mais pas d'essais de traction uniaxiale cyclique.

Ce modèle, qui fait intervenir une intégrale, une fonction de relaxation et un transport des tenseurs de déformation est proche du modèle de BKZ et du modèle que nous avons utilisé. En effet, la dépendance du nombre de chaînes par rapport au temps s'identifie à la dépendance des coefficients d'élasticité  $C_{ij}$  du modèle de Rivlin généralisé avec le temps (séries de Prony).

## L'approche utilisée dans ce travail

L'approche que nous avons retenue est proche de celle utilisée dans le code de calcul Abaqus [Abaqus, 5.8], elle-même proche de l'équation de BKZ (équation (110)).

La théorie repart de la relation établie aux petites déformations, équation (102) – cas d'un matériau isotrope -. Elle utilise

$$\mathbb{E}^D(t-t') = 1/G_0 \mathbb{T}_0^D(t-t') \quad (117)$$

$G_0$  est le module de cisaillement instantané et  $\mathbb{T}_0$  la contrainte instantanée.

Le module de cisaillement  $G$  se relaxe selon une **série de Prony**.

$$G(t) = G_0 \cdot \left[ g_\infty + \sum_1^n g_i \cdot e^{\frac{-t}{\tau_i^G}} \right] \quad (118)$$

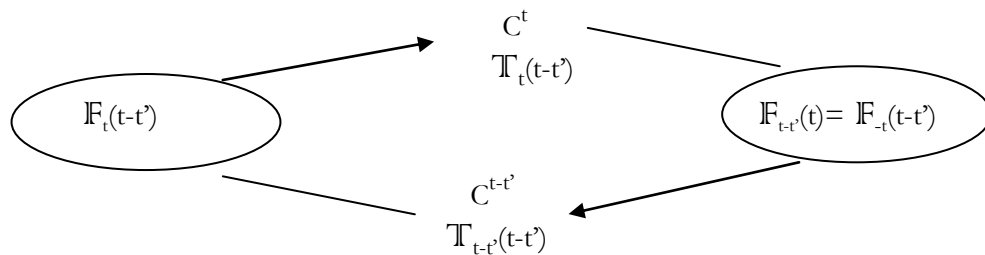
La relation de la contrainte déviatorique devient alors (en petites déformations) :

$$\mathbb{T}^D(t) = G_0 \mathbb{E}^D(t) + \int_0^t \frac{\dot{G}(t')}{G_0} \mathbb{T}_0^D(t-t') dt' \quad (119)$$

Notons, comme précédemment, que dans la cadre de l'élasticité non linéaire, le module  $G$  est dépendant de la déformation . Le principe de superposition de Boltzman et l'intégration par parties sont donc basés sur des hypothèses non respectées. D'autre part, le rapport  $\dot{G} / G_0$  ne peut être exprimé simplement. Le raisonnement est cependant poursuivi et la relation est 'généralisée aux grandes déformations' [Abaqus, 5.8], [Bernstein, 1963].

Nous interprétons cette 'généralisation' comme un transport de la contrainte  $\mathbb{T}_0(t-t')$ , exprimée dans la configuration  $C^t$ , dans la configuration  $C^{t-t'}$ .

Le schéma de la Fig. 3.13 illustre ce transport.



**Figure 3.13** – Transport de  $\mathbb{T}_t(t-t')$  de  $C^t$  dans  $C^{t-t'}$

Ceci permet d'écrire :

$$\mathbb{T}_{0 \ t-t'}(t-t') = \mathbb{F}_{t-t'}(t) \cdot \mathbb{T}_{0 \ t}(t-t') \cdot \mathbb{F}_t(t-t') = \mathbb{F}_t^{-1}(t-t') \cdot \mathbb{T}_{0 \ t}(t-t') \cdot \mathbb{F}_t(t-t') \quad (120)$$

La relation est alors obtenue:

$$\mathbb{T}(t) = \mathbb{T}_0(t) + \int_0^t \frac{\dot{\mathbf{G}}(t')}{\mathbf{G}_0} \mathbb{F}_t^{-1}(t-t') \cdot \mathbb{T}_0(t-t') \cdot \mathbb{F}_t(t-t') dt' \quad (121)$$

En remplaçant le module  $G(t)$  par sa série de Prony, on obtient:

$$\mathbb{T}(t) = \mathbb{T}_0(t) - \sum_{i=1}^n \mathbb{T}_i(t) \quad \text{avec}$$

$$\mathbb{T}_i(t) = \frac{g_i}{\tau_i} \int_0^t \mathbb{F}_t^{-1}(t-t') \cdot \mathbb{T}_0(t-t') \cdot \mathbb{F}_t(t-t') e^{-\frac{t'}{\tau_i}} dt' \quad (122)$$

$\mathbb{T}_i(t)$  est dite contrainte interne.

Ce développement a été mené dans le cas de la contrainte déviatorique. Le même raisonnement peut être appliqué à la contrainte sphérique. Ce dernier est utile pour la modélisation du comportement du polyuréthane compressible.

Le module de compressibilité  $K(t)$  est également décrit par une série de Prony :

$$K(t) = K_0 \cdot \left[ k_\infty + \sum_1^n k_i \cdot e^{-\frac{t}{\tau_i^k}} \right] \quad (123)$$

Le calcul de  $\mathbb{T}_i(t+\Delta t)$  fait intervenir les grandeurs suivantes [Abaqus, 5.8]:

$$\Delta \mathbb{F} = \mathbb{F}_t(t+\Delta t) \quad (124)$$

$$\Delta \mathbb{F}^{-1} = \mathbb{F}_{t+\Delta t}(t) \quad (125)$$

$$\gamma_i^D = \exp(-\Delta t / \tau_i^D), \quad \alpha_i^D = 1 - \tau_i^D / \Delta t (1 - \gamma_i^D), \quad \beta_i^D = \tau_i^D / \Delta t (1 - \gamma_i^D) - \gamma_i^D \quad (126)$$

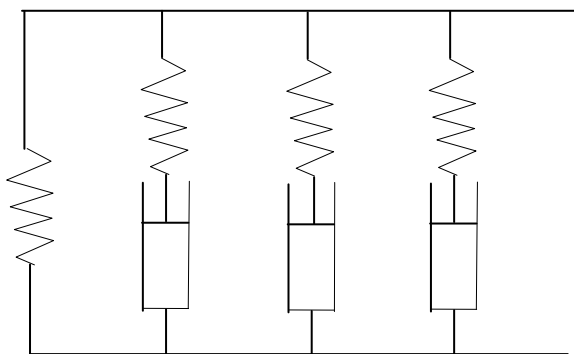
$$\gamma_i^H = \exp(-\Delta t / \tau_i^H), \quad \alpha_i^H = 1 - \tau_i^H / \Delta t (1 - \gamma_i^H), \quad \beta_i^H = \tau_i^H / \Delta t (1 - \gamma_i^H) - \gamma_i^H \quad (127)$$

L'équation finale est:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(t+\Delta t) = & (1 - \sum_1^N \alpha_i^D g_i) \mathbb{T}_0^D(t+\Delta t) + (1 - \sum_1^N \alpha_i^H k_i) \mathbb{T}_0^H(t+\Delta t) \\ & - \sum_1^N \beta_i^D g_i \hat{\mathbb{T}}_0^D(t) - \sum_1^N \beta_i^H k_i \hat{\mathbb{T}}_0^H(t) \\ & - \sum_1^N \gamma_i^D g_i \hat{\mathbb{T}}_i^D(t) - \sum_1^N \gamma_i^H g_i \hat{\mathbb{T}}_i^H(t) \end{aligned} \quad (128)$$

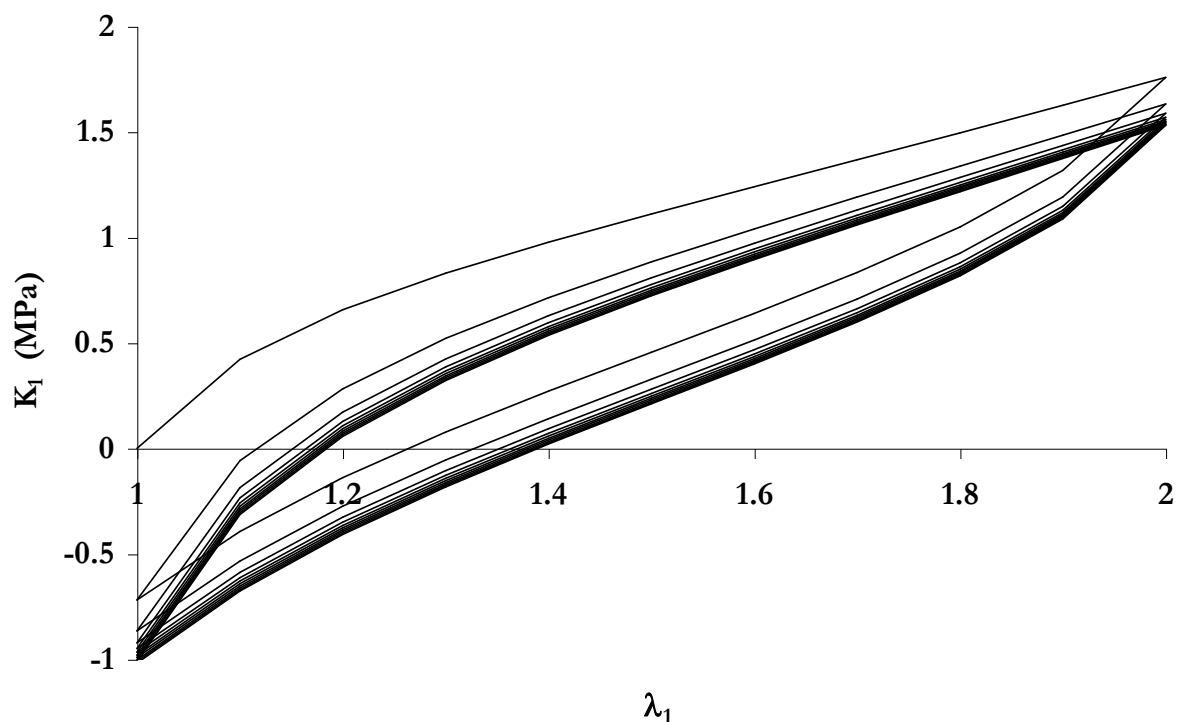
$$\text{avec } \hat{\mathbb{T}}_i^D(t) = \text{SYM}(\Delta \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}_i(t) \cdot \Delta \mathbb{F}^{-1}) \quad (129)$$

Le modèle ainsi exprimé correspond à un modèle de Maxwell généralisé – Fig. 3.14 -. Les amortisseurs sont en parallèle et ont chacun des paramètres  $(g_i, \tau_i)$  différents.



**Figure 3.14** – Illustration du modèle rhéologique de Maxwell généralisé

Un essai de traction-compression uniaxiale cyclique est calculé avec les équations détaillées ci dessus – Fig. 3.15 -. Ce modèle permet de simuler l'hystérésis des cycles et la déformation progressive.



**Figure 3.15** – Modèle viscoélastique avec approche fonctionnelle – Simulation d'un essai de traction uniaxiale cyclique

Cette loi a été implantée dans le code de calcul par éléments finis ZéBuLon [Zset, 1999].

Les variables  $(g, \tau_i^D)$  pour la partie déviatorique et  $(k, \tau_i^H)$  pour la partie sphérique sont les paramètres à optimiser. Le code de calcul ZéBuLon laisse la possibilité de leur donner des valeurs différentes.

Notons que dans le cas du SBR incompressible, la contrainte sphérique est indéterminée et constitue un degré de liberté géré lors du calcul par la condition d'équilibre. Les contraintes sphériques ainsi que leur relaxation ne peuvent donc pas être contrôlées par l'utilisateur.

### 3.2.6 - Les lois viscoélastiques : l'approche par variables internes

Cette approche a été développée à partir des travaux de [Germain, 1986], [Sidoroff, 1974, 1975a, 1975b, 1980]... Elle a été étudiée et utilisée par plusieurs auteurs [Carpentier-Gabrielli, 1995], [Andrieux, 1996], ... Elle utilise un formalisme plus rigoureux que l'approche fonctionnelle décrite précédemment car elle n'est pas basée sur une extension de la viscoélasticité linéaire.

Le premier paragraphe décrit le cadre thermodynamique développé par Germain pour mettre en place les modèles à variables internes. Le second montre l'application de la méthode de l'état local pour générer des lois de comportement et lois complémentaires. Le troisième paragraphe décrit le modèle de Poynting Thomson généralisé aux transformations finies et en trois dimensions. Ce modèle est utilisé pour décrire le comportement du SBR chargé de silice.

#### Cadre thermodynamique : méthode de l'état local associé

Les rappels présentés sont principalement extraits du cours de [Germain, 1986], [Sidoroff, 1974, 1975a, 1975b], [Lemaître et al., 1985]. Des éléments supplémentaires proviennent des thèses [Carpentier-Gabrielli, 1995] et [Andrieux, 1996].

Si l'on classe les matériaux selon la qualité de leur « mémoire », les matériaux viscoélastiques appartiennent à la classe des matériaux à mémoire continue. Leur comportement est intermédiaire entre le comportement des systèmes à mémoire privilégiée (on peut par exemple citer les matériaux élastiques, qui ne se souviennent que de leur état de référence) et les systèmes à mémoire instantanée (citons les fluides, dont l'état ne dépend que de l'évolution à l'instant  $t$ ). Ces deux derniers cas sont correctement décrits par la thermodynamique appliquée à la mécanique des milieux continus - § 1.1 -. Les matériaux à mémoire continue nécessitent par contre une extension des notions de thermodynamique. Deux types de théories ont été développés pour répondre à ce besoin. Les premières sont dites « rationnelles ». Les deuxièmes, considérées comme plus prometteuses, introduisent l'hypothèse de l'état local associé [Germain, 1986].

L'idée de cette théorie est d'ajouter aux variables thermodynamiques habituellement considérées pour décrire l'état thermodynamique du système,  $\varepsilon_{ij}$  et  $\theta$  pour un milieu élastique par exemple, des variables supplémentaires, dites variables internes permettant de décrire la mémoire continue du système. Les lois sont alors constituées par des lois d'état et des lois complémentaires.

[Germain-86] énonce l'hypothèse de l'état local comme suit :

*A tout instant  $t$  fixé, on peut attacher à toute particule  $(n+1)$  variables ou paramètres  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$ , définissant un système thermostatique associé à cette particule et tels que l'énergie interne spécifique  $e$ , l'entropie spécifique  $s$ , la température absolue  $\theta$  (et plus généralement toutes les grandeurs de la classe  $T$  ( $e, s, \phi, \dots$ )) de cette particule à l'instant  $t$  soient données en fonction de  $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$  par les mêmes  $e(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ ,  $s(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ ,  $\theta(\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n)$ , expressions valables pour tout le système thermostatique.*

### Variables d'état

Les variables thermodynamiques ou variables indépendantes ou **variables d'état** servent à décrire l'état du milieu matériel. La qualité de cette description dépend donc du choix de la nature et du nombre de variable d'états.

On distingue les variables observables et les variables internes.

Les **variables observables** ou externes sont celles utilisées dans la description de la thermodynamique des milieux continus. On peut citer la température  $\theta$ , l'entropie  $\eta$ , le tenseur de Green-Lagrange  $\mathbb{E}$ ,...

Les **variables internes** contiennent la « mémoire » des événements passés. Leur valeur au temps  $t$  considéré dépend de l'histoire du milieu.

### Potentiel thermodynamique et lois d'état

Il faut décrire un potentiel thermodynamique fonction des variables d'état observables et internes ( $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_n$ ).

Prenons par exemple  $\chi_0 = \eta$ , la fonction  $e(\eta, \chi_1, \dots, \chi_n)$  exprimant l'énergie interne spécifique est un potentiel :

$$de = \theta d\eta + \sum_{p=1}^N v_p d\chi_p \quad (130)$$

$\chi_p$  et  $v_p$  conduisent à des évolutions indépendantes (dites 'normales').

On a alors

$$\theta = \frac{\partial e}{\partial \eta}(\eta, \chi_1, \dots, \chi_n) \quad (131)$$

$$v_p = \frac{\partial e}{\partial \chi_p}(\eta, \chi_1, \dots, \chi_n) \quad (132)$$

$\theta$  et  $v_p$  sont les variables forces associées respectivement aux variables  $e$  et  $\chi_p$ .

Les équations (131) et (132) constituent des **lois d'état**.

De même, si l'on décrit à l'aide de l'énergie libre spécifique,  $\psi(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n)$  on aura :

$$d\psi = -\eta d\theta + \sum_{p=1}^N v_p d\chi_p \quad (133)$$

On a alors

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n) \quad (134)$$

$$v_p = \frac{\partial \psi}{\partial \chi_p}(\theta, \chi_1, \dots, \chi_n) \quad (135)$$

Les expressions (134) et (135) sont des lois d'état équivalentes à (131) et (132).

Plus généralement, on peut faire appel à d'autres potentiels thermodynamiques pour décrire les lois d'état.

$$\Lambda_k = \frac{\partial \psi}{\partial v_k} \quad (136)$$



$A_k$  est la variable force thermodynamique associée à la variable d'état  $v_k$ .

### **Dissipation - Lois complémentaires**

Les lois d'état énoncées ci-dessus sont insuffisantes pour décrire complètement le comportement du milieu.

En effet, si la variable  $v_k$  est une variable interne, la loi d'état permet de définir sa force associée  $A_k$  mais ne permet pas de définir son évolution. Il faut mettre en place une loi reliant ces deux variables.

On définit un pseudo-potential de dissipation, fonction des variables flux  $\varpi_k$  et éventuellement des variables d'état  $\dot{v}_k$

$$\varphi = \varphi(\varpi_k, \dot{v}_k) \quad (137)$$

Les lois complémentaires dérivent de la propriété de normalité :

$$A_k = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{v}_k} \quad (138)$$

Le potentiel  $\varphi^*$ , dual de  $\varphi$  par rapport aux variables  $(\varpi_k, A_k)$  permet d'exprimer les lois complémentaires sous la forme de lois d'évolution des variables flux en fonction des variables duales et non l'inverse.

Les *lois complémentaires* d'évolution s'écrivent alors :

$$-\dot{v}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} \quad (139)$$

En mettant le potentiel de dissipation  $\Phi$  sous la forme de  $m$  produits de facteurs et en utilisant les relations de Casimir-Onsager [Germain, 1986], on montre que la thermodynamique des processus irréversibles apparaît comme un cas particulier de la thermodynamique des processus à dissipation normale, avec  $\varphi=2\Phi$ .

Les développements sont décrits dans [Germain, 1986]. Notons que le potentiel  $\Phi$  est positif et nul à l'origine : il est donc thermodynamiquement admissible [Andrieux, 1996].

## **L'approche par variables internes : Etablissement des lois de comportement**

L'approche par variables internes se base sur la méthode de l'état local décrite ci-dessus et sur la généralisation aux grandes déformations des modèles rhéologiques introduite par Sidoroff [Sidoroff, 1974, 1975a, 1975b, 1980]. La difficulté de cette généralisation provient de la non-additivité des tenseurs de déformation aux grandes transformations. La notion d'état intermédiaire, utilisée dans les modèles de plasticité, est étendue à ce domaine.

Le gradient de déformation  $\mathbb{F}$  est décomposé en une partie dite élastique  $\mathbb{F}^e$  et une partie dite anélastique  $\mathbb{F}^a$ , telles que :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F}^e \cdot \mathbb{F}^a \quad (140)$$

$\mathbb{F}^a$  est dépendant de l'histoire passée du matériau,  $\mathbb{F}^e$  ne l'est pas.

Cette décomposition multiplicative du tenseur gradient correspond, dans l'hypothèse des petites déformations, à l'additivité des vitesses de déformation classiquement utilisée dans la théorie de la plasticité.

Appliquons la méthode de l'état local à une transformation du type  $\mathbb{F}^c \cdot \mathbb{F}^a$ .

Pour des raisons d'invariance de la loi lors de la rotation du référentiel, nous choisissons d'utiliser une approche lagrangienne. Le tenseur droit de Cauchy-Green  $\mathbb{C}$  et la température  $\theta$  comme variables observables, et le tenseur  $\mathbb{C}^a$ , tel que  $\mathbb{C}^a = (\mathbb{F}^a)^t \cdot \mathbb{F}^a$  est alors défini comme variable interne. Ces variables doivent permettre la description de l'histoire du matériau jusqu'au temps  $t$  considéré.

La dissipation s'écrit – équation (30) - :

$$\Phi_0 = -\rho_0 (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} + \mathbb{S} : \dot{\mathbb{E}} \geq 0 \quad , \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \quad (141)$$

$\psi$  est l'énergie libre interne spécifique,  $\eta$  est l'entropie spécifique,  $\mathbf{Q}$  est l'apport spécifique de chaleur,  $\mathbf{G} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}}$ ,  $\mathbb{S}$  est le tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff n°2 et  $\mathbb{E}$  est le tenseur de déformation de Green Lagrange.

Le potentiel  $\psi$  s'écrit en fonction des variables d'état  $(\mathbb{C}, \theta, \mathbb{C}^a)$  :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}} : \dot{\mathbb{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}^a} : \dot{\mathbb{C}}^a + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (142)$$

Or  $\dot{\mathbb{C}} = 2 \cdot \dot{\mathbb{E}}$ ,  $\dot{\mathbb{C}}^a = 2 \cdot \dot{\mathbb{E}}^a$ , on a alors

$$\dot{\psi} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}} : \dot{\mathbb{E}} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}^a} : \dot{\mathbb{E}}^a + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (143)$$

La dissipation (52) devient :

$$\Phi_0 = (\mathbb{S} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}}) : \dot{\mathbb{E}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}^a} : \dot{\mathbb{E}}^a - \rho_0 (\eta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G} \geq 0 \quad , \quad \mathbf{G} = \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{X}} \quad (144)$$

Si l'on considère que la dissipation thermique est nulle et que les déformations (totales et anélastiques) sont seules responsables de la dissipation, on a

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

et

$$\Phi_0 = (\mathbb{S} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}}) : \dot{\mathbb{E}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}^a} : \dot{\mathbb{E}}^a \quad (145)$$

La dissipation peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi_0 = \mathbb{S}^v : \dot{\mathbb{E}} + \mathbb{S}^a : \dot{\mathbb{E}}^a \quad (146)$$

$$\text{avec } \mathbf{S} = \mathbf{S}^e + \mathbf{S}^v, \quad \mathbf{S}^e = 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \quad \mathbf{S}^a = -2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}^a}$$

D'autre part, si l'on considère que  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}^a$  sont indépendants de la température, on a :

$$\mathbf{S}^a = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbf{C}}^a} = 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \dot{\mathbf{C}}^a} \quad (147)$$

Les *équations d'état et l'équation complémentaire* sont alors obtenues :

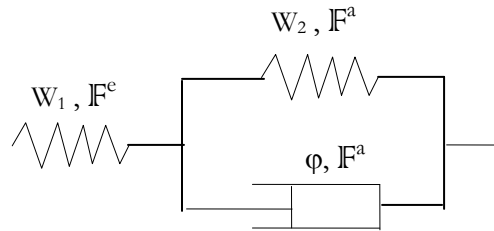
$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \mathbf{S}^e &= 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \\ \mathbf{S}^a &= -2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}^a} = 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \dot{\mathbf{C}}^a} \end{aligned} \quad (148)$$

## Le modèle de Poynting-Thomson généralisé aux grandes transformations

L'aspect viscoélastique du comportement du SBR chargé est identifié sur un modèle de Poynting-Thomson généralisé aux grandes transformations. Cette approche est développée en complément de l'approche fonctionnelle car elle ne correspond pas à une extension de la viscoélasticité linéaire et nous semble ainsi plus rigoureuse. Les deux types de lois, mis en œuvre sur le code de calcul, pourront être comparés et discutés.

### Présentation du modèle

Le schéma rhéologique du modèle de Poynting-Thomson est le suivant :



**Figure 3.16** – Schéma du modèle rhéologique de Poynting-Thomson

$W_1$  et  $W_2$  sont les potentiels hyperélastiques représentés par les ressorts. Ils sont représentés par des fonctions polynomiales des invariants de leurs tenseurs des dilatations de Cauchy-Green droits respectifs (approche de Rivlin). Le potentiel  $W_1$  est développé au second ordre dans le code. Le potentiel  $W_2$  est développé au premier ordre seulement afin de réduire la taille des équations.

$$W_1 = C_{10}^e (I_1^e - 3) + C_{01}^e (I_2^e - 3) + C_{20}^e (I_1^e - 3)^2 \quad (149)$$

$$W_2 = C_{10}^a (I_1^a - 3) + C_{01}^a (I_2^a - 3) \quad (150)$$

Les coefficients  $C_{ij}^e$  représentent la partie hyperélastique du comportement. Les coefficients  $C_{ij}^a$  attachés au ressort en parallèle avec l'amortisseur représentent la partie viscoélastique (ou anélastique) du modèle. Ces coefficients sont les paramètres à optimiser.

$\varphi$  est le pseudo-potentiel de dissipation représenté par le patin. Il est choisi de la forme [Boukamel et al., 1997]:

$$\varphi = \frac{1}{2} f_a \dot{C}^a : \dot{C}^a \quad (151)$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{C}^a} = f_a \dot{C}^a \quad (152)$$

### Réécriture des équations

Dans le paragraphe précédent, les variables d'état sont choisies :  $(C, \theta, C^a)$ . Les variables forces thermodynamiques associées sont alors  $(S, \eta, S^a)$ . Ce choix implique que les deux variables  $C$  et  $C^a$  sont indépendantes. On peut donc écrire

$$\frac{\partial C}{\partial C^a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_2}{\partial C} = 0 \quad (153)$$

Les équations d'état et équation complémentaire sont alors :

$$S = 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial C} = 2 \rho_0 \frac{\partial W_1}{\partial C} \quad (154)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{C}^a} + \frac{\partial W_1}{\partial C^a} + \frac{\partial W_2}{\partial C^a} = 0 \quad (155)$$

L'hypothèse d'incompressibilité impose que les contraintes de Cauchy sont connues à une pression

hydrostatique près. Les termes  $pC^{-1}$  et  $qC^{a-1}$  sont alors ajoutés aux contraintes  $S$  et  $S^a$  respectivement.

Les calculs des termes de ces équations sont fastidieux. Ils sont présentés en annexe 3B.

La loi de comportement et l'équation complémentaire sont en final de la forme :

$$S = 2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} + \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \mathbb{1} - \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} C^{a-1} \cdot C \right] \cdot C^{a-1} - pC^{-1} \quad (156)$$

$$\dot{\mathbb{C}}^a - \mathbb{C}^{a-1} \cdot \mathbb{C} \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} + \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \mathbb{I} - \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} \mathbb{C}^{a-1} \cdot \mathbb{C} \right] \cdot \mathbb{C}^{a-1} + \left( \frac{\partial W_2}{\partial I_1^v} + \frac{\partial W_2}{\partial I_2^v} I_1^v \right) \mathbb{I} - \frac{\partial W_2}{\partial I_2^v} \mathbb{C}^a - q \mathbb{C}^{a-1} = 0 \quad (157)$$

### Calculs

Les inconnues sont  $\mathbb{C}^a$  (donc  $\dot{\mathbb{C}}^a$ ) et  $\mathbb{S}$ . L'équation complémentaire permet de calculer le tenseur  $\mathbb{C}^a$ , par résolution des équations différentielles. La loi de comportement permet de calculer le tenseur de contraintes  $\mathbb{S}$  connaissant  $\mathbb{C}^a$ .

Le tenseur  $\mathbb{C}$  est symétrique :

$$\mathbb{C}^a = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11}^a & \mathbb{C}_{12}^a & \mathbb{C}_{13}^a \\ \mathbb{C}_{12}^a & \mathbb{C}_{22}^a & \mathbb{C}_{23}^a \\ \mathbb{C}_{13}^a & \mathbb{C}_{23}^a & \mathbb{C}_{33}^a \end{bmatrix}$$

Ce tenseur doit satisfaire aux conditions suivantes :

- $\mathbb{C}^a(t=0) = \mathbb{I}$  : condition initiale
- $\det(\mathbb{C}^a) = 1$  : condition d'incompressibilité

Le tenseur  $\dot{\mathbb{C}}^a$  est par conséquent de la forme :

$$\dot{\mathbb{C}}^a = \begin{bmatrix} \dot{\mathbb{C}}_{11}^a & \dot{\mathbb{C}}_{12}^a & \dot{\mathbb{C}}_{13}^a \\ \dot{\mathbb{C}}_{12}^a & \dot{\mathbb{C}}_{22}^a & \dot{\mathbb{C}}_{23}^a \\ \dot{\mathbb{C}}_{13}^a & \dot{\mathbb{C}}_{23}^a & \dot{\mathbb{C}}_{33}^a \end{bmatrix}$$

Ses composantes vérifient

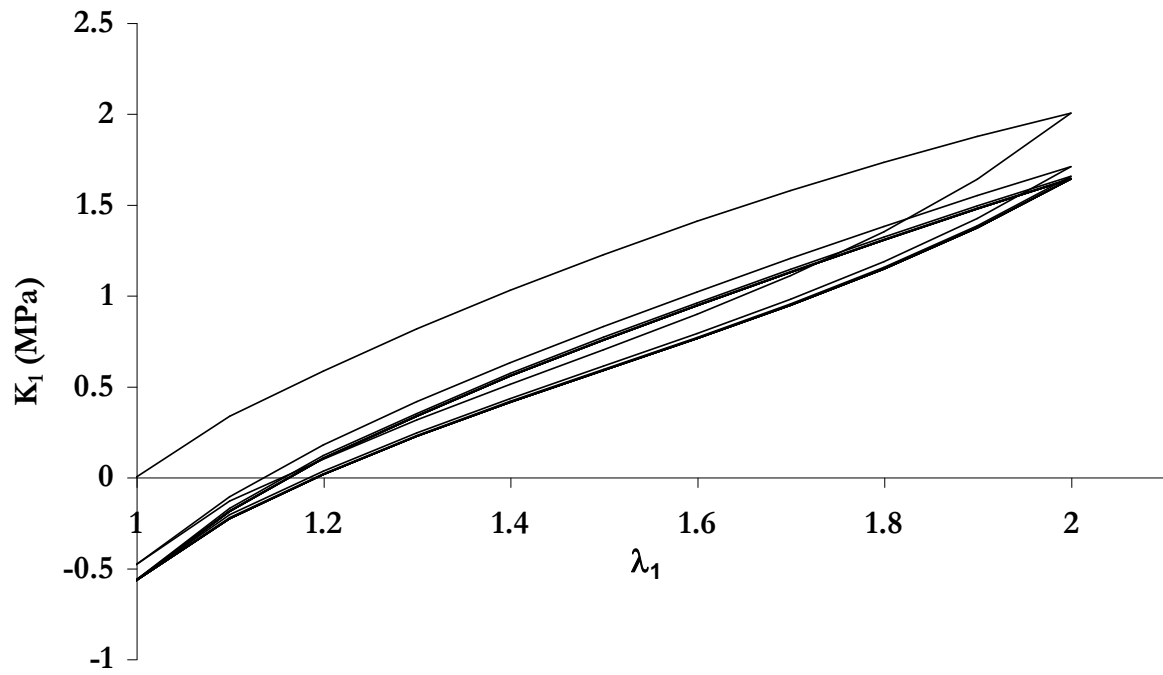
$$\frac{\partial [\det(\mathbb{C}^a)]}{\partial t} = 0 \quad (158)$$

Cette équation permet d'exprimer l'inconnue  $q$  (équation 143) en fonction de  $\mathbb{C}^a$  et  $\dot{\mathbb{C}}^a$ .

Les équations différentielles issues de l'équation complémentaire peuvent ensuite être résolues. Le terme  $\mathbb{C}^a$  est alors explicite et la contrainte  $\mathbb{S}$  peut être calculée d'après l'équation de comportement.

Il apparaît que la variable interne joue le rôle de fonctionnelle d'histoire. Elle intègre l'histoire du mouvement par des relations différentielles (lois d'état et lois complémentaires) [Germain, 1986].

La Fig. 3.17 illustre le comportement de ce modèle sur un essai de traction uniaxiale cyclique.



**Figure 3.17** – Illustration du modèle viscoélastique de Poynting-Thomson généralisé avec approche par variables internes – Simulation d'un essai de traction uniaxiale cyclique

### 3.2.7 - Conclusions

Le tableau de la Fig. 3.18 cite les différentes approches de modélisation qui ont été brièvement présentées dans les derniers paragraphes. La colonne de droite récapitule, dans leurs grandes lignes, les lois qui ont été choisies.

élasticité non linéaire = hyperélasticité	PU cellulaire : potentiel de Mooney SBR chargé de silice : potentiel de Rivlin généralisé
endommagement	SBR : loi d'endommagement discontinu isotrope
élastoplasticité	lois non mises en œuvre au cours de l'étude
viscoélasticité	PU : approche fonctionnelle SBR : approche fonctionnelle approche par variables internes

**Figure 3.18** – Les lois de comportement citées et/ou étudiées pour représenter le comportement du SBR chargé de silice et du PU réticulé cellulaire

Les élastomères que nous étudions (les trois nuances de SBR chargés de silice et le PU réticulé cellulaire) présentent un **comportement élastique non linéaire**. Les lois de comportement se présentent, dans ce cas, sous la forme d'expressions de la densité d'énergie de déformation ou potentiel hyperélastique.

Le comportement du SBR est considéré **quasi-incompressible**, suite aux essais de compression eudiométriques. Nous avons constaté que la déformation volumique de ce matériau sous chargement de traction était de l'ordre de 20% pour des élongations de 3 (cf § 2.2). Cette variation de volume est liée à la cavitation qui se produit autour des agglomérats de silice. L'hypothèse d'incompressibilité est cependant conservée. Nous choisissons d'utiliser le potentiel généralisé de Rivlin pour décrire le comportement élastique non linéaire incompressible du SBR chargé de silice. Ce modèle présente l'inconvénient d'avoir un nombre indéfini de paramètres [Ihleman, 1999]. Leur sélection a été dictée dans notre cas par une étude préliminaire de l'influence des coefficients sur la contrainte calculée.

Le PU présente une microstructure cellulaire. Son comportement est compressible, que la sollicitation soit de traction ou de compression. Il est décrit par un potentiel de Mooney. Ce modèle permet de calculer la contrainte hydrostatique et la déformation volumique mais ne permet pas de simuler la rigidification associée à la compaction du matériau. Trois coefficients sont à identifier.

Les **modèles d'endommagement** traduisent l'adoucissement des contraintes lorsque l'élastomère subit des étirements successifs.

Nous avons mis en évidence un adoucissement, non récupérable à température ambiante, du SBR chargé de silice. Cet adoucissement a lieu essentiellement au cours de la première montée en charge et dépend de l'élongation maximale vue par le matériau. Nous le modélisons par une variable d'endommagement discontinu [Miche, 1995], qui se présente sous la forme d'une fonction de saturation et qui dépend de l'élongation principale maximale vue par le matériau au cours de son histoire (généralisation en trois dimensions). De plus, l'endommagement est supposé isotrope. Notons qu'il ne permet pas de simuler de déformation rémanente liée au réarrangement microstructural du matériau, ni sa variation de volume liée à la cavitation (cette dernière est par ailleurs réversible (chapitre 2, Fig. 2.29) et n'est donc pas directement liée à la variable d'endommagement).

Les **modèles élasto-plastiques** font intervenir la dépendance du comportement vis à vis du chargement. Ils permettent de simuler un hystérésis indépendant du temps sur un nombre infini de cycles (intervention de l'écrouissage), ainsi qu'une déformation rémanente. Ils se justifient, d'un point de vue physique, par la modification de la microstructure du caoutchouc sous l'effet d'un chargement (glissement, rupture et reformation des liaisons charge/charge et charge/chaîne, modification du réseau secondaire de charges).

Ces modèles, bien qu'intéressants, ne sont pas utilisés dans ce travail. Nous avons en effet privilégié la dépendance du comportement par rapport à la vitesse de chargement. Ajouter une quatrième composante

plastique à notre modélisation hyper-viscoélastique endommageable aurait encore augmenté le nombre de paramètres à identifier, et donc la complexité de l'optimisation du modèle global.

Les **modèles viscoélastiques** traduisent la dépendance du comportement des élastomères vis à vis de la fréquence ou du temps. Cet aspect du comportement est lié aux changements de configuration des chaînes macromoléculaires, au mouvement des chaînes polymères les unes par rapport aux autres. Les modèles permettent de simuler la relaxation des contraintes observée lors des essais de relaxation, l'effet de vitesse de chargement, l'hystérésis et la déformation progressive qui apparaissent lors des essais cycliques. Deux approches ont été étudiées et mises en œuvre sur le code de calcul ZéBuLoN : **l'approche fonctionnelle** et l'approche par variables internes. La première approche correspond à une extension de la viscoélasticité linéaire et peut être illustrée, en une dimension, par un modèle de Maxwell généralisé. Chaque amortisseur présente des paramètres (temps de relaxation, poids correspondant) différents. Ce modèle permet de représenter le comportement du matériau sur plusieurs décades de temps. La seconde approche est celle dite '**par variables internes**'. Elle est basée sur la méthode de l'état local associé. Elle peut être illustrée par un modèle de Poyting-Thomson.

Étant donné que, par manque de temps, la composante 'plastique' du comportement (sa dépendance par rapport au chargement) n'a pas été prise en compte, la composante viscoélastique du comportement doit simuler à la fois la part de dissipation indépendante de la vitesse de chargement et la déformation rémanente 'plastique' [Kilian et al., 1994].

Le comportement du SBR chargé de silice sera donc simulé par une loi hyperélastique incompressible, endommageable et viscoélastique.

Le PU réticulé cellulaire sera représenté par une loi hyperélastique compressible, viscoélastique.



### 3.3 - Identification des lois de comportement

Ce chapitre décrit les identifications des lois présentées dans le paragraphe 3.2 et couplées entre elles différemment selon le matériau considéré. Les trois paragraphes sont attribués à la description de l'optimisation de la loi **hyperélastique incompressible – endommageable – viscoélastique avec approche fonctionnelle** du SBR chargé de silice, puis à la celle de la loi **hyperélastique compressible – viscoélastique avec approche fonctionnelle** du PU cellulaire, et enfin à la loi **hyperélastique incompressible – endommageable – viscoélastique avec approche par variables internes** du SBR chargé de silice.

Chaque paragraphe comprend un récapitulatif des lois, une étude de la sensibilité des coefficients sur les contraintes calculées, une présentation des courbes ‘modèles’ qui servent à l'optimisation des paramètres, la procédure adoptée pour l'identification et enfin ses résultats. Une discussion clôt le paragraphe.

#### 3.3.1 - Identification de la loi hyperélastique viscoélastique endommageable du SBRA - Cas de l'intégrale héréditaire

La procédure d'identification est délicate. Il s'agit en effet d'identifier trois «composantes» du comportement : hyperélasticité, endommagement et viscoélasticité. Cette identification nécessite l'optimisation de 10 paramètres, comme nous le verrons par la suite.

Nous avons constaté que l'optimisation simultanée de plus de trois paramètres conduit à un résultat peu satisfaisant. Le problème essentiel est donc d'essayer de découpler les trois «composantes» du comportement sur les essais mécaniques, en choisissant ceux qui font plus intervenir l'une d'elles de façon prépondérante. Les coefficients correspondant sont alors optimisés sur les essais sélectionnés en fixant les autres coefficients à des valeurs prédéfinies. En d'autres termes, choisir les essais pertinents consiste à sélectionner les essais qui activent les ‘bons’ paramètres.

Les paramètres de la loi hyperélastique endommageable sont optimisés dans un premier temps grâce aux essais rapides, considérés comme faisant peu intervenir les propriétés viscoélastiques du matériau. Les paramètres de la loi viscoélastique sont identifiés à partir des essais de relaxation.

Après avoir récapitulé les lois de comportement, nous décrivons une étude préalable permettant de connaître la sensibilité des paramètres sur la contrainte calculée. Cette étude permet également de fixer les bornes d'investigation lors de l'identification des paramètres. Le troisième paragraphe expose les essais choisis pour l'identification. La courbe qui fait apparaître l'hystérésis d'endommagement (découplée de l'hystérésis viscoélastique) est construite à partir de plusieurs essais mécaniques. La procédure adoptée pour l'identification complète de la loi est ensuite détaillée.

Notons que les lois ont été écrites de façon explicite dans un programme informatique pour des états de traction et compression uniaxiales et de traction plane. Les identifications et simulations de ce type d'essais ne nécessitent donc pas de calculs par éléments finis.

#### Récapitulatif des lois

##### Hyperélasticité

Le potentiel de Rivlin généralisé faisant intervenir les coefficients ( $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$ ,  $C_{30}$ ) s'écrit:

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{02}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (159)$$

$I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  sont les invariants du tenseur de Cauchy Green  $\mathbb{C}$ .

$C_{ij}$  sont les paramètres du modèle à identifier.

### **Endommagement**

$$d(F_1) = d_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{(F_1 - 1)}{\eta}\right) \right] \quad (160)$$

$F_1$  est la valeur maximale de l'élongation principale vue par le matériau au cours de son histoire.  
 $d_\infty$  et  $\eta$  sont les paramètres du modèle à identifier.

### **Viscoélasticité – approche par intégrale héréditaire**

Les paramètres à identifier  $g_i$  et  $\tau_i$  sont contenus dans le module de relaxation en cisaillement  $G(t)$ , exprimé par une série de Prony.

$$G(t) = G_0 \cdot \left[ g_\infty + \sum_1^n g_i \cdot e^{\frac{-t}{\tau_i}} \right] \quad (161)$$

$$\text{avec } g_\infty + \sum_{i=1}^n g_i = 1.$$

Seule la dérivée du module de relaxation apparaît dans les équations :

$$\dot{G}(t) = -G_0 \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{-t}{\tau_i} e^{\frac{-t}{\tau_i}} \quad (162)$$

$$\text{avec } \sum_{i=1}^n g_i = 1 - g_\infty. \text{ On impose alors } \sum g_i \leq 1.$$

Dans le cas d'élasticité non linéaire incompressible, la série de Prony est appliquée aux coefficients  $C_{ij}$  de la loi hyperélastique de Rivlin pour le calcul de la contrainte déviatorique seulement. En effet, le module de compressibilité  $K(t)$  n'est pas exprimé dans le cas des éléments quasi-incompressibles puisque cette contrainte constitue un degré de liberté géré lors du calcul par la condition d'équilibre des forces et des moments sur chaque nœud.

## **Sensibilité des coefficients sur les contraintes – Choix des bornes d'investigation**

Des chargements de traction/compression uniaxiale et de traction plane sont appliqués à des éléments de volume. Les calculs des contraintes sont menés avec différents jeux de coefficients. Cette étude préalable permet de connaître l'influence des paramètres sur les contraintes calculées, selon le type de chargement (traction uniaxiale, traction plane, compression uniaxiale), selon l'élongation maximale imposée et selon la vitesse de sollicitation. Elle guide ainsi le choix des bornes d'investigation imposées aux coefficients lors de leur identification.

### **Hyperélasticité – Influence des $C_{ij}$**

F. Laraba a étudié la sensibilité des coefficients sur les efforts de traction uniaxiale et plane [Laraba, 1996]. Elle a montré que l'influence du coefficient  $C_{30}$  n'est notable que pour des élongations supérieures à 2.5 et qu'il permet de simuler la deuxième inflexion de la courbe  $(K_1, \lambda_1)$ . Etant donné le domaine d'élongation investi au cours de notre étude (élongations comprises entre 0.5 et 3), nous considérons qu'un développement du second ordre du potentiel de Rivlin généralisé est suffisant.

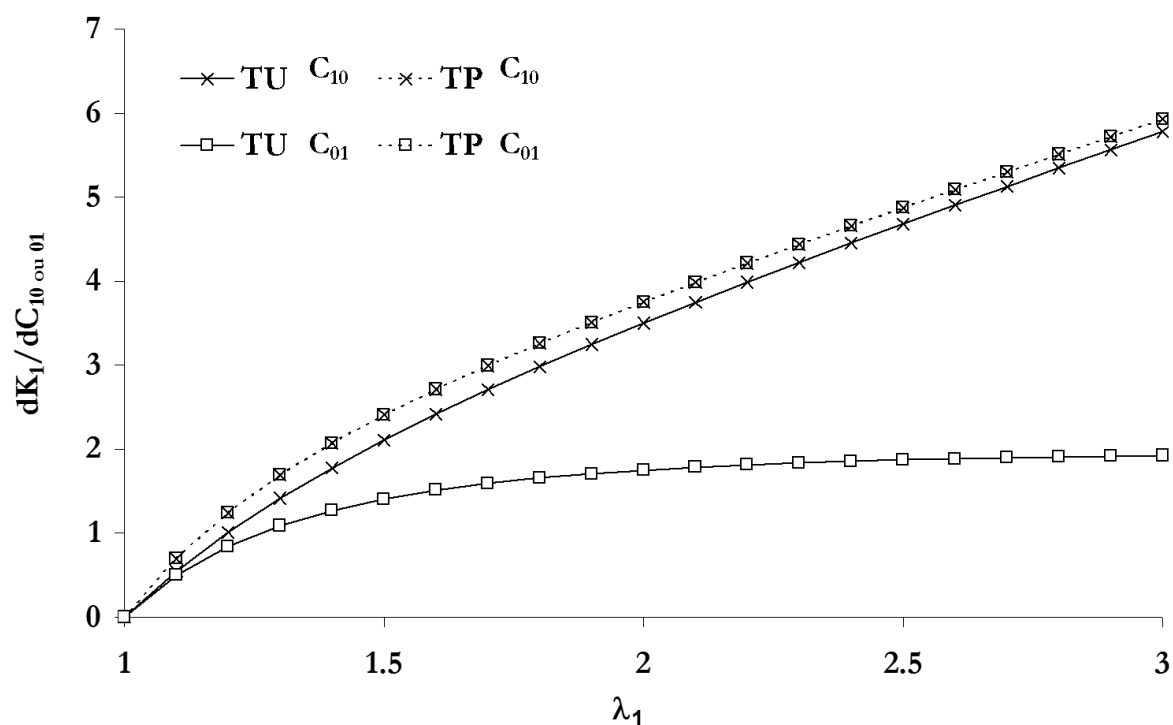
Nous reprenons quelques uns des résultats de F. Laraba. La contrainte Piola Kirchoff 1 de traction ou compression uniaxiale  $k_{TU}$  et de traction ou compression plane  $k_{TP}$  est alors dérivée par rapport à  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$  – tableau de la Fig. 3.19 -.

Cas Traction Uniaxiale $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{pmatrix}$	Cas Traction Plane $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$
$\frac{\partial k_{TU}}{\partial c_{10}} = 2.(\lambda - 1/\lambda^2)$	$\frac{\partial k_{TP}}{\partial c_{10}} = 2.(\lambda - 1/\lambda^3)$
$\frac{\partial k_{TU}}{\partial c_{01}} = 2.(\lambda - 1/\lambda^2) (1/\lambda)$	$\frac{\partial k_{TP}}{\partial c_{01}} = 2.(\lambda - 1/\lambda^3)$
$\frac{\partial k_{TU}}{\partial c_{11}} = 6.(\lambda - 1/\lambda^2)(\lambda - 1/\lambda + 1/\lambda^2 - 1)$	$\frac{\partial k_{TP}}{\partial c_{11}} = 4.(\lambda - 1/\lambda^3).(\lambda^2 - 2 + 1/\lambda^2)$
$\frac{\partial k_{TU}}{\partial c_{20}} = 4.(\lambda - 1/\lambda^2)(\lambda^2 + 2/\lambda - 3)$	$\frac{\partial k_{TP}}{\partial c_{20}} = 4.(\lambda - 1/\lambda^3).(\lambda^2 - 2 + 1/\lambda^2)$
$\frac{\partial k_{TU}}{\partial c_{02}} = 4.(\lambda - 1/\lambda^2)(2 + 1/\lambda^3 - 3/\lambda)$	$\frac{\partial k_{TP}}{\partial c_{02}} = 4.(\lambda - 1/\lambda^3).(\lambda^2 - 2 + 1/\lambda^2)$

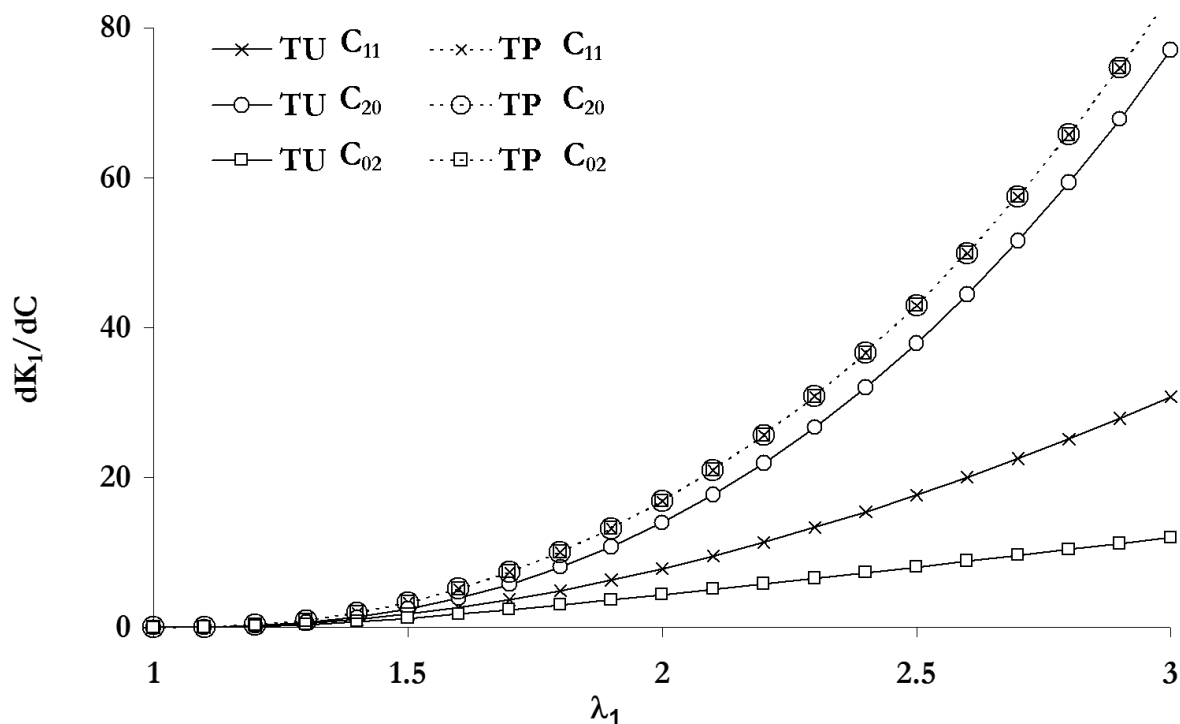
**Figure 3.19** – Tableau des dérivées des contraintes de traction uniaxiale  $k_{TU}$  et traction plane  $k_{TP}$  par rapport aux coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$

Les courbes des dérivées de la contrainte respectivement par rapport à  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{02}$  sont tracées en fonction de l'élongation dans le cas de la traction uniaxiale et de la traction plane – Fig. 3.20 et 3.21 -. Le cas de la compression uniaxiale est également étudié – Fig. 3.22 -. On constate que les influences de  $C_{10}$  et  $C_{20}$  sont quasiment les mêmes en traction uniaxiale et traction plane. Les paramètres  $C_{01}$ ,  $C_{11}$  et  $C_{02}$  ont par contre une influence plus importante sur un état de contraintes de traction plane. Notons que les dérivées de  $k_{TU}$  par rapport à  $C_{11}$  et  $C_{02}$  prennent des valeurs de l'ordre de dix fois supérieures à la dérivée de  $k_{TU}$  par rapport à  $C_{01}$  ou  $C_{01}$ .

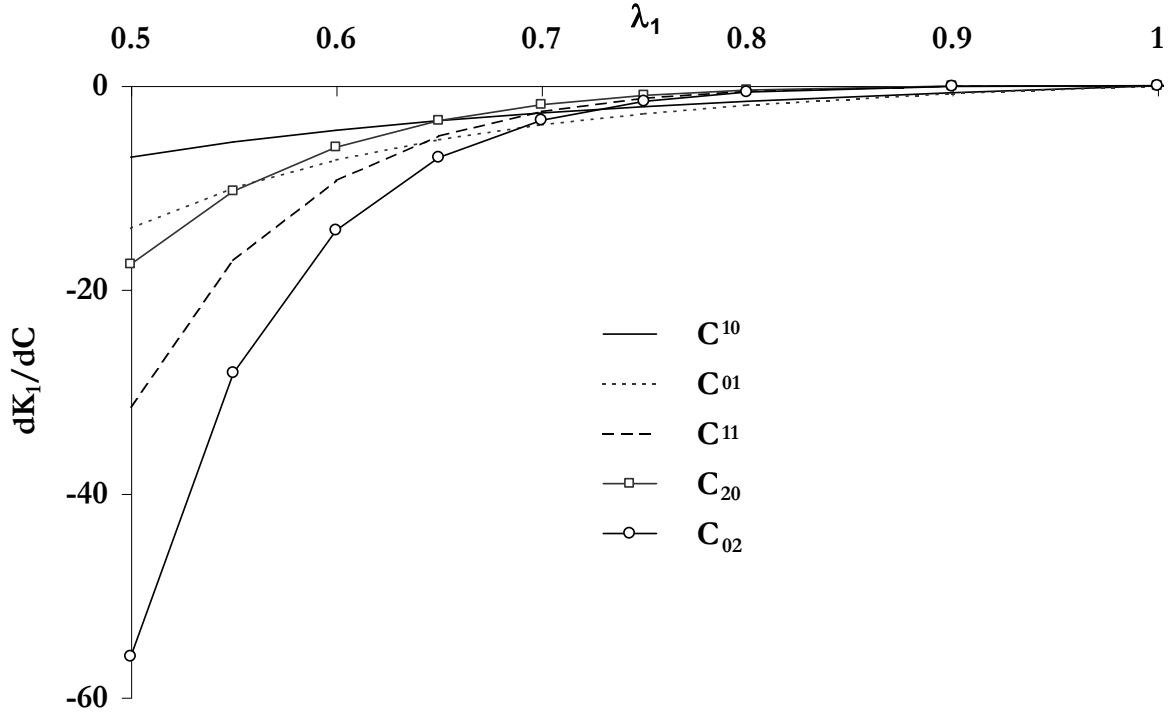
Nous choisissons, à l'aide des réflexions ci-dessus et de quelques essais d'identification, d'utiliser les coefficients  $C_{10}$  pour simuler correctement la pente à l'origine,  $C_{01}$  pour simuler les différences de comportement entre la traction uniaxiale et la traction plane, et  $C_{20}$  pour simuler la légère rigidification des matériaux pour des élongations supérieures à 2.



**Figure 3.20** – Etude de l'influence des coefficients  $C_{10}$  et  $C_{01}$  sur les contraintes de traction uniaxiale (TU) et traction plane (TP) – Expression de la dérivée de la contrainte en fonction de l'élongation



**Figure 3.21** – Etude de l'influence des coefficients  $C_{11}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{02}$  sur les contraintes de traction uniaxiale (TU) et traction plane (TP) – Expression de la dérivée de la contrainte en fonction de l'élongation



**Figure 3.22** – Etude de l'influence des coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{20}$  et  $C_{02}$  sur les contraintes de compression uniaxiale – Expression de la dérivée de la contrainte en fonction de l'élongation

D'autre part, le potentiel d'énergie élastique  $W$  doit obéir aux lois thermodynamiques : l'énergie interne du matériau doit augmenter lorsque celui-ci est sollicité. Ceci est vérifiée si l'équation de stabilité de Drucker est vérifiée :

$$\sum_i d\sigma_i \cdot d\varepsilon_i \geq 0 \quad (163)$$

La stabilité peut être vérifiée au cours du calcul, à chaque point de Gauss et à chaque incrément. Cette vérification est coûteuse en temps de calcul. [Johnson et al., 1994] ont montré que, pour un potentiel hyperélastique d'ordre 2, les conditions suffisantes de stabilité sont :

$$C_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad 4 C_{20} C_{02} - C_{11}^2 \geq 0 \quad (164)$$

Dans le cas que nous étudions (coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{20}$  non nuls), la condition impose donc que tous les coefficients sont positifs.

### Endommagement – Influence de $d_\infty$ et $\eta$

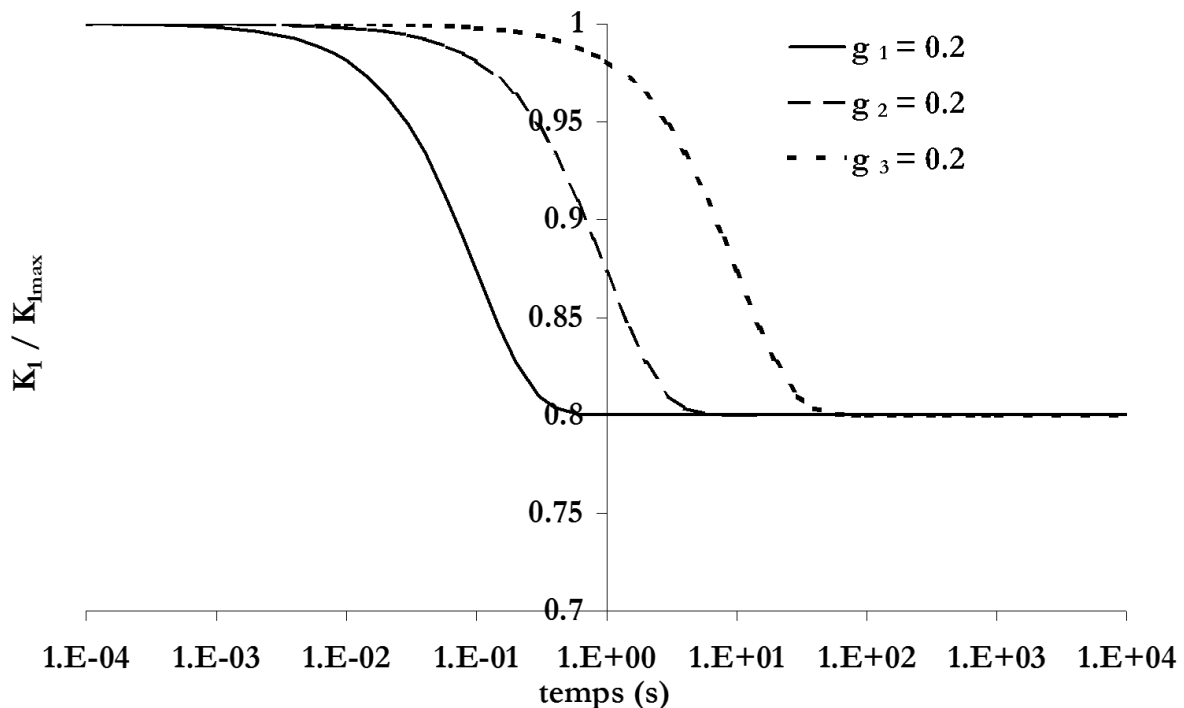
La forme de la cinétique d'endommagement montre que le terme  $d_\infty$  correspond au terme de saturation. Il est donc égal au dommage maximal pouvant être atteint. Il est alors nécessairement compris entre 0 et 1. Le terme  $\eta$  correspond au terme d'évolution. Il est lié à l'élongation à laquelle le dommage est stabilisé. Suite aux observations commentées dans le chapitre 2 sur l'endommagement, ainsi que les observations des essais de traction in situ, nous décidons d'imposer des bornes égales à 0 et 1 pour l'optimisation de  $\eta$ . Ainsi,

$$0 \leq d_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (165)$$

### Viscoélasticité – Influence des $g_i$

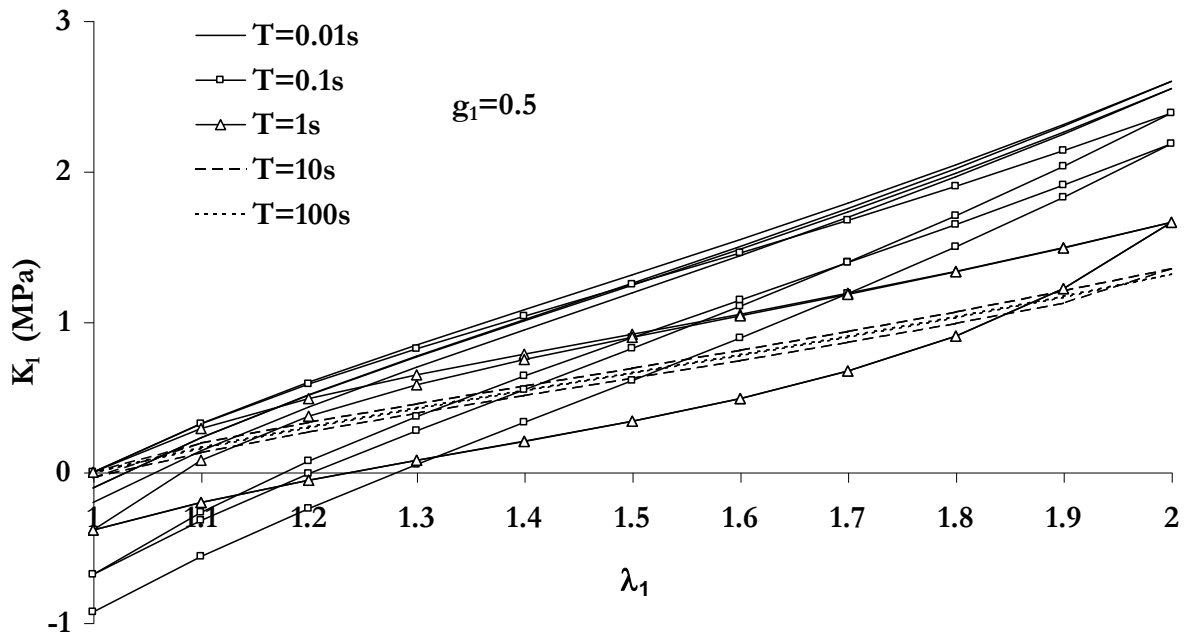
La série de Prony est choisie avec 3 termes ( $n=3$  dans l'équation (162)) pour ces exemples. Nous imposons un terme de temps  $\tau_i$  par décade, avec  $\tau_1=0.1s$ ,  $\tau_2=1s$  et  $\tau_3=10s$ .

La Fig. 3.23 présente les simulations des chargements de relaxation en traction uniaxiale ( $\lambda_1=2$ ) obtenues avec un seul poids  $g_i$  non nul égal à 0.2, affecté successivement aux temps de 0.1s, 1s et 10s. Comme nous l'attendions de par la forme de la fonction, le poids correspond à la décroissance maximale de la contrainte obtenue, lorsque cette dernière est stabilisée. De plus, la relaxation de la contrainte commence au centième environ du temps de relaxation «sollicité» et se termine à la décade supérieure au temps de relaxation. La décroissance «s'échelonne» ainsi sur 3 décades centrées sur le temps de relaxation sollicité.



**Figure 3.23** – Simulation d'un essai de relaxation à  $\lambda_1=2$  – Influence des paramètres  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  sur la relaxation des contraintes

Des essais cycliques (deux chargements et déchargements triangulaires successifs avec une élongation maximale égale à 2) de périodes 0.01, 0.1, 1, 10 et 100 s sont simulés. Un seul poids non nul est affecté au temps de 0.1s. Les résultats sont montrés sur la Fig. 3.24. On constate que le cycle de période 10 fois inférieure au temps de relaxation sollicité présente une hystérésis quasiment nulle. Le cycle de période égale à celle du temps présente une hystérésis non négligeable ainsi qu'une chute progressive de la contrainte maximale et une augmentation de la déformation rémanente (donc une contrainte de compression pour des élongations inférieures). Nous avons observé par ailleurs que cinq cycles étaient nécessaires pour stabiliser la contrainte. Le cycle de période 10 fois supérieure au temps de relaxation considéré présente une hystérésis plus importante. Le deuxième cycle est déjà stabilisé. La contrainte maximale ainsi que la déformation rémanente demeurent donc quasiment constantes lors des cycles suivants.



**Figure 3.24** – Simulation d'un essai de traction uniaxiale cyclique de période  $T$  - Influence du paramètre  $g_1$  sur l'hystérèse

En conclusion, imposer trois termes de relaxation dans la série de Prony permet de simuler correctement quatre décades de temps. La durée des essais de relaxation menés sur le SBR étant de l'ordre de six décades de temps, la série de Prony est choisie avec cinq termes. Les temps de relaxation sont fixés a priori à une valeur par décade. Le premier temps est fixé égal à 0.2 s. Ce temps correspond à la durée des montées en charge obtenue lors des essais de relaxation. Les temps suivants sont alors fixés égaux à 2, 20, 200 et 2000 s. Il reste à identifier les poids correspondants. De plus, si l'on considère que la vitesse de décroissance de la contrainte diminue avec le temps, la condition  $g_1 > g_2 > g_3 > g_4 > g_5$  doit être imposée.

## Choix des «courbes modèles»

Les paragraphes suivants décrivent les essais mécaniques qui ont permis l'optimisation des coefficients. Certaines courbes inaccessibles expérimentalement et nécessaires pour l'optimisation ont été reconstruites à partir d'essais existants.

### Hyperélasticité/Endommagement - 1<sup>ère</sup> itération

Les essais de traction et de compression uniaxiaux rapides ( $\dot{\epsilon} \approx 6$  et  $1.3 \text{ s}^{-1}$ ) permettent d'identifier le comportement hyperélastique. On considère en effet que la relaxation des contraintes n'a pas lieu pour des durées aussi faibles. Les contraintes expérimentales sont alors supposées indépendantes des propriétés viscoélastiques du matériau et la relaxation des coefficients  $C_{ij}$  est ainsi négligée.

Ces deux essais font intervenir l'hyperélasticité du matériau, mais aussi l'endommagement. En effet, les contraintes que l'on obtiendrait sur un matériau qui ne s'endommage pas seraient supérieures à celles que nous observons. Cependant, l'hystérésis induite par l'endommagement n'apparaît pas dans ces essais. Elle apparaîtrait par contre lors d'une sollicitation cyclique de traction uniaxiale à vitesse infiniment rapide. A ces vitesses, la dissipation observée sur le premier cycle serait due uniquement à l'endommagement (relaxation des contraintes négligeables). Pour des raisons techniques (pilotage et acquisition impossibles à des vitesses élevées sur les machines dont nous disposons), ces essais n'ont pas été effectués. Un essai de traction uniaxiale rapide est alors reconstitué à partir des essais cycliques plus lents.

Les essais-modèles sont alors :

- ***l'essai de traction uniaxiale monotone rapide***

Il est reconstitué à partir des essais de relaxation ( voir § 2.2.1 ). Les contraintes maximales atteintes à la fin de la montée en charge ainsi que le temps et l'élongation qui leur correspondent sont extraits de chacun des essais de relaxation. Ces points sont rassemblés. La courbe reconstitue un essai de traction uniaxiale rapide. Elle est extrapolée de  $\lambda_1=2.3$  (élongation maximale atteinte lors des essais de relaxation) jusqu'à  $\lambda_1=5$  par comparaison avec un essai de traction uniaxiale plus lent.

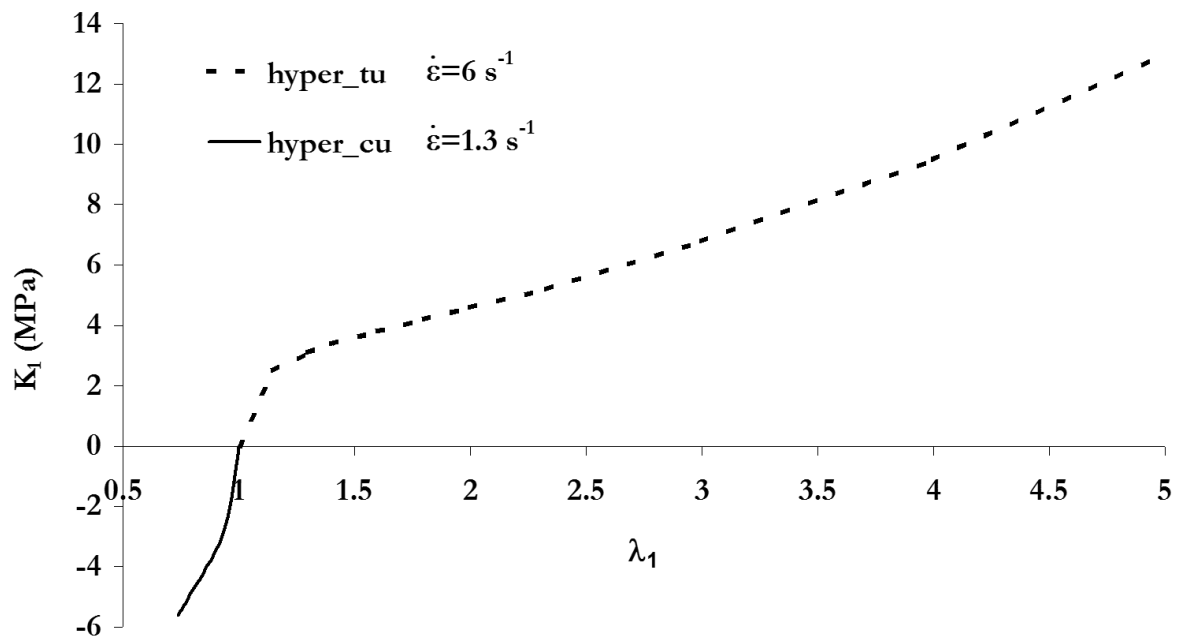
- ***l'essai de compression uniaxiale monotone rapide***

Il est le résultat d'une compression sur un cylindre prélevé dans une éprouvette plot. Nous disposons également d'essais effectués sur des pions moulés et sur des plaques empilées. Les contraintes mesurées sur les pions moulés et les plaques calandrées empilées sont cependant inférieures à celles obtenues sur les pions prélevés dans les plots ( voir § 2.5 ). L'objectif étant de simuler le comportement des éprouvettes axisymétriques et des semelles, nous avons choisi d'utiliser un résultat obtenu sur un cylindre prélevé dans un plot, plutôt que provenant de pions moulés ou de l'empilement de plaques.

- ***l'essai de traction uniaxiale cyclique rapide***

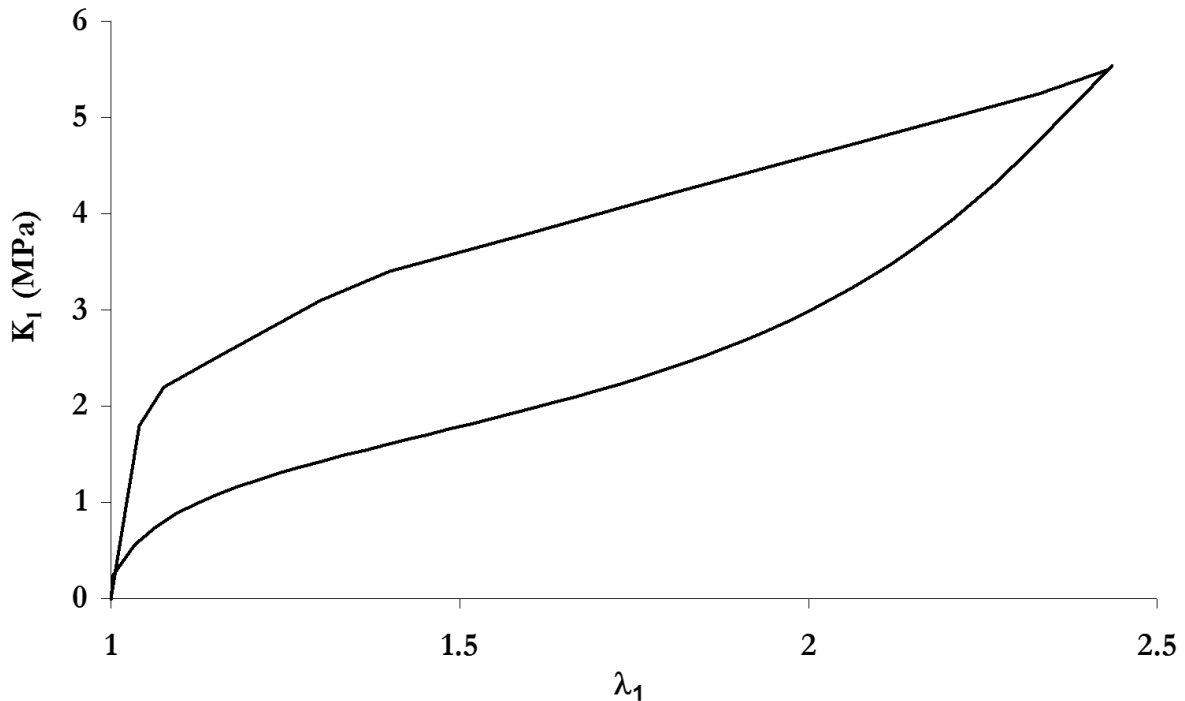
Il est reconstitué à partir des courbes de traction uniaxiale cyclique effectué à des vitesses plus lentes. Cette construction d'un cycle d'hystérésis où seul l'endommagement apparaît (sans la viscoélasticité) s'est avérée nécessaire pour une identification correcte des paramètres de la loi d'endommagement. Le détail de sa construction, quelque peu fastidieuse, est détaillée en annexe 3C.

Ces essais mécaniques de traction et compression uniaxiales monotones, nommés hyper\_tu et hyper\_cu sont représentés sur la Fig. 3.25. La courbe 'idéale d'endommagement' qui fait apparaître l'hystérésis liée à l'endommagement est représenté sur la Fig. 3.26.



**Figure 3.25** – Essais de traction et compression uniaxiales rapides – Essais utilisés pour l'identification des paramètres de la loi hyperélastique





**Figure 3.26** – Courbe ‘idéale d’endommagement’ reconstitué à partir des essais de traction uniaxiale cyclique lents – Représentation de l’hystérésis d’endommagement -

### Viscoélasticité

Un jeu de coefficients hyperélastiques est optimisé sur la courbe de traction uniaxiale rapide nommée *hyper\_tu* (reconstituée à partir des essais de relaxation et extrapolée jusqu’à  $\lambda_1=5$ ). Ce jeu n’est pas représentatif du comportement puisqu’il ne prend pas en compte l’endommagement. Il permet simplement de simuler correctement la contrainte expérimentale lors de la montée en charge des essais de relaxation. Les essais de relaxation en traction uniaxiale présentés dans le paragraphe 2.2.1 sont ensuite utilisés pour optimiser les poids correspondant aux temps de relaxation (0.2, 2, 20, 200, 2000).

### Hyperélasticité – 2<sup>ème</sup> itération

Une fois les paramètres de dommage et de viscoélasticité fixés, nous optimiserons à nouveau les coefficients hyperélastiques  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{20}$  à partir des essais cycliques effectués à deux vitesses différentes ( $\dot{\varepsilon}=0.01\text{s}^{-1}$  et  $0.1\text{s}^{-1}$ ) en traction et compression uniaxiale. Ceci permet de corriger l’approximation qui nous a conduit à postuler les essais rapides comme indépendant du temps.

## Identification – Résultats

Le code de calcul ZéBuLon [Zset, 1999] développé au Centre des Matériaux contient un module 'optimiseur'. Plusieurs méthodes d'optimisation sont disponibles : 'simplex' (méthode locale d'ordre 0), 'levenberg-marquardt' (méthode d'ordre 0), 'sequential quadratic programming' (méthode locale d'ordre 2) et 'genetic'. Cette dernière méthode utilise un algorithme évolutionnaire : la méthode de sélection des paramètres se rapproche de la méthode génétique de sélection des gènes. Ce programme utilise des opérateurs de sélection, de croisement et de mutation. Il augmente la probabilité de converger vers l'optima global, en évitant les optima locaux.

L'optimisation a été faite avec la méthode génétique. C'est la seule qui a permis d'optimiser un jeu de coefficients hyperélastique dans les bornes que nous imposons :  $C_{ij} > 0$ . Avec les autres méthodes, le coefficient  $C_{10}$  est optimisé très près de 0.

La procédure nécessite trois étapes pour un résultat acceptable (stabilisation du résidu):

- optimisation de  $(C_{10}, C_{01}, C_{20}, d_{\infty}, \eta)$  avec les courbes rapides de traction uniaxiale, compression uniaxiale et endommagement
- optimisation des poids de relaxation  $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$  avec les essais de relaxation
- ré-optimisation des coefficients  $(C_{10}, C_{01}, C_{20})$  avec les essais cycliques

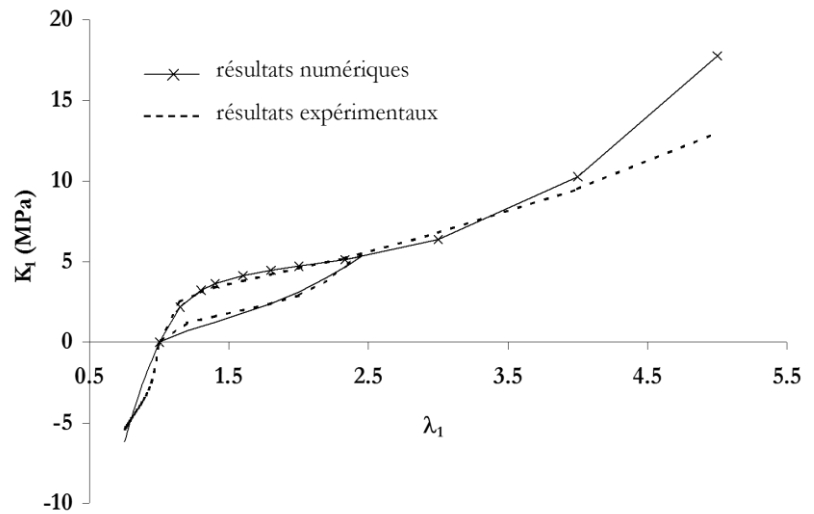
Le tableau suivant - Fig. 3.27 - résume les étapes principales de l'optimisation. Les graphes accolés illustrent les optimisations en présentant une partie des résultats.

Les détails sont décrits dans l'annexe 3D.

### Optimisation de $C_{10}$ , $C_{01}$ , $C_{20}$ , $d_{\infty}$ , $\eta$ sur les courbes 'rapides'- 1<sup>ère</sup> itération

Essais de référence :

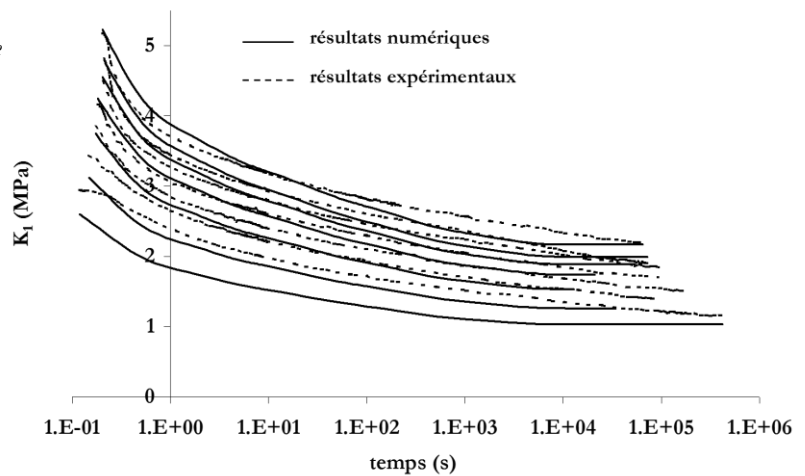
*traction et compression uniaxiale rapide*  
*courbe 'idéale d'endommagement' rapide*



### Optimisation de $g_1$ , $g_2$ , $g_3$ , $g_4$ , $g_5$ sur les essais de relaxation

Essais de référence :

*essais de relaxation en traction uniaxiale*



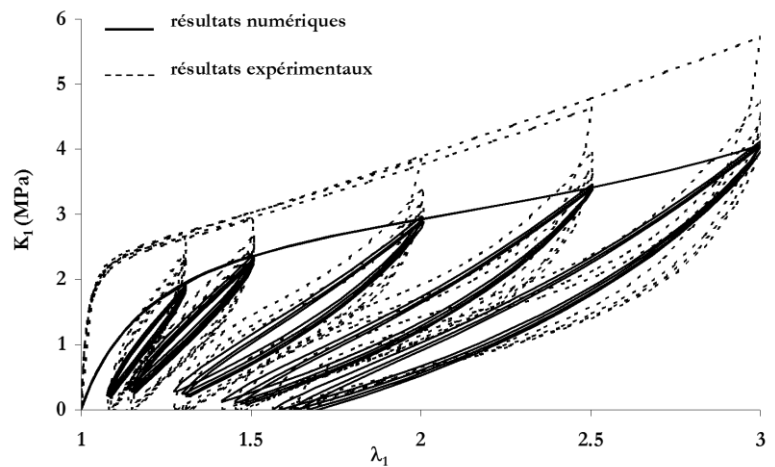
### Optimisation de $C_{10}$ , $C_{01}$ , $C_{20}$ sur les essais cycliques - 2<sup>ème</sup> itération

Essais de référence :

*deux séries d'essais de traction uniaxiale*

*cycliques ( $\dot{\epsilon} = 0.01 s^{-1}$  et  $0.1 s^{-1}$ )*

*essai de compression uniaxiale.*



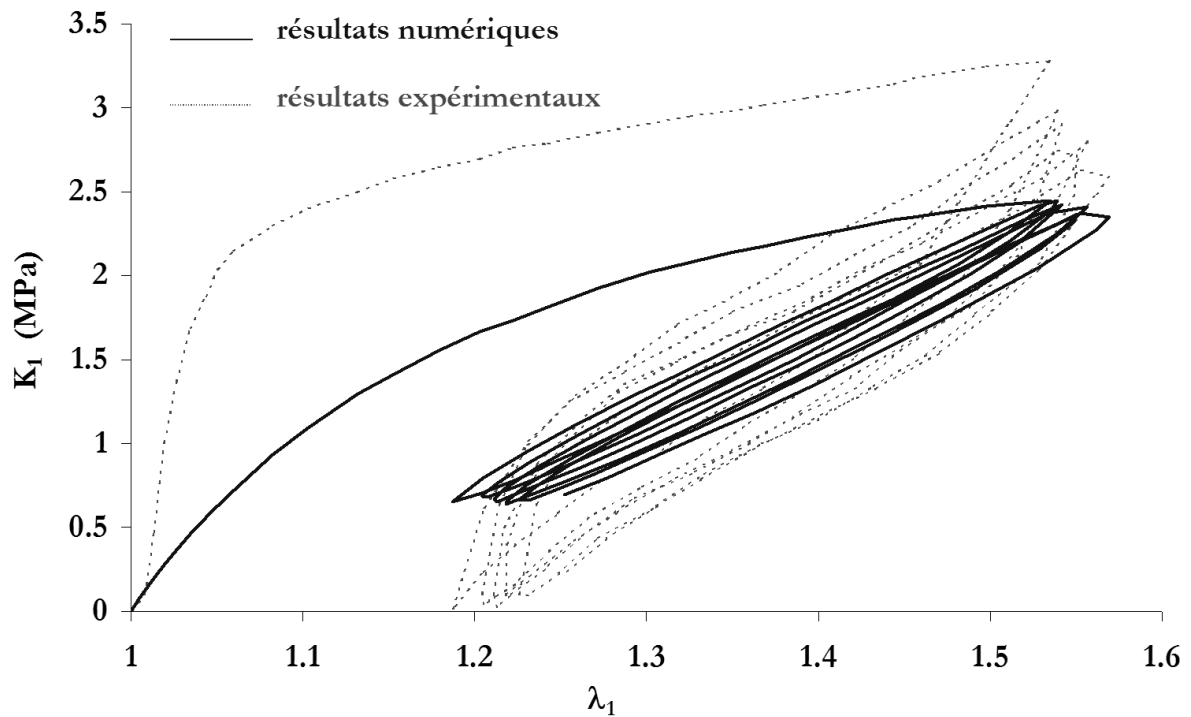
**Figure 3.27** – Schéma-résumé de l'identification des paramètres hyperélastiques/viscoélastiques/endommageables du comportement du SBR A – Comparaisons des résultats numériques et expérimentaux

Le jeu du SBRA retenu est alors :

$$\begin{pmatrix} C_{10} = 2.668 \\ C_{01} = 0.271 \\ C_{20} = 0.466 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \begin{pmatrix} d_{\infty} = 0.914 \\ \eta = 0.719 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2s & g_1 = 0.302 \\ \tau_2 = 2s & g_2 = 0.122 \\ \tau_3 = 20s & g_3 = 0.088 \\ \tau_4 = 200s & g_4 = 0.078 \\ \tau_5 = 2000s & g_5 = 0.046 \end{pmatrix}$$

La raideur simulée du cycle stabilisé est mieux représentée. La raideur de la première montée en charge est par contre mal simulée. Ceci n'est pas rédhibitoire puisque c'est le comportement du cycle stabilisé que nous voulons représenter correctement, pour calculer les contraintes et les déformations dans le matériau sollicité en fatigue. On constate d'autre part que l'aire du cycle d'hystérésis est sous-estimée d'un facteur 2 à 4. Ces aspects sont discutés dans le paragraphe 3.3.1 du mémoire.

L'essai cyclique de traction plane est simulé - Fig. 3.28 -. La raideur globale et la dissipation viscoélastique du matériau sont sous-estimées. Cependant, le jeu n'a pas été amélioré en prenant cet essai en compte lors de l'identification des coefficients. Le jeu précédent est donc conservé.



**Figure 3.28** – Simulations de l'essai de traction plane - Résultats numériques et expérimentaux

Les identifications des deux autres nuances de SBR (SBR B et SBR C) sont présentées dans l'annexe 3E.

## Commentaires - Discussion

La description de la procédure d'identification paraît complexe. Elle est pourtant très synthétisée, puisque de nombreux tests et optimisation préalables ont été nécessaires pour atteindre ce résultat. La procédure décrite ci-dessus en découle. Les remarques suivantes pourront éclairer les choix décrits précédemment.

Nous avons notamment constaté que :

- des coefficients de dommage mal choisis peuvent conduire à une chute de la contrainte avec l'augmentation de l'élongation. Cela se produit notamment si les coefficients sont optimisés sur des essais présentant une élongation maximale trop faible. C'est pour cette raison que nous avons extrapolé la courbe issue des essais de relaxation jusqu'à  $\lambda_1=5$ .
- Le poids  $g_1$  trop faible conduit à une mauvaise simulation de la déformation progressive. C'est pour cette raison que sa surestimation est préférable à sa sous-estimation.
- L'optimisation des coefficients hyperélastiques conduit à des instabilités si la condition  $C_{ij} \geq 0$  n'est pas appliquée.

La raideur de la première montée en charge est mal simulée. Cette mauvaise représentation est liée, d'une part, à l'utilisation de la loi hyperélastique de Rivlin, qui n'est pas adaptée pour la simulation d'élastomères fortement chargés. D'autre part, l'endommagement et la relaxation importante qui ont lieu dès les premiers instants (poids du premier temps de relaxation élevé !) diminuent encore la valeur des contraintes calculées. Comme nous l'avons déjà souligné, ceci n'est pas rédhibitoire pour l'étude puisque c'est le comportement du matériau en fatigue que nous voulons simuler.

On note d'autre part que, bien que les contraintes et élongations extrêmes soient correctement simulées, l'aire du cycle d'hystérésis est sous estimée d'un facteur 2 à 4. Nous supposons que cette erreur provient de la double origine de la dissipation : origine 'plastique' (glissement et rupture des contacts charge : charge et charge/chaîne, rupture/re-formation du réseau secondaire présumé de charges de silice : l'hystérésis est dépendant de l'amplitude de chargement) et origine viscoélastique (mouvement brownien des chaînes : l'hystérésis est dépendant de la vitesse de chargement). De même, la déformation que nous appelons 'rémanente' a une origine viscoélastique (elle est récupérable avec le temps) mais également une origine plastique [Kilian et al., 1994]. Or, à la fois l'hystérésis du cycle stabilisé et cette déformation rémanente sont numériquement pris en compte dans le modèle hyper-viscoélastique endommageable uniquement par la composante viscoélastique. Un couplage de la loi hyper-viscoélastique endommageable avec une loi élasto-plastique aurait donc conduit à une modélisation plus juste. Cependant, à la fois par souci de simplicité et par manque de temps, les lois élasto-plastiques n'ont pu être prises en compte dans le modèle.

### 3.3.2 - Identification du PU A - Cas de l'intégrale héréditaire

Le comportement du PUA présente deux composantes : **hyperélasticité compressible** et **viscoélasticité**. L'endommagement est peu important. Cela provient probablement de l'absence de charges. La procédure d'identification est ainsi plus simple, et nécessite l'identification de trois paramètres hyperélastiques et cinq paramètres viscoélastiques.

Les identifications se font, comme précédemment, successivement (par plusieurs itérations) sur différents coefficients afin de ne pas optimiser plus de trois coefficients simultanément. Les paramètres qui correspondent à la composante traitée sont alors optimisés en fixant les autres coefficients à des valeurs prédéfinies.

L'identification est cette fois couplée à un calcul par éléments finis, puisque les lois ne peuvent être écrites de façon explicite dans une routine programmée. En effet, dans le cas d'un matériau compressible, le produit  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  est différent de 1.

#### Récapitulatif des lois

Rappelons que la modélisation est basée sur les hypothèses d'isotropie du comportement et d'homogénéité du matériau. Ce matériau poreux est donc considéré macroscopiquement homogène. Les paramètres à identifier sont en gras.

##### Hyperélasticité

Le potentiel de Mooney compressible s'écrit :

$$W = \mathbf{m}_1 (I_1 - 3) + \mathbf{m}_2 (I_2 - 3) + 0.5 \mathbf{m}_3 (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) (I_3 - 1)^2 \quad (166)$$

$\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$ ,  $\mathbf{m}_3$  sont les **paramètres hyperélastiques**.  $\mathbf{m}_3$  est représentatif de la compressibilité du matériau. Notons que cette loi ne permet pas de simuler la densification du matériau (fermeture des pores).

##### Viscoélasticité – approche par intégrale héréditaire

Les paramètres à identifier sont contenus dans le terme de relaxation du « module de cisaillement »  $G(t)$  et du module de compressibilité  $K(t)$ . Ils sont exprimés par une série de Prony.

$$G(t) = G_0 \cdot \left[ g_\infty + \sum_1^n \mathbf{g}_i \cdot e^{\frac{-t}{\tau_i^G}} \right] \quad (167)$$

$$K(t) = K_0 \cdot \left[ k_\infty + \sum_1^n \mathbf{k}_i \cdot e^{\frac{-t}{\tau_i^K}} \right] \quad (168)$$

Nous avons choisi de postuler que les cinétiques de relaxation des modules  $G(t)$  et  $K(t)$  étaient égales. Les paramètres  $g_\infty$ ,  $k_\infty$ , et  $\tau_i^G$ ,  $\tau_i^K$  sont donc respectivement postulés égaux.

Les relaxations des modules s'appliquent aux coefficients  $\mathbf{m}_1$ ,  $\mathbf{m}_2$ ,  $\mathbf{m}_3$  dans le cas d'une loi de type Mooney. La contrainte est séparée en contrainte déviatorique et contrainte sphérique.

#### Sensibilité des coefficients sur les contraintes

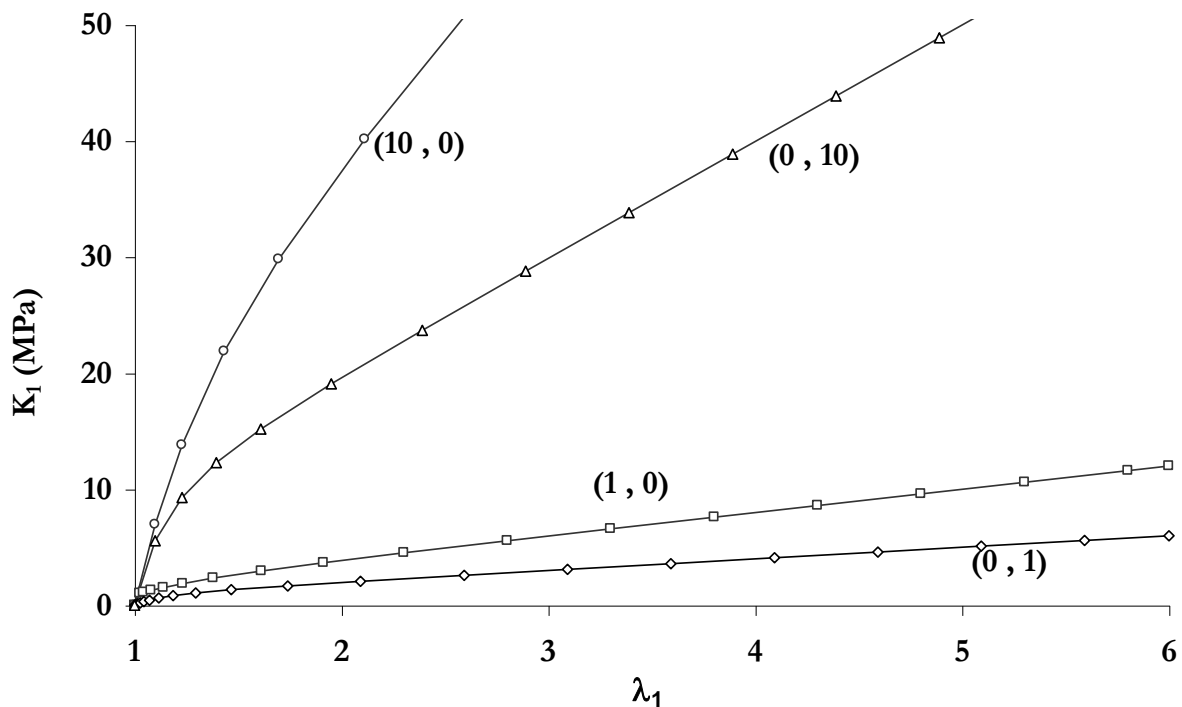
De la même façon que précédemment, il nous a paru utile de connaître la sensibilité des coefficients de la loi de Mooney (loi hyperélastique compressible) sur les valeurs des contraintes. Ceci permet de fixer les

bornes d'investigation pour l'identification des paramètres. L'étude de l'influence des paramètres est faite grâce à des calculs par éléments finis effectués sur des éléments de volume. Les valeurs des paramètres varient d'une simulation à l'autre.

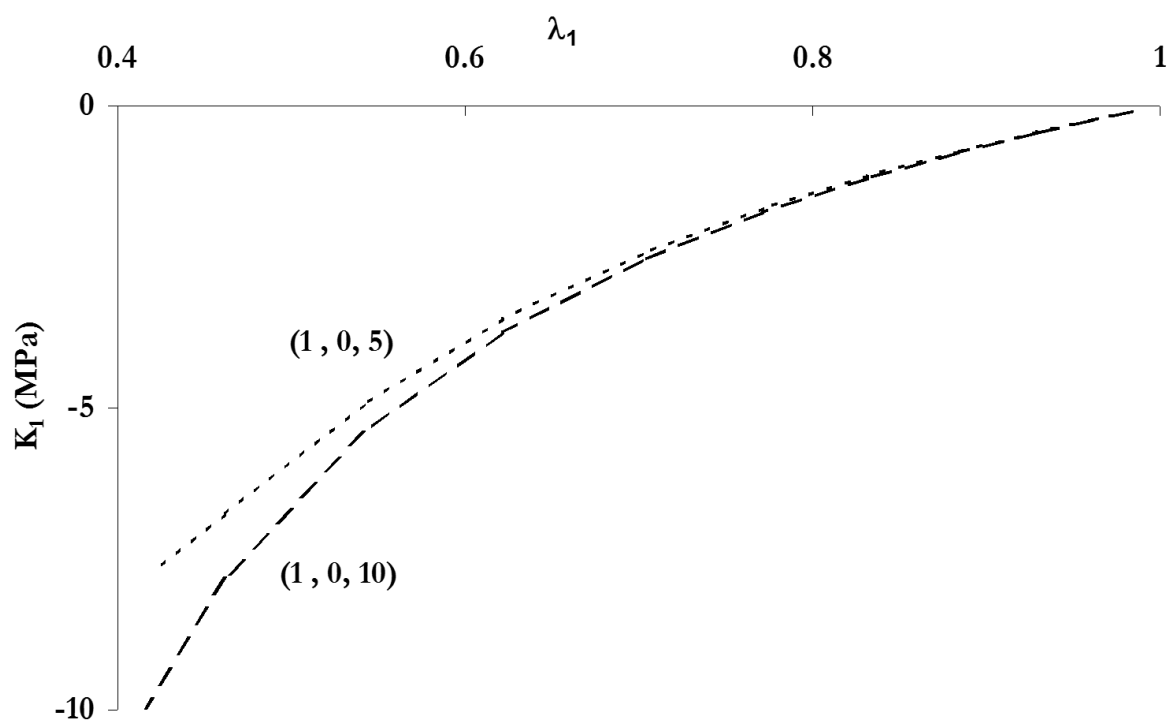
La Fig. 3.29 illustre les résultats de simulations d'un chargement de **traction uniaxiale** effectués avec des couples de paramètres  $(m_1, m_2)$  égaux à  $(1,0)$ ,  $(10,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(0, 10)$ . Le paramètre  $m_3$  n'est pas pris en considération car nous avons observé par ailleurs que sa valeur n'avait pas d'influence sur les contraintes calculées. L'augmentation de la valeur du paramètre  $m_1$  ou  $m_2$  conduit à une augmentation des contraintes calculées.

La Fig. 3.30 illustre des simulations d'un chargement de **compression uniaxiale**. Les paramètres  $(m_1, m_2, m_3)$  sont égaux à  $(1, 0, 5)$  et  $(1, 0, 10)$ . Il apparaît que le paramètre  $m_3$  a une influence sur les contraintes de compression uniaxiale. L'augmentation de sa valeur (non nulle) entraîne l'augmentation du module de compressibilité du matériau.

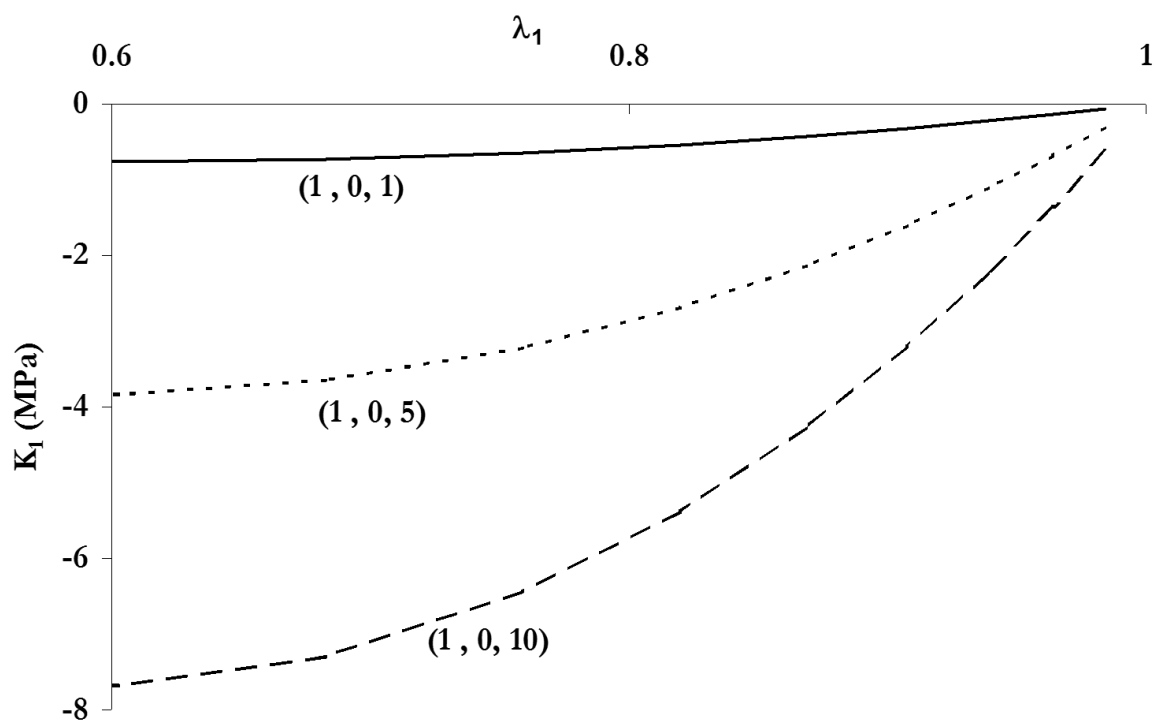
La Fig. 3.31 montre les contraintes  $K_1$  calculées lors d'un **chargement de compression œdométrique** pour des valeurs  $(m_1, m_2, m_3)$  égales à  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 5)$  et  $(1, 0, 10)$ . Comme précédemment, l'augmentation de la valeur de  $m_3$  conduit à l'augmentation de la contrainte. Notons que cette loi est instable pour des variations de volume supérieures à 40% (donc pour des elongations inférieures à 0.6 dans le cas de cet essai).



**Figure 3.29** – Etude de l'influence des coefficients  $(m_1, m_2)$  sur les réponses simulées en traction uniaxiale - Simulations de chargements de traction uniaxiale avec  $(m_1, m_2)$  égaux à  $(1,0)$ ,  $(10,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(0, 10)$  – Valeur de  $m_3$  indifférente



**Figure 3.30** – Etude de l'influence du coefficient  $m_3$  sur les réponses simulées en compression uniaxiale - Simulations de chargements de compression uniaxiale avec  $m_3$  égal à 5 et 10



**Figure 3.31** – Etude de l'influence du coefficient  $m_3$  sur les réponses simulées en compression isométrique - Simulations de chargements de compression isométrique avec  $m_3$  égal à 1, 5 et 10



L'influence des coefficients de loi intégrale héréditaire n'est pas re-détaillée. Il suffit de se référer au paragraphe précédant (cas du SBRA).

## Choix des « courbes – modèles »

Les coefficients hyperélastiques et viscoélastiques ont une influence importante à la fois sur les contraintes déviatoriques et sur les contraintes sphériques (matériau incompressible). Les courbes 'modèles' sont donc choisies parmi les chargements de traction uniaxiale mais aussi de compression œdométrique.

### Hyperélasticité - Viscoélasticité

Les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression œdométrique sont utilisés pour optimiser les coefficients ( $m_1, m_2, m_3$ ) et ( $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ ).

## Identification – Résultats

Comme précédemment, l'optimisation est faite en utilisant la méthode génétique.

Le résidu est stabilisé en deux étapes qui consistent à :

- optimiser les coefficients ( $m_1, m_2, m_3$ ) et ( $g_1, g_2, g_3$ ) sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression confinée. Seules les 50 premières secondes sont considérées.

Pour des raisons techniques explicitées dans le paragraphe 2.2.2, nous ne disposons pas d'essais de compression œdométrique rapides. Les montées en charge des essais durent, selon l'élongation atteinte, plusieurs dizaines de secondes. Il est donc impossible de découpler l'aspect hyperélastique de l'aspect viscoélastique sur ces essais. Pour cette raison, les coefficients hyperélastiques ( $m_1, m_2, m_3$ ) sont optimisés simultanément avec les coefficients viscoélastiques ( $g_1, g_2, g_3$ ) sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression uniaxiale. Seules les cinquante premières secondes de l'essai sont considérées. Cette manipulation permet d'obtenir le jeu ( $m_1, m_2, m_3$ ).

- ré-optimiser les coefficients ( $g_1, g_2, g_3$ ) et optimiser les coefficients ( $g_4, g_5$ ) sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression œdométrique

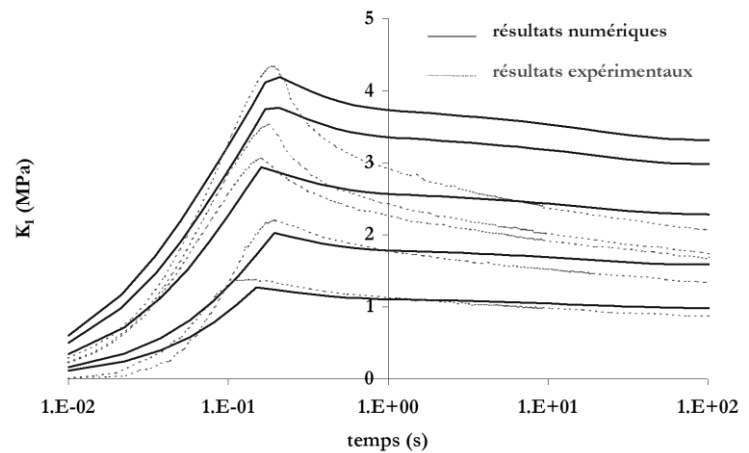
Le tableau de la Fig. 3.32 retrace les grandes lignes. Les graphes accolés présentent les résultats représentatifs des optimisations.

Les détails de la procédure d'optimisation sont mentionnées dans l'annexe 3F.

**Détermination de  $(m_1, m_2, m_3)$  et première estimation  $(g_1, g_2, g_3)$** 

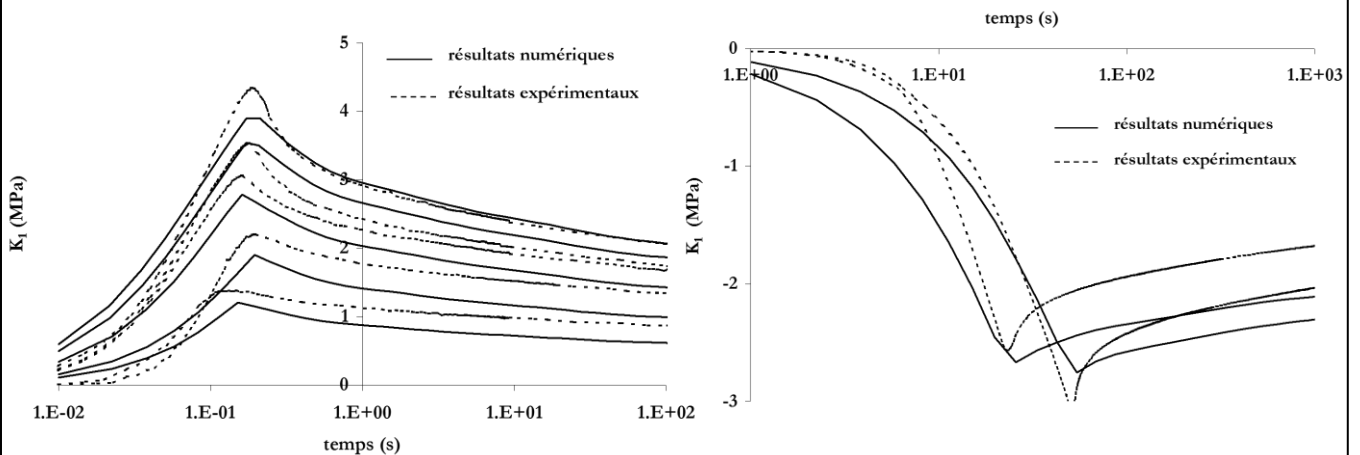
Essais de référence :

*essais de relaxation en traction uniaxiale  
et en compression œdométrique.  
(50 1<sup>ères</sup> secondes)*

**Seconde et dernière optimisation de  $g_1, g_2, g_3$  – Première et dernière optimisation de  $g_4, g_5$** 

Essais de référence :

*essais de relaxation en traction uniaxiale  
et en compression œdométrique.*



**Figure 3.32** – Schéma de la procédure d'optimisation du PU A – Illustration des optimisations par les graphes accolés qui présentent les essais expérimentaux et les résultats des calculs.

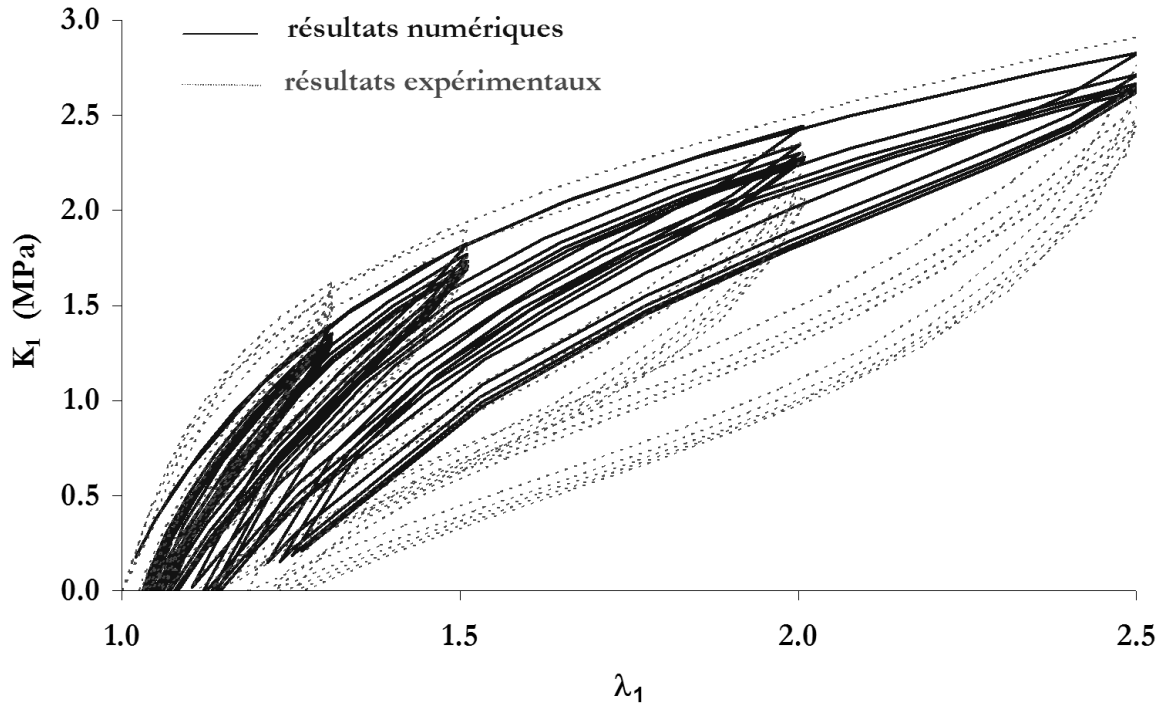
Le jeu optimisé est alors :

$$\begin{pmatrix} m_1 = 0.62 \text{ MPa} \\ m_2 = 1.14 \text{ MPa} \\ m_3 = 5.31 \end{pmatrix}$$

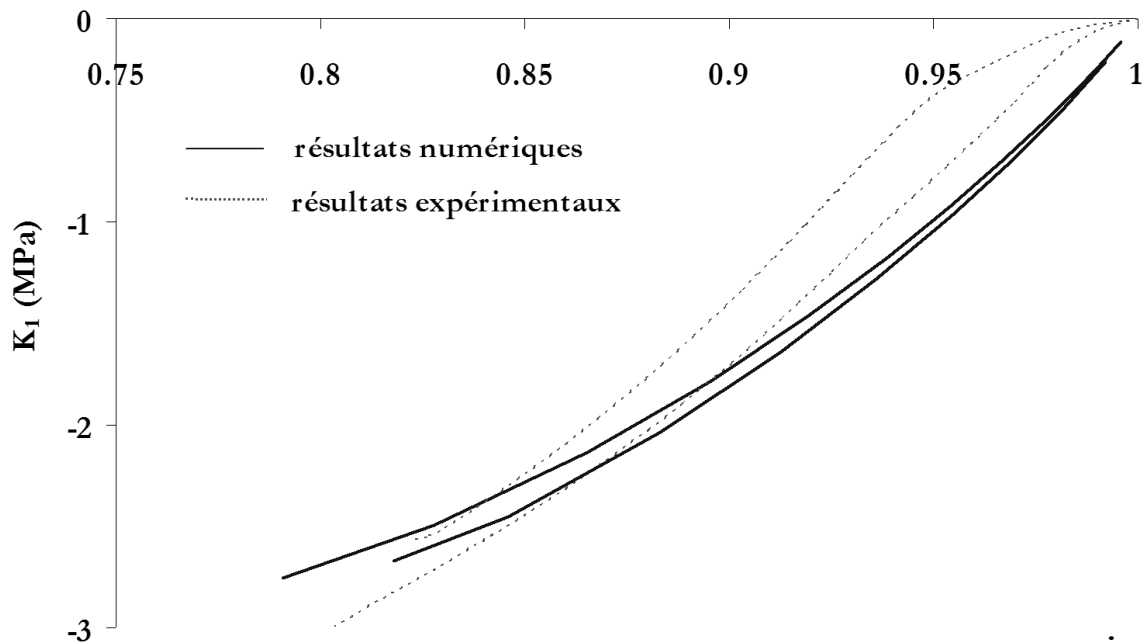
$$\begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2s & g_1 = 0.3 \\ \tau_2 = 2s & g_2 = 0.12 \\ \tau_3 = 20s & g_3 = 0.1 \\ \tau_4 = 200s & g_4 = 0.05 \\ \tau_5 = 2000s & g_5 = 0.04 \end{pmatrix}$$

Les essais de traction uniaxiale cycliques ainsi que les essais de compression uniaxiale et œdométrique sont simulés avec le jeu optimisé sur les essais de relaxation. Les résultats sont satisfaisants. Notons que le 'bouclage' qui consisterait à re-optimiser les coefficients ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ), comme dans le cas du SBR A, sur ces essais cycliques ne conduit à aucune amélioration du résultat.

Les Fig. 3.33 et 3.34 présentent les simulations essais de traction uniaxiale traction uniaxiale ( $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$ ) ainsi que les essais de compression confinées monotones ( $\dot{\epsilon} = 0.004 \text{ s}^{-1}$ ).



**Figure 3.33** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$



**Figure 3.34** – Simulation de l'essai de compression œdométrique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.004 \text{ s}^{-1}$

## Commentaires - discussion

Cette optimisation a succédé à celle du SBRA. La même démarche a été suivie sans difficulté. D'une part, la non intervention de la loi d'endommagement simplifie singulièrement l'identification. D'autre part, les charges ne 'perturbent' pas le comportement viscoélastique.

Les montées en charge initiales et les cycles stabilisés sont assez correctement simulées. L'absence de charge diminue la raideur initiale. Elle est alors mieux représentée.

L'aire de l'hystérèse est estimée à 30% près.

La modélisation est plus proche dans ce cas de la réalité que dans le cas du SBR. L'absence de charge annule les effets 'plastiques' discutés à propos du SBR chargé. La modélisation viscoélastique est donc bien adaptée.

Cependant, les résultats de l'optimisation des coefficients viscoélastiques sur les essais de compression œdométrique ne sont pas satisfaisants. L'hypothèse de simplification qui nous a conduit à postuler les poids de relaxation des parties déviatorique et sphérique de la contrainte égaux est mal adaptée. Ceci peut être facilement amélioré.

Enfin, adopter une loi d'Ogden permettrait de simuler les comportements du PU dans un domaine plus vaste.

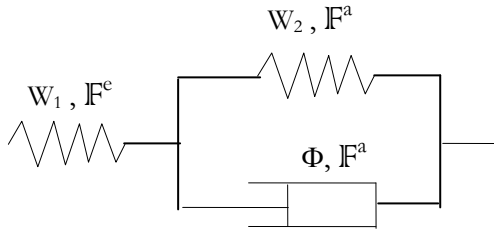
### 3.3.3 - Identification du SBRA - Cas de l'approche par variables internes

Les identifications sont faites, comme précédemment, successivement (avec plusieurs itérations) sur différents coefficients afin de ne pas optimiser plus de trois coefficients simultanément. Les coefficients qui correspondent à la composante traitée sont alors optimisés en fixant les autres paramètres à des valeurs prédéfinies.

L'identification est couplée à un calcul éléments finis, puisque les lois ne peuvent être écrites de façon explicite dans une routine (équation différentielle à résoudre pour expliciter les variables internes correspondant au tenseur  $\mathbf{C}^a$ ).

#### Récapitulatif des lois

Le modèle de Poynting-Thomson est schématisé de la façon suivante (Fig. 3.35). Son utilisation dans le cadre des transformations finies a été discuté dans le paragraphe 3.2.



**Figure 3.35**—Schéma du modèle de Poynting-Thomson

Les potentiels hyperélastiques sont  $W_1$  et  $W_2$ . Le potentiel  $\Phi$  est le pseudo-potentiel de dissipation.

Les paramètres à optimiser dans l'écriture de ces potentiels sont notés en gras dans les équations ci-dessous.

#### Hyperélasticité

Comme dans le cas de l'intégrale héréditaire, nous décidons d'utiliser des équations de type Rivlin généralisé pour décrire les potentiels hyperélastiques. La mise en œuvre des lois dans le code de calcul par éléments finis est délicate. Nous avons donc choisi de réduire au minimum les ordres des séries.  $W_1$  a été écrit au 2<sup>nd</sup> ordre et  $W_2$  au 1<sup>er</sup> ordre.

$$W_1 = W_e = \mathbf{C}_{10}^e (I_1 - 3) + \mathbf{C}_{01}^e (I_2 - 3) + \mathbf{C}_{11}^e (I_1 - 3)(I_2 - 3) + \mathbf{C}_{20}^e (I_1 - 3)^2 + \mathbf{C}_{02}^e (I_2 - 3)^2 \quad (169)$$

$$W_2 = W_a = \mathbf{C}_{10}^a (I_1 - 3) + \mathbf{C}_{01}^a (I_2 - 3) \quad (170)$$

#### Viscoélasticité

La viscoélasticité du matériau intervient à travers le pseudo-potentiel de dissipation  $\Phi$ . Nous choisissons de l'écrire sous la forme suivante [Boukamel, 97] :

$$\Phi = \frac{1}{2} \mathbf{f}_a \mathbf{C}^a : \mathbf{C}^a \quad (171)$$

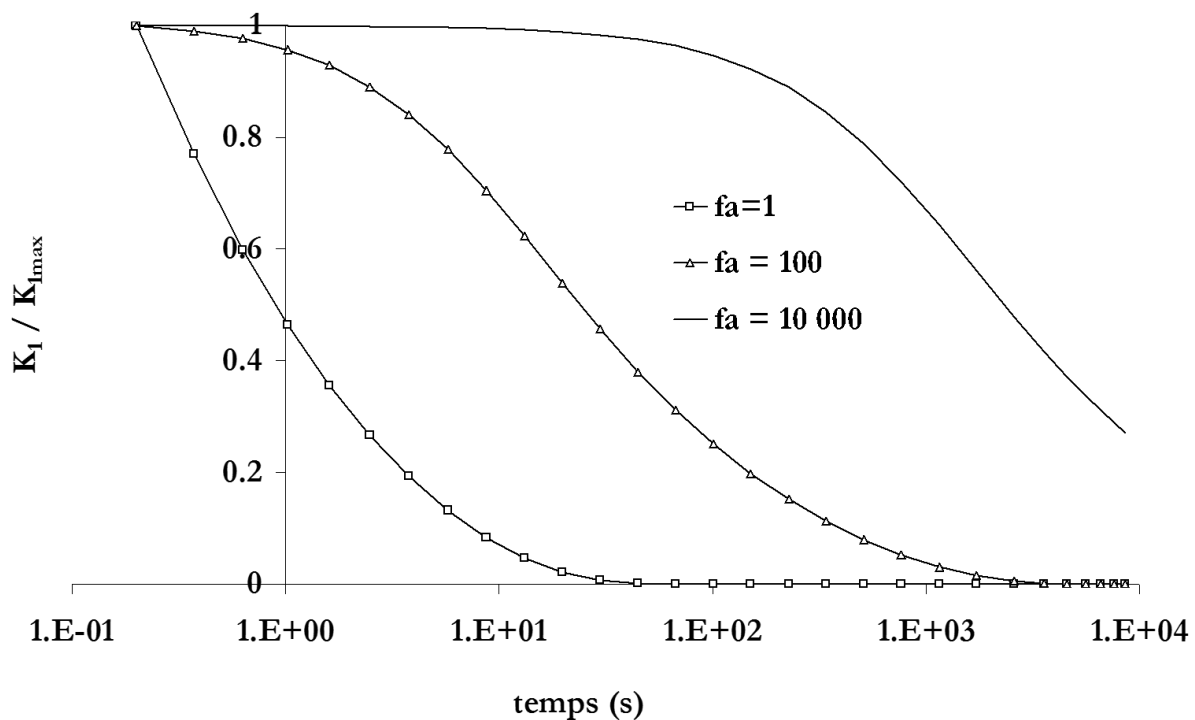
## Sensibilité des coefficients sur les contraintes

De la même façon que précédemment, il nous a paru utile de connaître la sensibilité des coefficients  $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$  et  $f_a$  des lois sur la réponse en contrainte calculée.

L'influence des coefficients  $C^e$  a déjà été étudiée dans le cas de l'intégrale héréditaire. Notons toutefois que ces coefficients ont une influence sur la relaxation des contraintes. Pour l'étude qui suit, le jeu ( $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$ ,  $C_{20}^e$ ) est arbitrairement fixé égal à (1, 0.1, 0.1) MPa. Ainsi, le rapport  $f_a / C_{10}^e$ , qui s'apparente à un temps de relaxation, est égal à la valeur du paramètre  $f_a$ .

### Influence de $f_a$

Les coefficients  $C_{10}^a$  et  $C_{01}^a$  sont fixés nuls. Les valeurs 1,  $10^2$ ,  $10^4$  sont successivement appliquées au paramètre  $f_a$ . Le graphe de la Fig. 3.36 montre les résultats de simulation d'essais de relaxation ( $\lambda_1=2$ ). Prenons l'exemple de  $f_a=100$ . Cet exemple illustre le mieux la relaxation des contraintes sur l'échelle de temps considérée ici. On constate que la relaxation de la contrainte commence à  $t=1s$  soit  $f_a/100$  et se termine à  $t=10^4s$  soit  $f_a*100$ . La relaxation a lieu sur 4 décades.



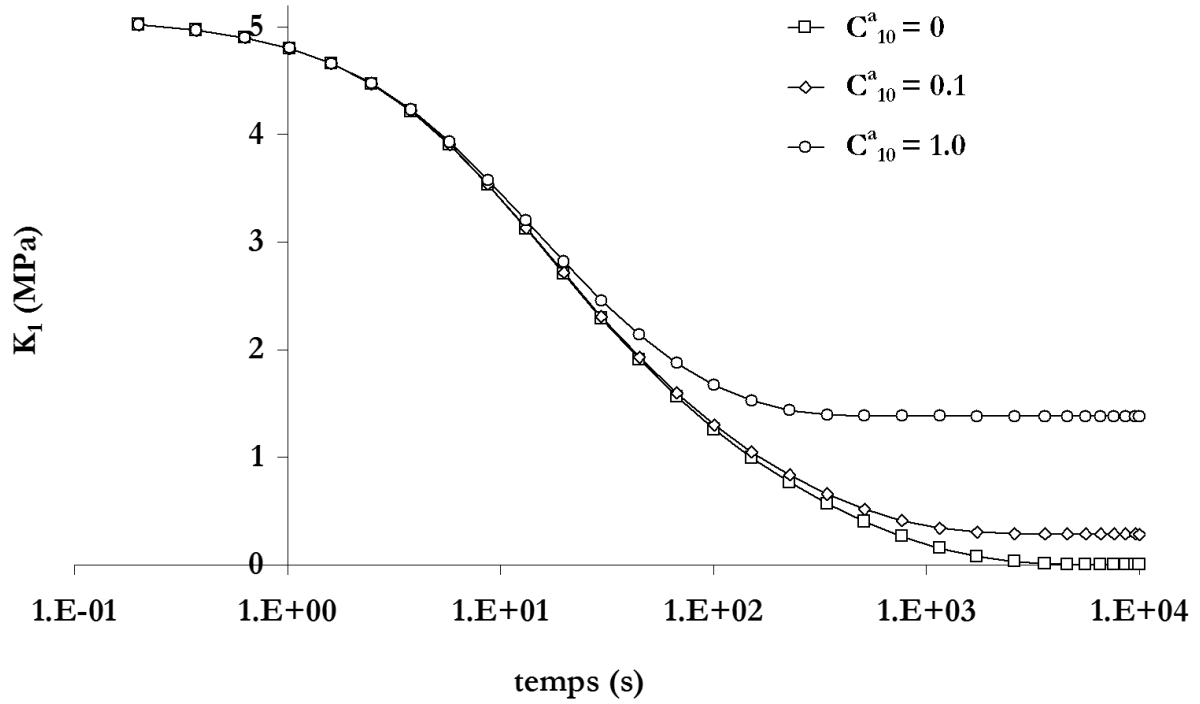
**Figure 3.36** – Influence de la valeur de  $f_a$  sur la relaxation des contraintes – Simulations d'essais de relaxation avec  $\lambda_1=2$

### Influence de $C_{10}^a$ et $C_{01}^a$

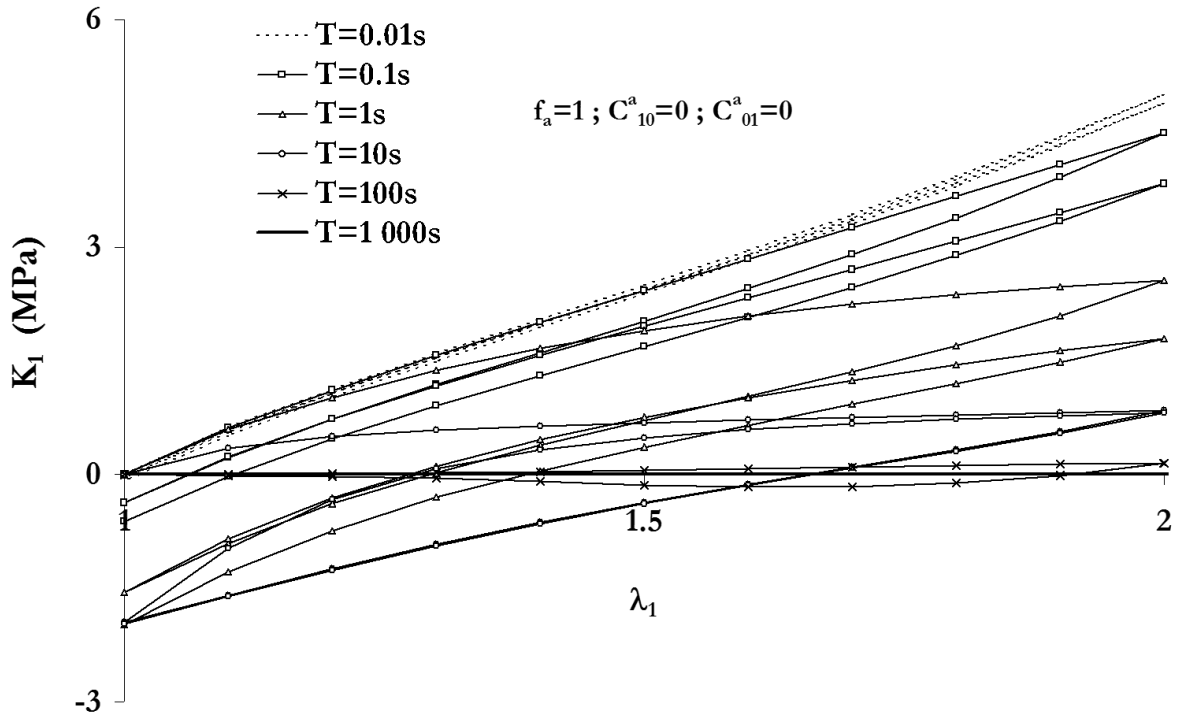
Les mêmes essais de relaxation que précédemment sont simulés. Les paramètres  $f_a$  et  $C_{01}^a$  sont respectivement fixés égaux à 100 MPa.s et 0 MPa. Le paramètre  $C_{10}^a$  reçoit les valeurs 0, 0.1 puis 1 MPa. La Fig. 3.37 illustre les résultats obtenus. On constate que l'augmentation de la valeur de  $C_{10}^a$  conduit à la diminution de la relaxation des contraintes ainsi qu'à la réduction de l'échelle de temps sur laquelle « s'échelonne » la relaxation. Le résultat est identique pour le paramètre  $C_{01}^a$ .

Des essais cycliques d'élongation maximale égale à 2 et de période variable entre 0.01s et 1 000s sont simulés. Les couples (0,0) et (1,0) sont affectés aux paramètres ( $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$ ). Le paramètre  $f_a$  est fixé égal à 1MPa. Les Fig. 3.38 et 3.39 illustrent les résultats obtenus. On constate que les cycles de période  $f_a/100$  et

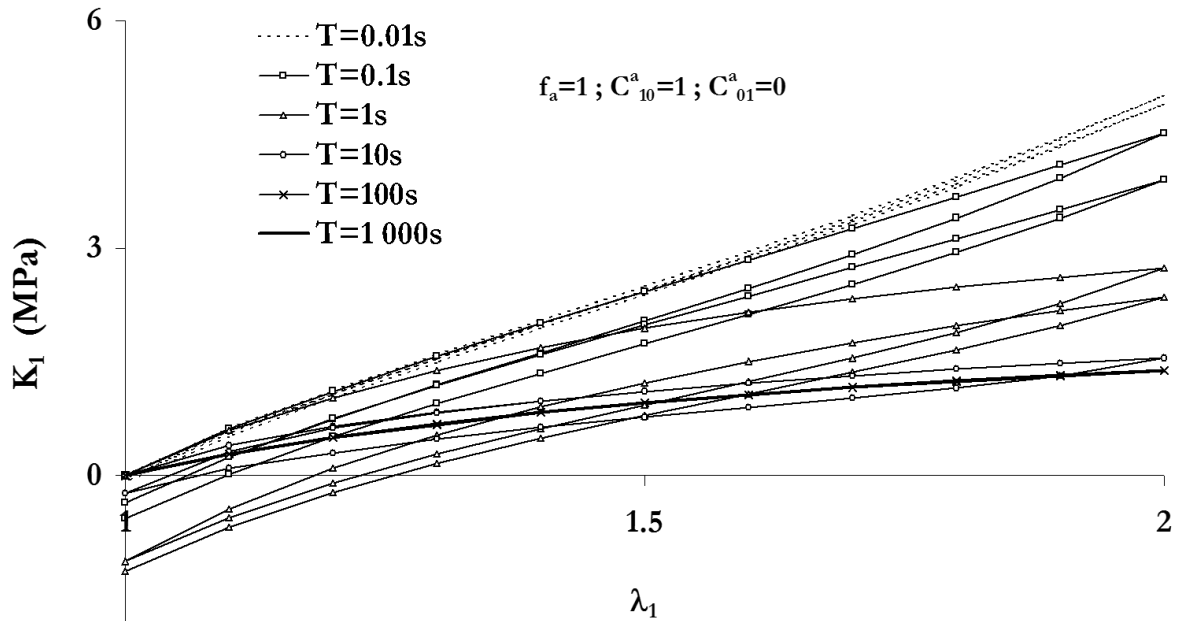
$f_a \cdot 1000$  présentent une hystérésis quasiment nulle. Le cycle le plus dissipatif est celui de période égale à  $f_a$ . De plus, on confirme que l'augmentation de  $C_{10}^a$  conduit à une diminution de l'hystérésis et de la zone d'influence du paramètre  $f_a$ .



**Figure 3.37** – Influence de la valeur de  $C_{10}^a$  sur la relaxation des contraintes – Simulations d'essais de relaxation avec  $\lambda_1 = 2$  – ( $C_{01} = 0$  ;  $f_a = 100$ )



**Figure 3.38** – Influence de la valeur de  $f_a$  sur l'hystérésis des cycles de traction uniaxiale – ( $C_{10}^a, C_{01}^a$ ) = (0,0) – Simulations d'essais de traction uniaxiale cyclique avec  $\lambda_{1max} = 2$  et  $T = 0.01, 0.1, 1, 100, 1000$  s



**Figure 3.39** – Influence de la valeur de  $f_a$  sur l'hystérèse des cycles de traction uniaxiale –  $(C_{10}^u, C_{01}^u)=(1,0)$  - Simulations d'essais de traction uniaxiale cyclique avec  $\lambda_{1max}=2$  et  $T=0.01, 0.1, 1, 100, 1\ 000\ s$

## Choix des « courbes – modèles »

### Hyperélasticité et Viscoélasticité

Nous avons observé précédemment, et de la même façon que plusieurs auteurs [Carpentier, 1996], [Andrieux, 1997], que ce modèle ne pouvait pas simuler le comportement sur plusieurs décades de vitesses. L'optimisation doit donc être effectuée à partir d'essais mécaniques dont la vitesse de déformation est proche de celle des essais que l'on voudra simuler : les essais de fatigue.

D'autre part, dans le cas de cette loi, l'état de traction uniaxiale ne peut pas être calculé de façon analytique. L'optimisation des coefficients nécessite donc l'utilisation d'un calcul par éléments finis.

Ainsi, pour limiter la durée du calcul d'optimisation et adapter le résultat au but recherché (la simulation des essais de fatigue), nous avons choisi d'utiliser quatre essais mécaniques seulement : trois essais de traction uniaxiale dont les élongations maximales sont 1.3, 1.5 et 2.0 et la vitesse de chargement la plus rapide ( $\dot{\epsilon}=0.1\ s^{-1}$ ) et un essai de compression uniaxiale rapide ( $\dot{\epsilon}=1.5\ s^{-1}$ ).

## Identification – Résultats et commentaires

Comme le montre l'étude de l'influence des coefficients – Fig. 3.39 –, l'hystérésis d'un cycle de période 1 s est correctement simulée lorsque la valeur de  $f_a/C_{10}^a$  est de l'ordre de 1 s. Or les périodes des cycles de

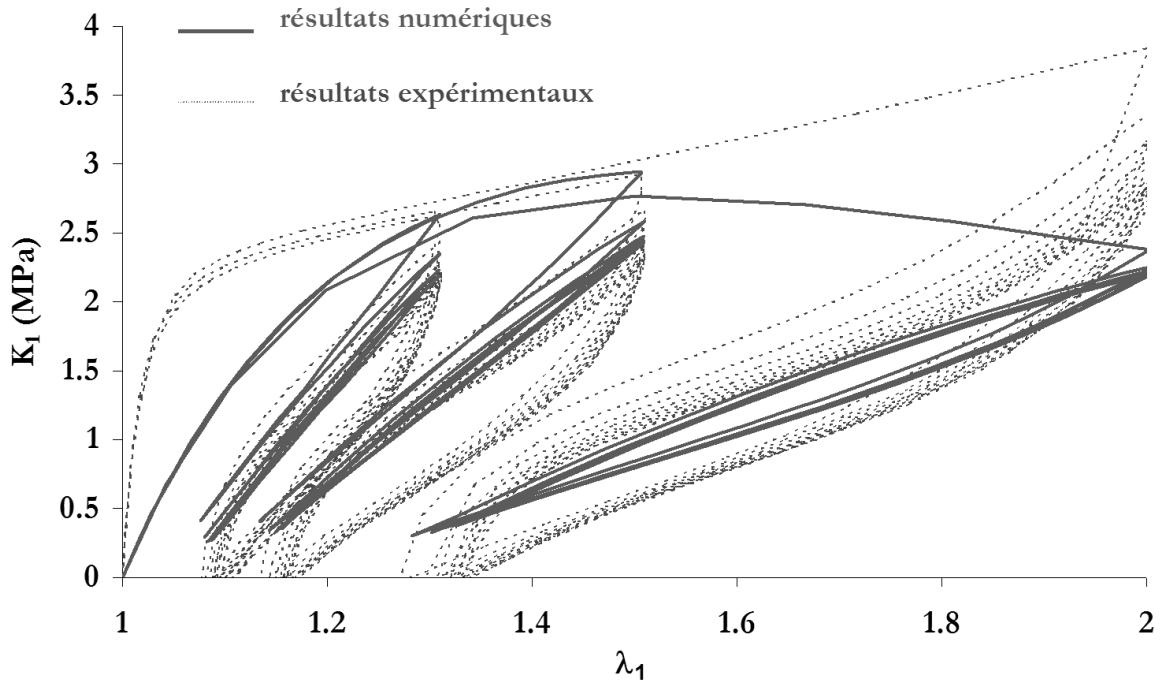
traction uniaxiale effectués à  $\dot{\epsilon}=0.1\ s^{-1}$  sont respectivement 3, 7 et 15 s pour les élongations maximales de 1.3, 1.5 et 2.0, et de l'ordre de 3 s pour les essais de fatigue. Nous avons donc procédé à deux optimisations différentes, pour lesquelles les bornes d'investigation du paramètre  $f_a$  varient. Dans le premier cas, elles sont imposées égales à 0.1 et 50. Dans le deuxième cas, elles sont imposées égales à 0.1 et 10. Le premier cas est plus adapté à la simulation des essais de traction uniaxiale, le second aux essais de fatigue.



$$1^{\text{er}} \text{ cas } 0.1 < f_a < 50 \quad \longleftrightarrow \quad 0.04 < f_a/C_{10}^e < 18$$

### Première itération – Optimisation de $(C_{10}^a, C_{01}^a \text{ et } f_a)$

Dans un premier temps, les coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$  et  $C_{20}$ ,  $d_\infty$  et  $\eta$  identifiés dans le cas de l'approche fonctionnelle sont utilisés. Les coefficients hyperélastiques sont ceux du ressort  $W_1$ . On les nomme  $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$  et  $C_{20}^e$ . Les coefficients  $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$  et  $f_a$  sont alors optimisés à partir des quatre essais décrits plus haut. Les résultats des simulations de traction uniaxiale sont représentés sur la Fig. 3.40. Ils peuvent être améliorés. La chute de la contrainte dans l'essai le plus sollicité est liée au temps de montée en charge (de l'ordre de 12 s).

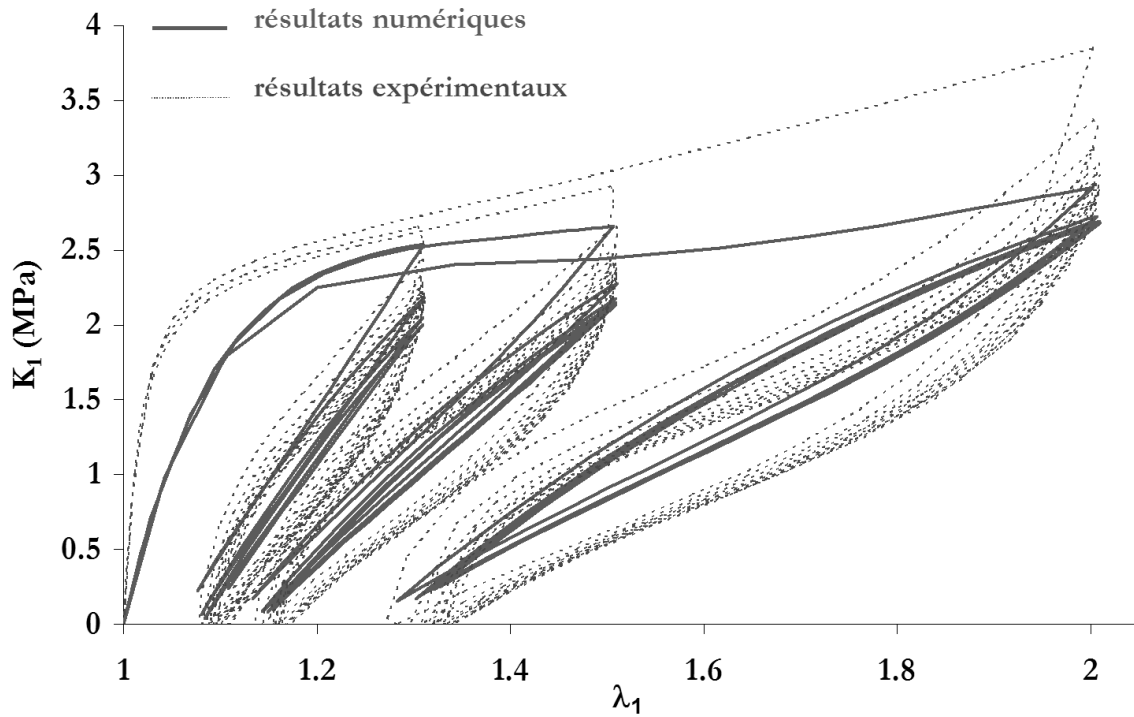


**Figure 3.40** – Résultats de la 1<sup>ère</sup> itération - Optimisation des coefficients  $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$  et  $f_a$  – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

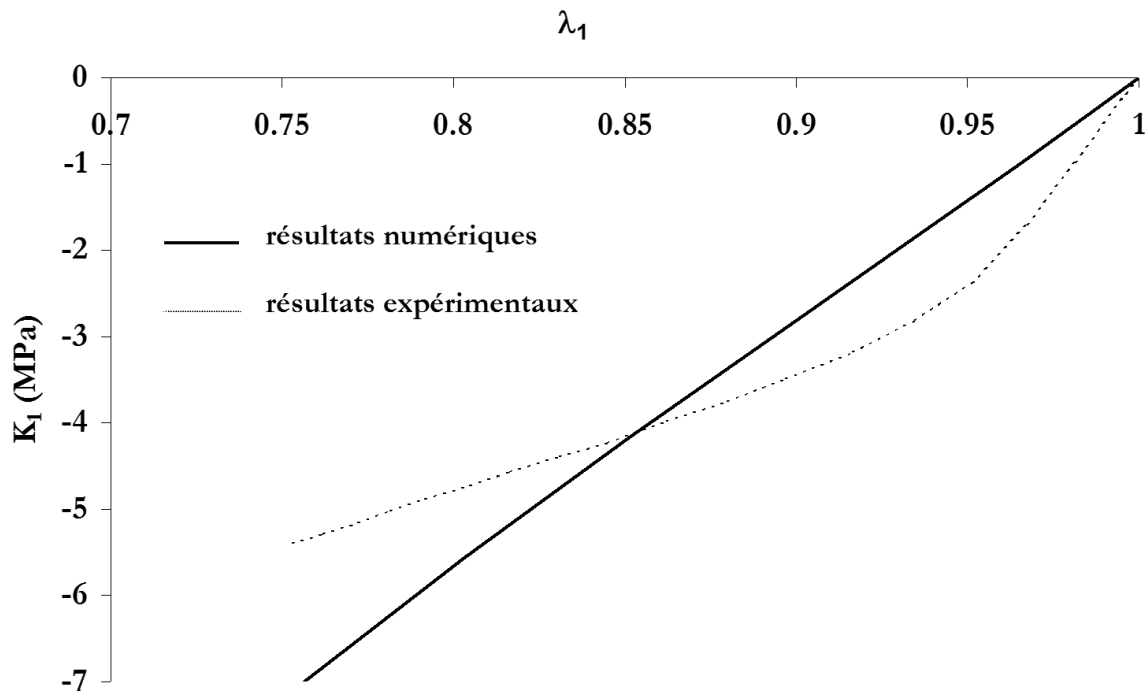
Il est donc nécessaire de réajuster les paramètres hyperélastiques, afin qu'ils soient plus adaptés au jeu de paramètres viscoélastiques ( $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$  et  $f_a$ ).

### Seconde itération – Optimisation de $(C_{10}^e, C_{01}^e \text{ et } C_{20}^e, d_\infty \text{ et } \eta)$

Les coefficients  $C_{10}^a$ ,  $C_{01}^a$  et  $f_a$  sont alors bloqués aux valeurs trouvées précédemment et les coefficients  $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$  et  $C_{20}^e$ ,  $d_\infty$  et  $\eta$  (bornes égales à 0 et 1) sont réajustés sur ces quatre mêmes essais. Les valeurs extrêmes de contraintes sont correctement simulées – Fig. 3.41 et 3.42 –.



**Figure 3.41** – Résultats de la 2<sup>de</sup> itération - Optimisation des coefficients  $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$  et  $C_{20}^e$ ,  $d_\infty$  et  $\eta$  – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

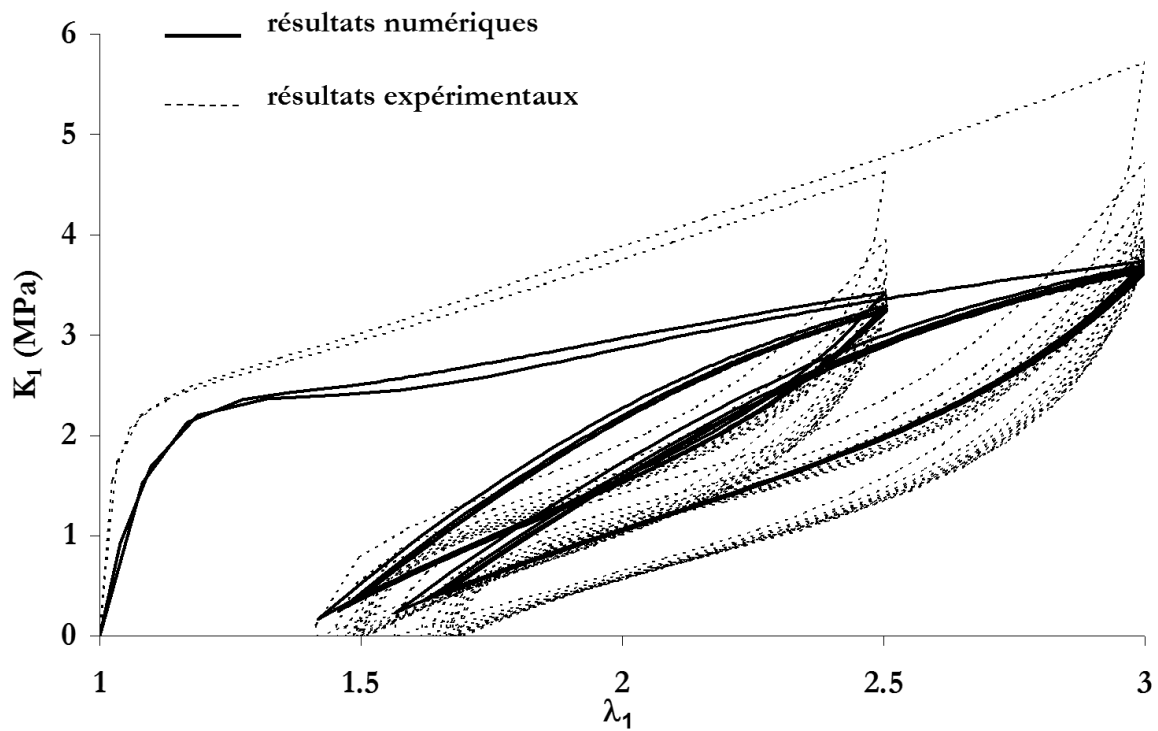


**Figure 3.42** – Résultats de la 2<sup>de</sup> itération - Optimisation des coefficients  $C_{10}^e$ ,  $C_{01}^e$  et  $C_{20}^e$ ,  $d_\infty$  et  $\eta$  – Simulation des essais de compression uniaxiale  $\dot{\epsilon} = 1.3 \text{ s}^{-1}$

Le jeu final n°1 est :

$$\begin{pmatrix} C_{10}^e = 3.565 \\ C_{01}^e = 1.305 \\ C_{20}^e = 0.839 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \begin{pmatrix} C_{10}^a = 3.74 \text{ MPa} \\ C_{01}^a = 1.866 \text{ MPa} \\ f_a = 47. \text{ MPa.s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_\infty = 0.718 \\ \eta = 0.206 \end{pmatrix}$$

On constate que la simulation des essais effectués à la même vitesse ( $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$ ) mais avec des elongations plus importantes sont correctes - Fig 3.43 -.



**Figure 3.43** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$  – Jeu de coefficients final n°1 -  $\lambda_{1max} = 2.5$  et 3

Les Fig. 3.44 et 3.45 présentent les simulations des essais cycliques avec  $\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ s}^{-1}$  et des essais de relaxation. Ces simulations sont mauvaises. Comme nous l'avons montré dans le paragraphe d'étude de la sensibilité des coefficients, la loi ne peut pas simuler des essais sur des gammes de vitesse importantes. Ces essais, dont la durée de montée en charge est de l'ordre de 100 s, sont ainsi mal décrits par la loi de comportement. De même, la relaxation a lieu sur les 50 premières secondes et est fortement surestimée.

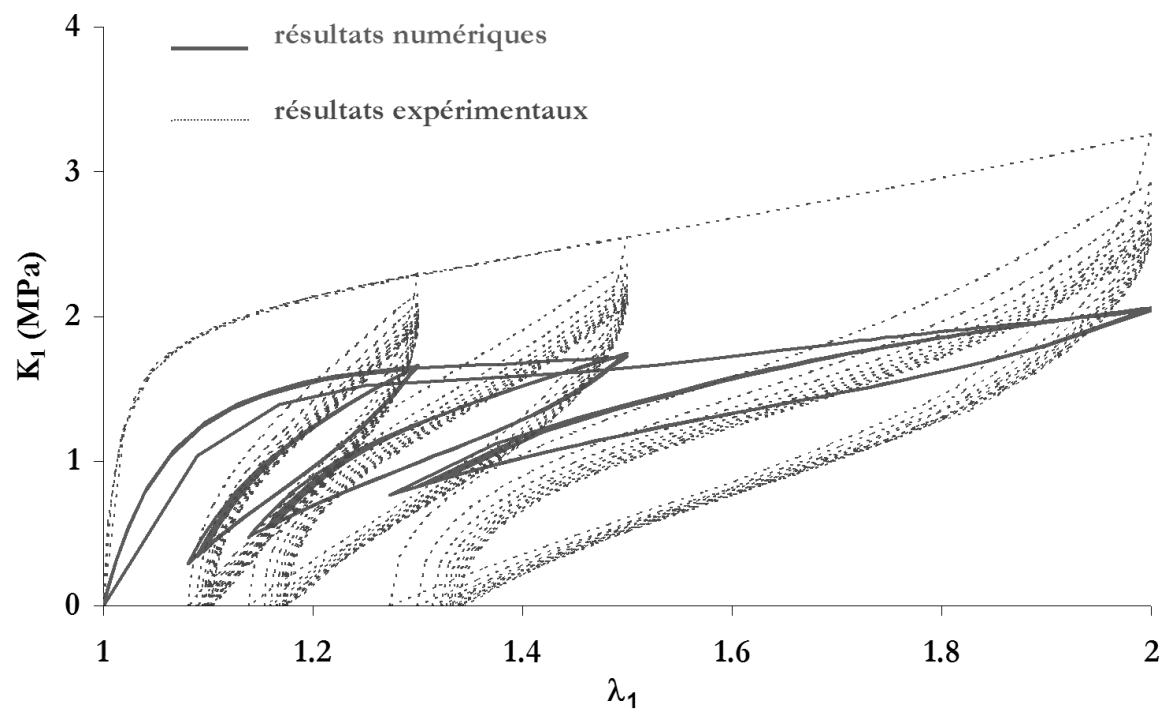


Figure 3.44 – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\epsilon} = 0.01 \text{ s}^{-1}$  – Jeu de coefficients final n°1

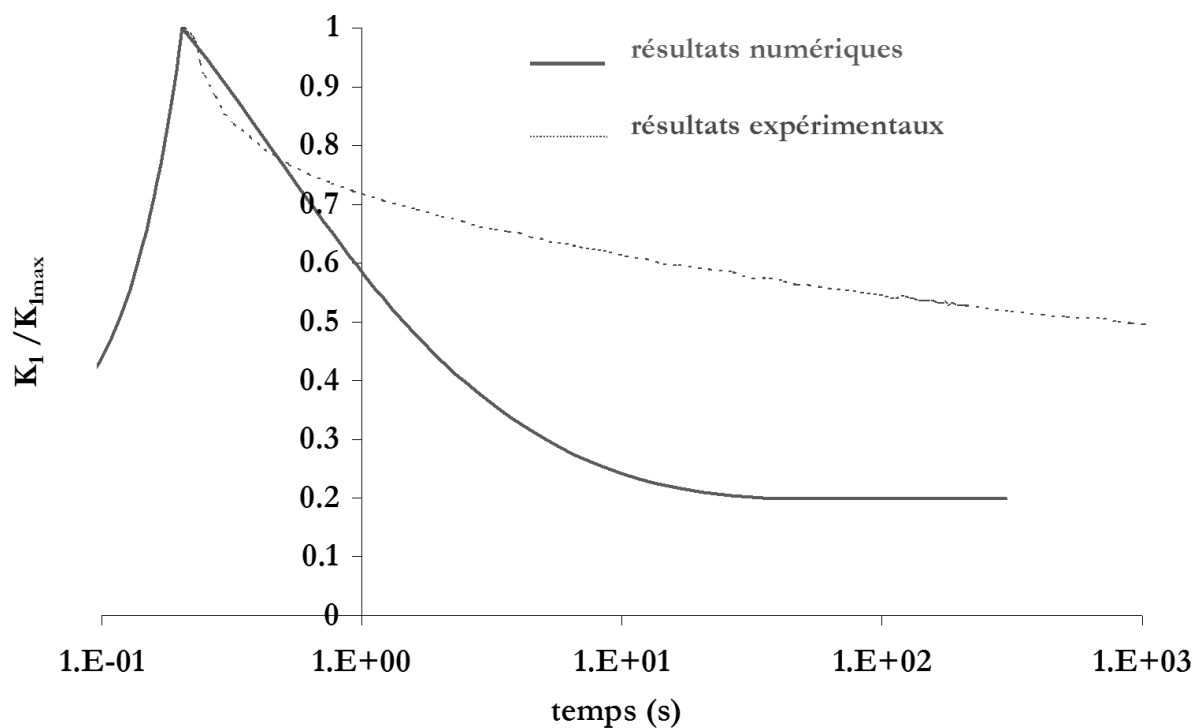
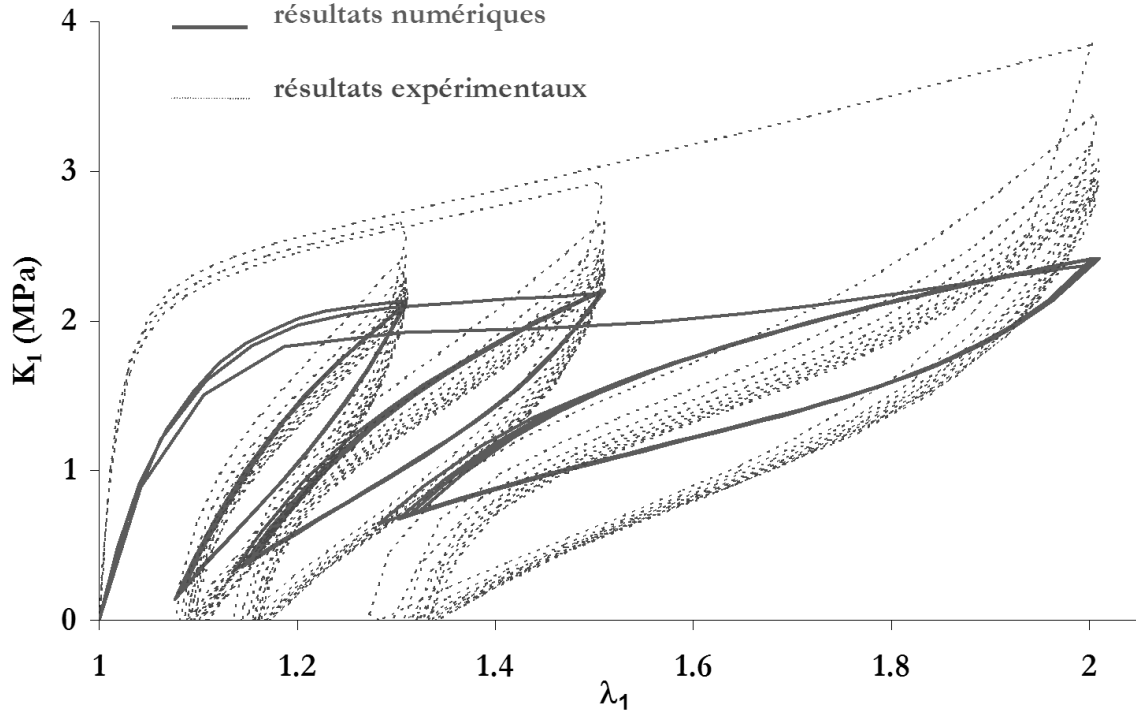


Figure 3.45 – Simulation d'un essai de relaxation en traction uniaxiale – Jeu de coefficients final n°1

$$2^{\text{ème}} \text{ cas } 0.1 < f_a < 10 \quad \longleftrightarrow \quad 0.04 < f_a / C_{10}^e < 4$$

La démarche est similaire à la précédente.

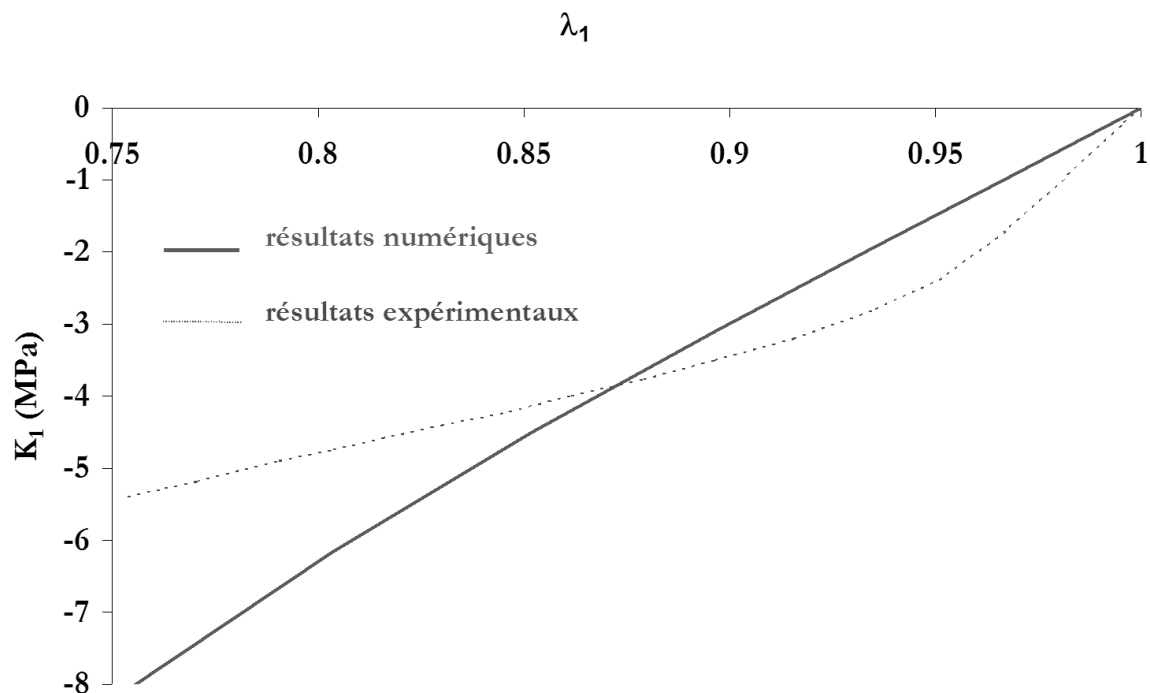
Les Fig. 3.46 et 3.47 montrent les résultats des simulations sur les quatre essais. Les simulations corréleront moins bien les résultats expérimentaux que dans le cas précédent. Cependant, la valeur de  $f_a$  étant 5 fois plus faible, les essais plus rapides (les essais de fatigue de période 3s) devraient être mieux simulés.



**Figure 3.46** – Résultats de la 2<sup>de</sup> itération – Jeu final n°2 – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\varepsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

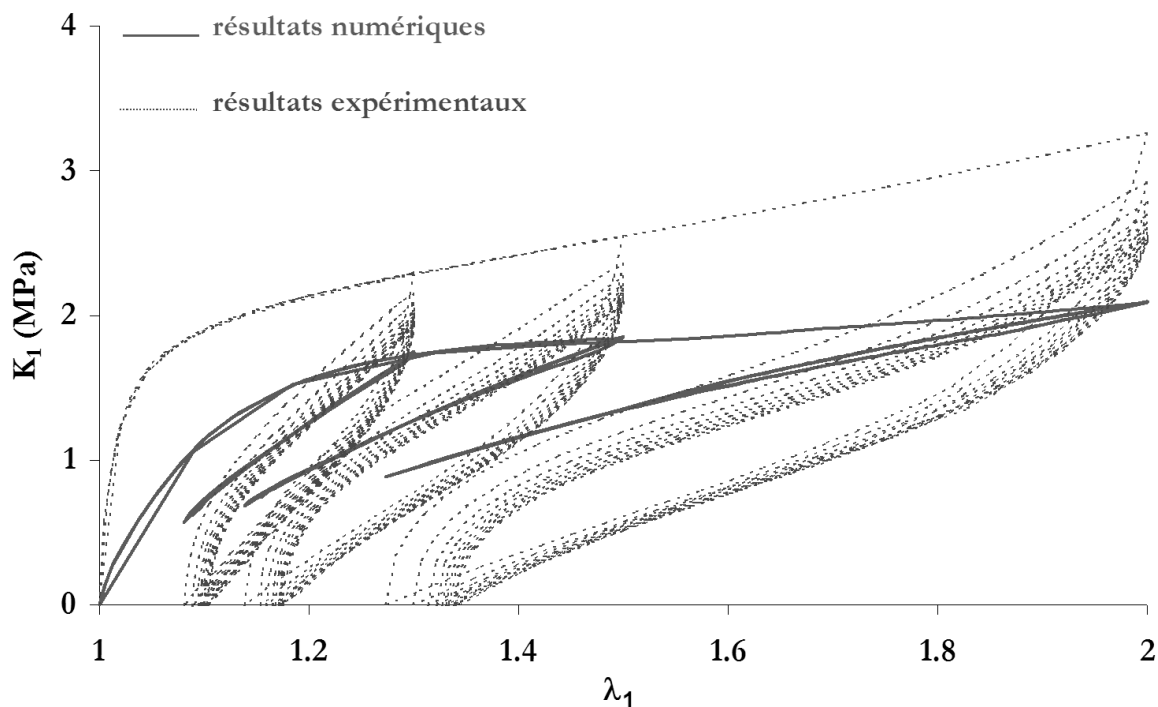
Le jeu final n°2 est :

$$\begin{pmatrix} C_{10}^e = 4.112 \\ C_{01}^e = 0.973 \\ C_{20}^e = 2.448 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \begin{pmatrix} C_{10}^a = 4.715 \text{ MPa} \\ C_{01}^a = 1.42 \text{ MPa} \\ f_a = 10. \text{ MPa.s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_\infty = 0.754 \\ \eta = 0.253 \end{pmatrix}$$



**Figure 3.47** – Résultats de la 2<sup>de</sup> itération – Jeu final n°2 – Simulation de l'essai de compression uniaxiale  $\dot{\varepsilon} = 1.3 \text{ s}^{-1}$

A titre indicatif, la Fig. 3.48 illustre les résultats de simulation des essais de traction uniaxiale cyclique plus lents ( $\dot{\varepsilon} = 0.01 \text{ s}^{-1}$ ). Ces simulations sont mauvaises. Ceci n'est pas surprenant puisque la valeur de  $f_a/C_{e10}$ , égale à 2.4 s, n'est pas adaptée à la simulation d'essais de période 100 s.



**Figure 3.48** – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique  $\dot{\varepsilon} = 0.01 \text{ s}^{-1}$  – Jeu de coefficients final n°2

## Commentaires - Discussion

**L'approche par variables internes** présente l'avantage de faire intervenir un nombre plus faible de coefficients. Elle correspond à un modèle de Poynting-Thomson (un seul amortisseur). Le paramètre  $f_a/C_{10}^e$  s'apparente au temps de relaxation. **L'approche fonctionnelle** correspond par contre à un modèle de Poynting-Thomson généralisé (autant d'amortisseurs que de termes dans la série de Prony). Ainsi, l'approche par variables internes avec le modèle de Poynting-Thomson ne permet pas de simuler les essais de relaxation alors que l'approche fonctionnelle avec 5 termes de relaxation le peut. Pour cette raison, le paramètre  $f_a$  ne peut pas être identifié sur ces essais alors que les poids des temps de relaxation intervenant dans l'approche fonctionnelle peuvent l'être de façon simple (l'ajustement des paramètres peut être manuel).

En conclusion, l'approche par variables internes basée sur un modèle de Poynting-Thomson correspond à un développement thermodynamique, et fait intervenir moins de coefficients, mais son identification ne peut pas s'appuyer sur les essais de relaxation. Cette dernière n'est donc pas simplifiée.

Le développement de cette approche basée sur un modèle faisant intervenir 2 ou plusieurs amortisseurs (modèle de Poynting-Thomson généralisé) serait intéressante.

### 3.3.4 – Comparaison des deux approches viscoélastiques : approche fonctionnelle et approche par variables internes

Les lois de comportement du SBR A ont été développées dans le but de modéliser les éprouvettes axisymétriques sollicitées en fatigue. Comme nous l'avons déjà souligné, les essais de fatigue sont effectués à des vitesses de déformation supérieures aux vitesses utilisées pour la caractérisation du matériau (essais de traction et compression uniaxiales). La comparaison des deux approches viscoélastiques, fonctionnelle et à variables internes, doit donc être effectuée à partir des calculs par éléments de finis d'éprouvettes axisymétriques sollicitées en fatigue. Toutefois, dans un premier temps, il nous a paru intéressant de comparer les deux approches dans le cas de sollicitations simples (traction et compression uniaxiales), mais effectuées avec des vitesses de chargements de l'ordre de ceux appliqués lors des essais de fatigue.

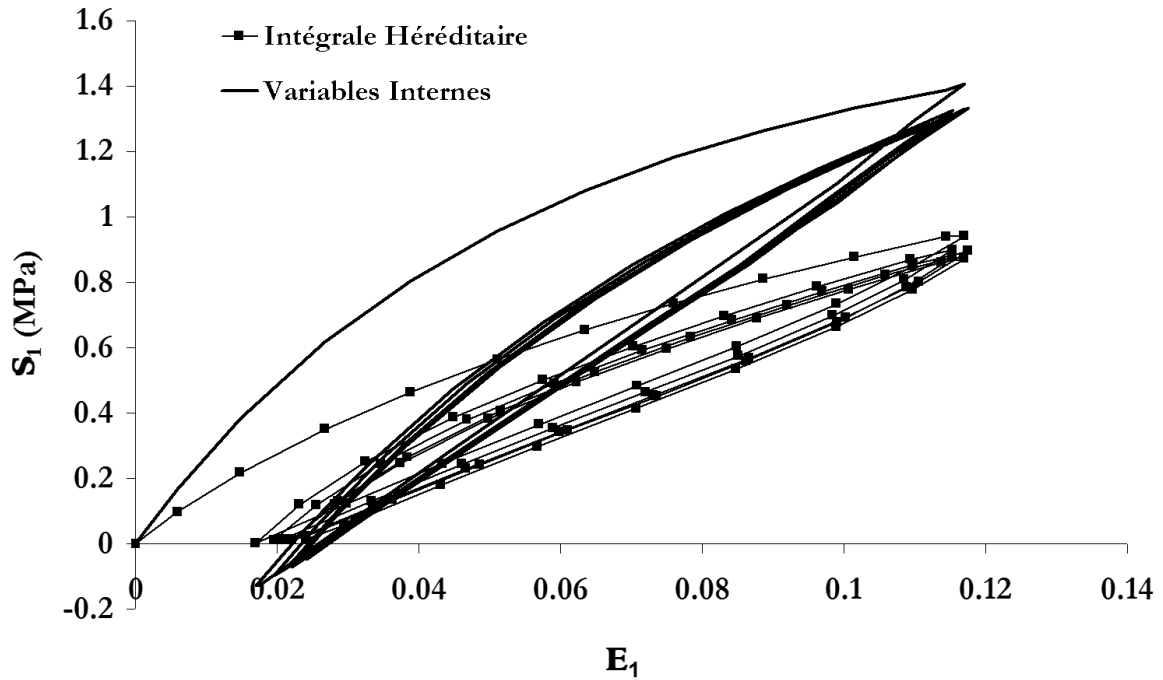
Les jeux de coefficients utilisés dans les deux approches viscoélastiques sont ceux identifiés dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.3.

Les résultats numériques des optimisations obtenus avec les deux approches sont donc comparés à travers la simulation de chargements de traction et de compression uniaxiales cycliques, à des vitesses imposées telles que la période du cycle soit de 3 s. En effet, l'objectif est de simuler les essais de fatigue de période voisine de 3s. Or, les essais de traction et compression simulés jusqu'à présent sont plus lents (essais expérimentaux). Etant donné que nous ne disposons pas d'essais expérimentaux effectués à ces vitesses, les chargements appliqués numériquement sont inspirés des chargements expérimentaux mais leur durée est modifiée de telle sorte que la période du cycle soit de 3 s.

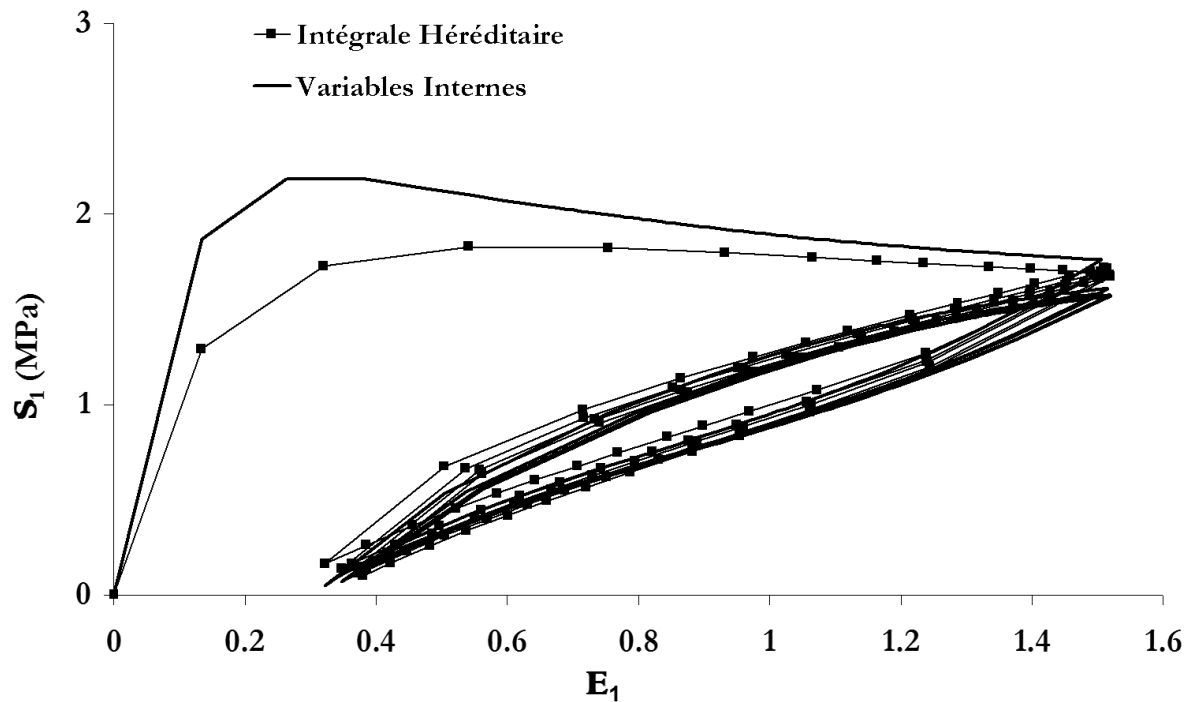
Les calculs sont menés sur des éléments de volume représentatifs.

Les Fig. 3.49 et 3.50 présentent les simulations de deux essais de traction uniaxiale cyclique. Les élongations imposées sont égales à 1.1 et 2. Les résultats étant présentés avec des variables lagrangiennes, ces élongations correspondent à des déformations de Green Lagrange  $\mathbb{E}$  de 0.12 et 1.5. On constate que les lois ne sont pas équivalentes, bien qu'elles aient été identifiées sur les mêmes essais. L'approche par variables internes conduit à une raideur initiale plus importante. La différence est donc très prononcée sur les cycles stabilisés à faible élongation - Fig. 3.49 - : la contrainte maximale calculée avec l'approche par variables internes est de 50% supérieure à celle calculée avec l'approche fonctionnelle. Cette différence s'estompe sur l'essai stabilisé à une élongation de 2. - Fig. 3.50 - : la différence est inférieure à 5%.

Un essai de compression uniaxiale cyclique est également simulé avec une période de 3 s - Fig. 3.51 -. De la même façon, l'approche par variables internes conduit à la simulation de contraintes plus importantes.

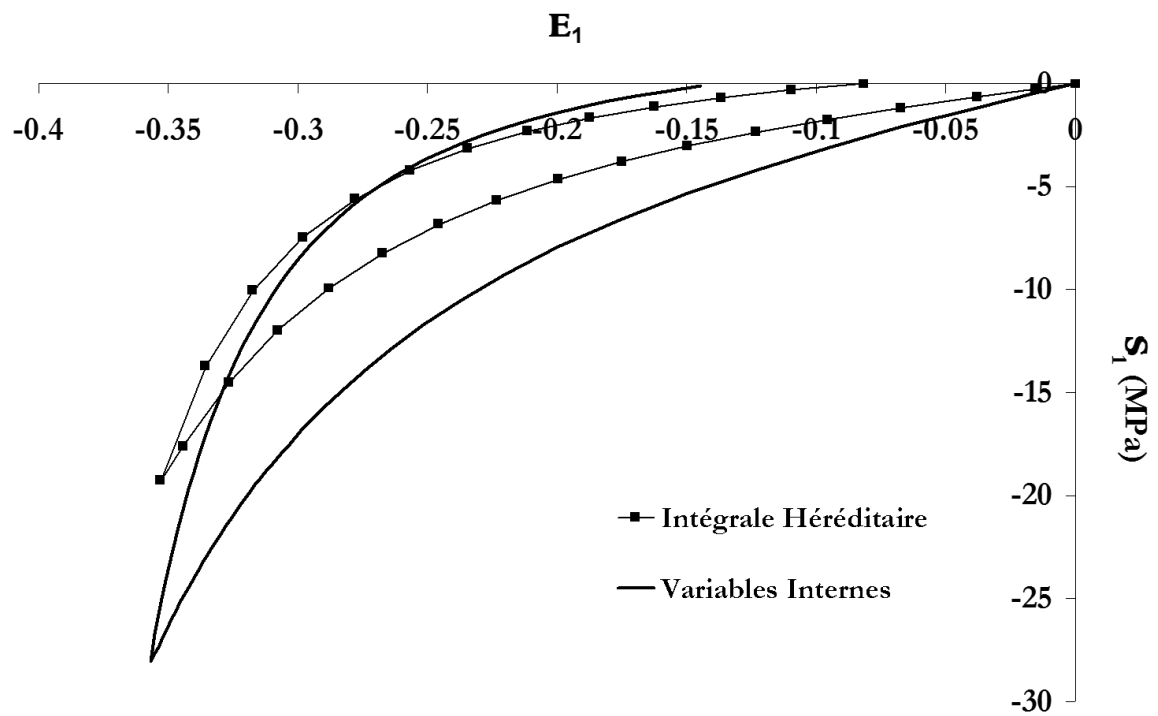


**Figure 3.49** – Simulation d'un essai de traction uniaxiale avec  $\lambda_{1max}=1.1$  ou  $E_{1max}=0.12$  - Comparaisons des résultats numériques obtenus avec les deux approches viscoélastique,  $T = 3s$



**Figure 3.50** – Simulation d'un essai de traction uniaxiale avec  $\lambda_{1max}=2.0$  ou  $E_{1max}=1.5$  - Comparaisons des résultats numériques obtenus avec les deux approches viscoélastique,  $T = 3s$





**Figure 3.51** – Simulation avec les deux approches viscoélastique d'un essai de compression uniaxiale,  $T = 3s$

Ces premières observations montrent que les identifications des deux types de lois ne sont pas équivalentes aux faibles elongations de traction et en compression. Elles seront également comparées à partir du calcul de structure de plot en traction-compression.

## 3.4 – Simulation des essais multiaxiaux et validation de la loi de comportement

Cette partie présente les simulations par calculs aux éléments finis des essais complexes : traction-compression sur les éprouvettes axisymétriques entaillées 'plots' (rayon d'entaille  $\approx 40\text{mm}$ ) et torsion-torsion sur les éprouvettes axisymétriques entaillées 'AE' (rayon d'entaille  $\approx 2\text{mm}$ ). Elle concerne seulement le SBR A chargé de silice.

Le premier paragraphe illustre et commente les résultats obtenus avec la loi hyperélastique incompressible, endommageable, viscoélastique, avec approche fonctionnelle. Le second paragraphe présente les calculs effectués avec la loi hyperélastique incompressible, endommageable, viscoélastique, avec approche par variable interne. Ceci permet de valider les deux types de lois de comportement ainsi que de connaître leur domaine d'application et leurs défauts. L'objectif est de connaître localement, en fond d'entaille, l'état de contrainte et de déformation. Ces variables mécaniques seront utilisées dans les diagrammes de fatigue pour synthétiser les résultats.

Les deux approches sont ensuite comparées et discutées dans le troisième paragraphe. Cette discussion s'appuie sur la comparaison de contraintes et déformations calculées sur les éprouvettes 'plot' avec les deux types d'approche viscoélastiques.

### 3.4.1 – Cas du SBR chargé – Approche fonctionnelle

Les simulations présentées sont effectuées avec une loi hyperélastique incompressible, endommageable, viscoélastique avec approche fonctionnelle. L'identification de cette loi est décrite dans le paragraphe 3.3.1.

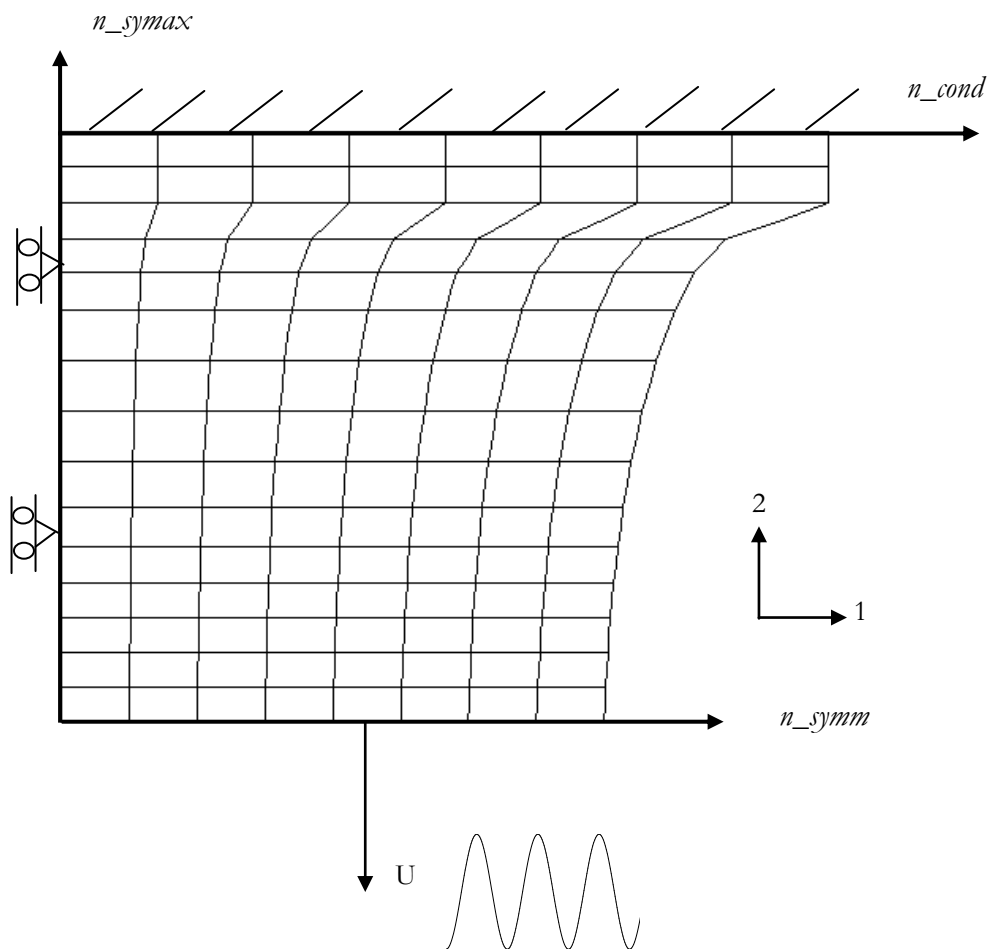
Les simulations des essais de traction-compression sur éprouvette 'plot' puis celles de torsion-torsion sur éprouvette 'AE' sont présentées et comparées avec l'expérience.

### Simulation des essais de traction-compression sur éprouvette 'plot'

Les essais mécaniques sont décrits dans le chapitre 2, paragraphe 2.5.

Le maillage est effectué d'après le plan du 'plot' - Fig. 2.10, § 2.1 -, lui-même reconstitué d'après les côtes relevées sur une dizaine de plots - Fig. 3.52 -. Seul un quart du plot est maillé. En effet, le calcul utilise sa symétrie par rapport au plan médiant et sa symétrie axiale. Les éléments sont quadrilatères et à symétrie axiale. Ils sont de type quadratique (8 nœuds) avec intégration réduite (quatre points de Gauss au lieu de 9 : le temps de calcul est réduit). La taille des mailles est choisie de façon à ce qu'elle n'influe pas sur les résultats du calcul – un maillage très fin a été utilisé et les résultats sont identiques -. Notons également que le coin supérieur (caoutchouc accolé au métal du mors) n'est pas pris en compte. Nous avons vérifié par des calculs aux éléments finis que cela n'avait aucune incidence sur le calcul des variables mécaniques locales en fond d'entaille. Les noms qui sont indiqués sur le maillage correspondent à des 'n-set', c'est à dire à des ensembles de nœuds sur lesquels sont appliquées les conditions limites.

Le comportement appliqué aux éléments est de type lagrangien total (les lois ont été écrites dans la formulation lagrangienne). La loi est hyperélastique, endommageable, viscoélastique avec approche fonctionnelle (intégrale héréditaire). Les coefficients sont ceux optimisés sur les essais de traction et compression uniaxiaux - § 3.3.1 -.



**Figure 3.52** – Maillage de l'éprouvette 'plot' – Schéma des conditions limites de déplacement

Les conditions limites consistent à :

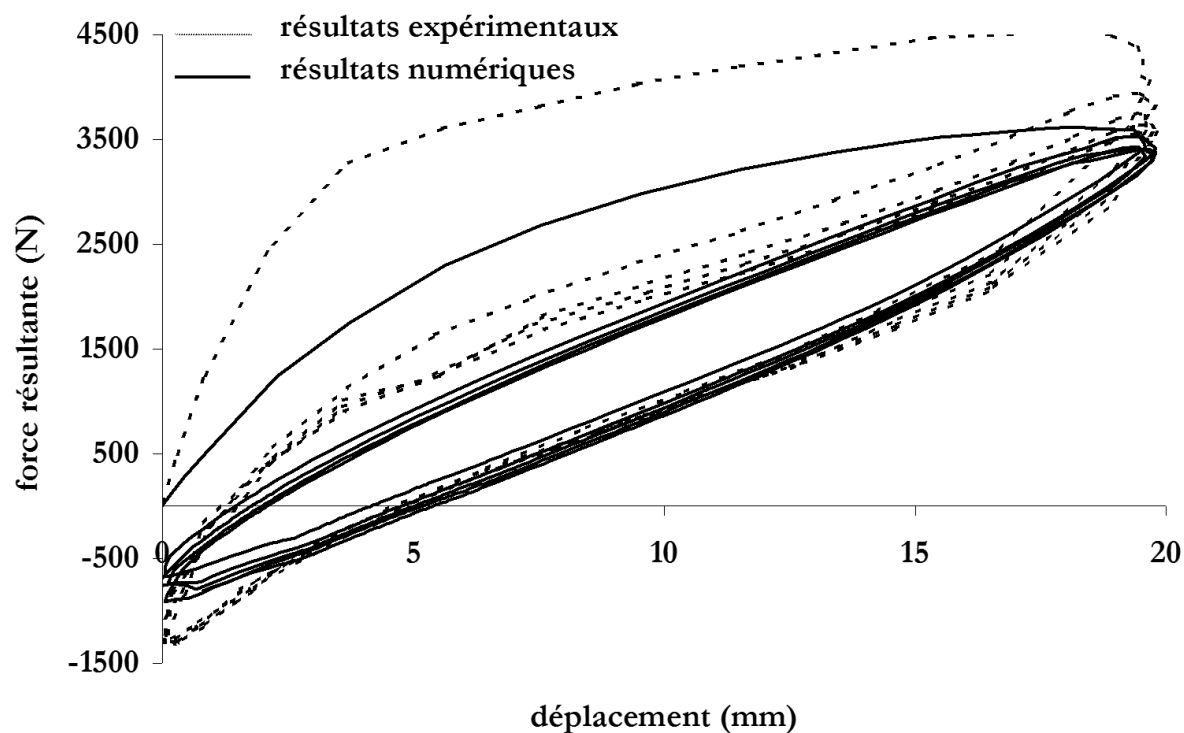
- bloquer le déplacement de l'ensemble de noeuds  $n_{symax}$  selon l'axe 1
- bloquer le déplacement de l'ensemble de noeuds  $n_{cond}$  selon les axes 1 et 2 : cela correspond au bridage dû au mors en acier de la machine d'essais cycliques
- imposer le déplacement : il est mesuré expérimentalement, divisé par deux puisque l'on travaille sur une moitié d'éprouvette et appliqué sur l'ensemble de noeuds  $n_{symm}$  dans la direction -2. Ils s'agit d'une sinusoïde oscillant entre deux valeurs et de période 3 s.

Le fichier de mise en données et le fichier matériau sont présentés en annexe 3G.

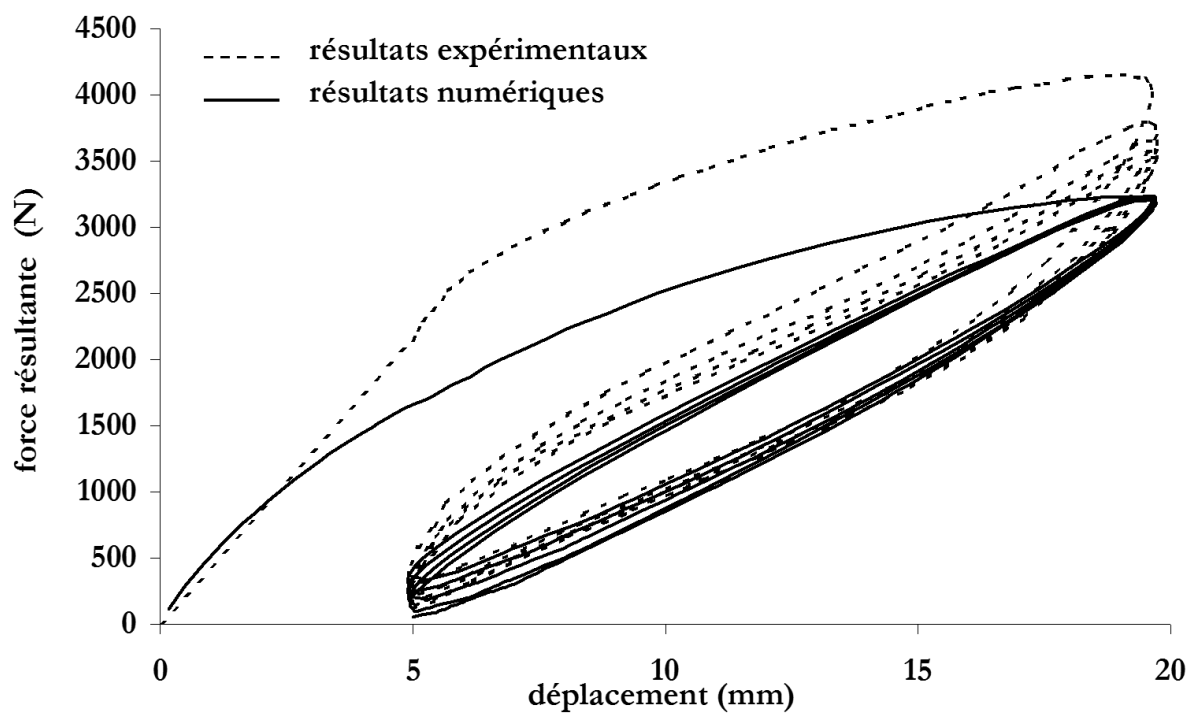
Les expériences de traction uniaxiale cyclique sur éprouvette 'lanière' nous ayant permis de conclure que le comportement est stabilisé après cinq cycles, seuls les cinq premiers cycles sont calculés.

Les temps de calcul CPU sont globalement inférieurs à 5 000s.

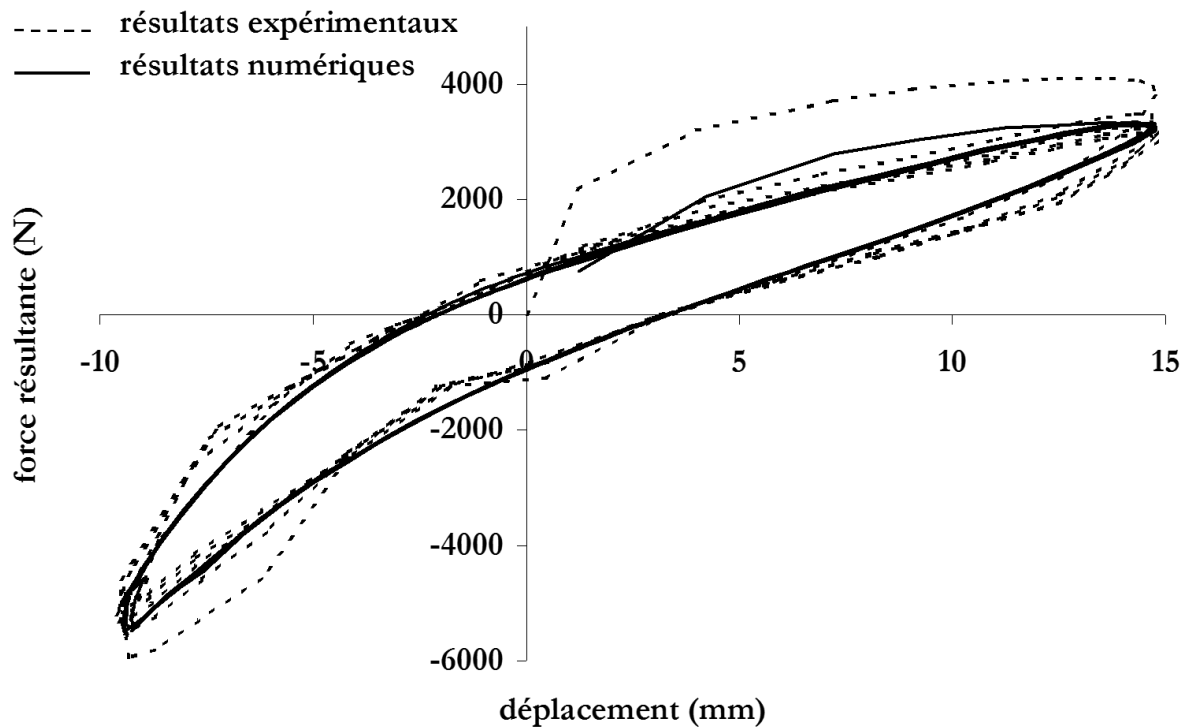
Dans un premier temps, les valeurs globales force résultante et déplacement issus des simulations sont comparés aux valeurs expérimentales. Trois chargements différents ont été appliqués : 0/20 mm, +5/20 mm et -10/15 mm - Fig. 3.53, 3.54 et 3.55 -.



**Figure 3.53** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre 0 et 20 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience



**Figure 3.54** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre 5 et 20 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience



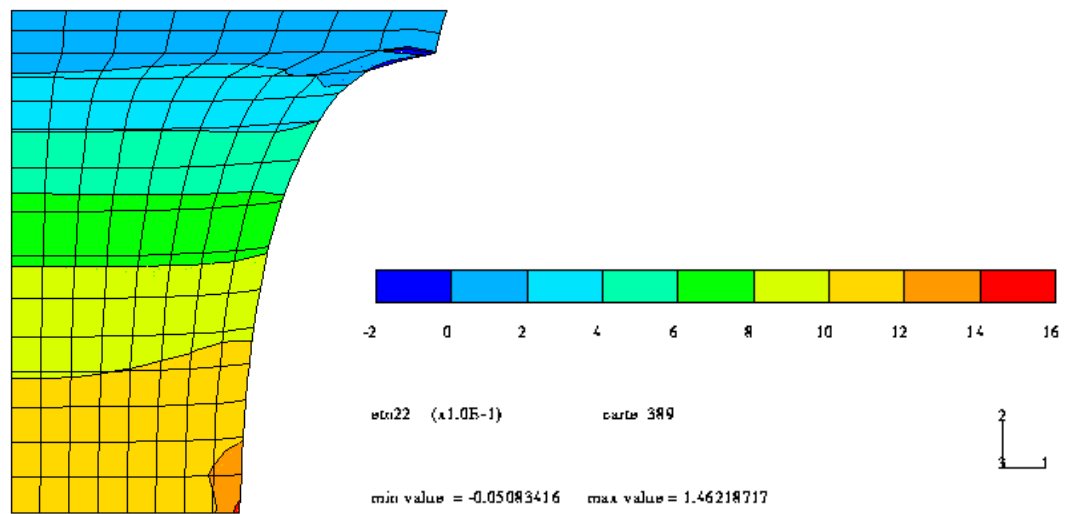
**Figure 3.55** – Simulation d'un chargement de traction-compression cyclique entre -10 et 15 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience

Ces résultats, ainsi que ceux d'une dizaine d'autres calculs non détaillés dans ce mémoire, apparaissent satisfaisants. En effet, les erreurs sur les valeurs globales en traction sont inférieures à 20% et le cycle d'hystérésis est correctement simulé. Par contre, la simulation de la première montée en charge n'est pas réaliste puisque les contraintes calculées sont inférieures aux contraintes expérimentales. Ceci peut provenir du renforcement important dû aux charges de silice, partiellement détruit après la première montée en charge. Cet écart n'est pas rédhibitoire puisque nous voulons dépouiller les calculs du comportement stabilisé.

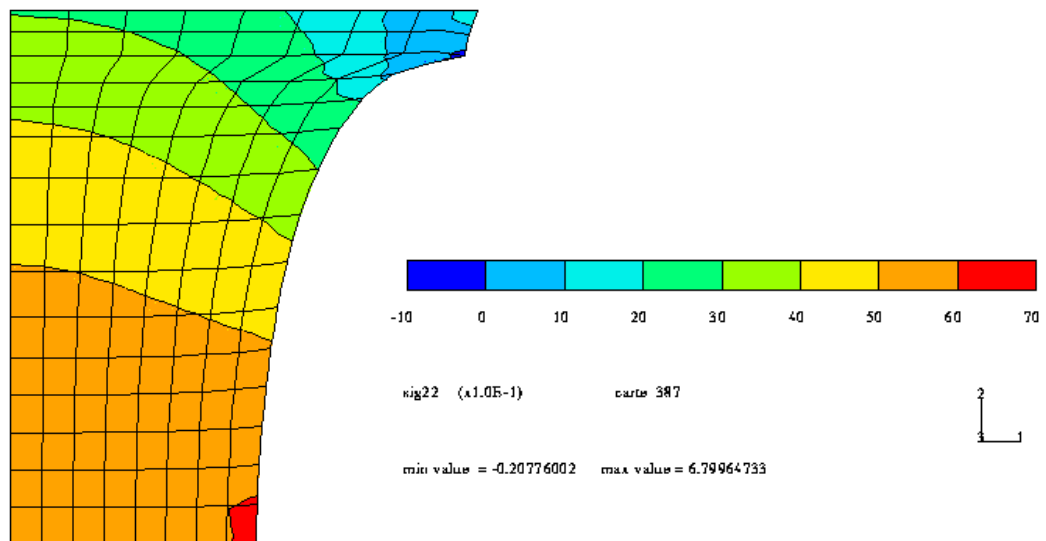
Pour affirmer que ces résultats sont satisfaisants, rappelons d'une part que ces essais sont 5 à 50 fois plus rapides que les essais simples à partir desquels la loi a été identifiée, et d'autre part que la loi, mise en œuvre pour cette étude, n'avait jamais été 'utilisée', à notre connaissance, pour modéliser des éprouvettes de géométrie complexe auxquelles on applique un chargement cyclique. Notons à cet égard que l'endommagement, considéré isotrope dans la loi de comportement, peut conduire à une sous-estimation des contraintes calculées.

Nous constatons également que le second cycle simulé est déjà quasiment stabilisé.

Les Fig. 3.56 et 3.57 présentent les cartographies des isovaleurs de la déformation de Green Lagrange 22 (eto22) et la contrainte de Cauchy (sig22) tracées à leur valeur maximale au cours du 3<sup>ème</sup> cycle. On vérifie que les concentrations de déformation et de contrainte se situent au niveau du fond d'entaille.



**Figure 3.56** – Cartographie des isovaleurs  $E_{22}$  (déformation de Green-Lagrange) sur l'éprouvette 'plot' testée entre 0 et 20 mm – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement - Déplacement global = 20 mm

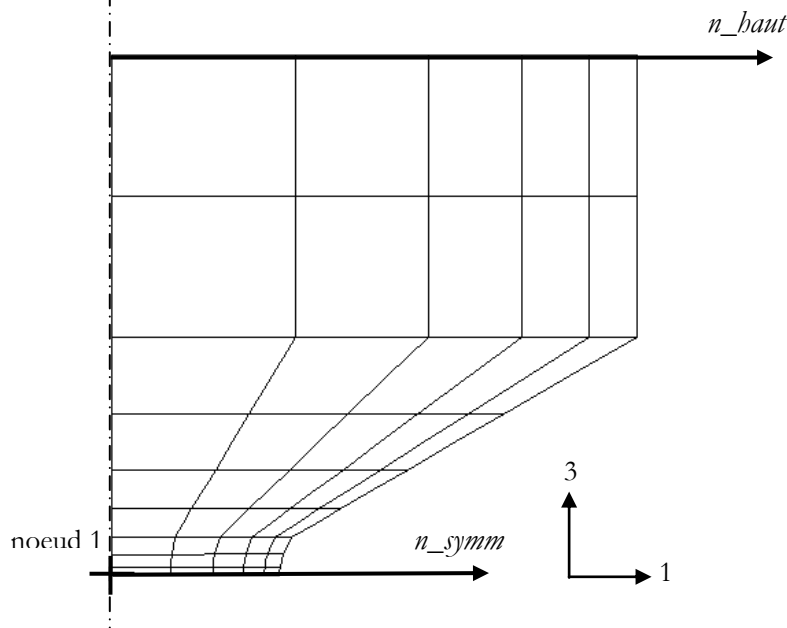


**Figure 3.57** – Cartographie des isovaleurs  $T_{22}$  (contrainte de Cauchy) sur l'éprouvette 'plot' testée entre 0 et 20 mm – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement - Force résultante = 3 400N

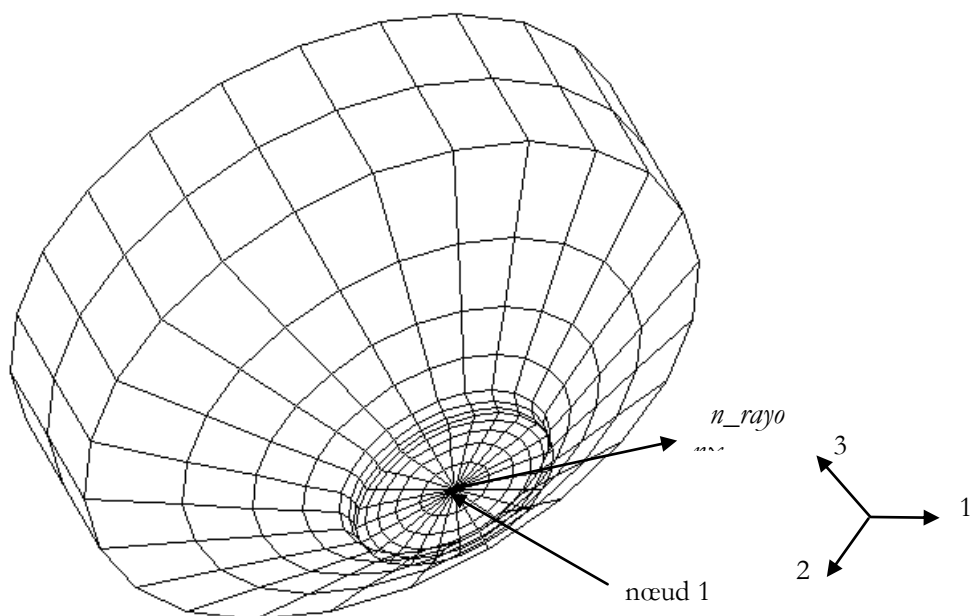
## L'éprouvette 'AE' sollicitée en torsion-torsion

Les essais mécaniques sont décrits dans le chapitre 2, § 2.2.

Le maillage est effectué d'après le plan de l' 'AE' – Fig. 2.12 -. Seule une moitié de l' 'AE' est maillée : le calcul utilise sa symétrie par rapport au plan médiant. Le maillage a d'abord été construit en deux dimensions – Fig. 3.58 -. Les éléments sont quadrilatères et à symétrie axiale. Ils sont de type quadratique (8 nœuds) avec intégration réduite (quatre points de Gauss). La taille des mailles est optimisée de sorte à avoir une bonne précision et un temps de calcul raisonnable. Afin d'appliquer une torsion – déplacement angulaire perpendiculaire aux éléments -, le maillage a dû être étendu à trois dimensions – Fig. 3.59 -. Il a été généré à partir du maillage deux dimensions par une rotation autour de l'axe de symétrie. Les éléments sont alors de types prismatiques et hexaédriques quadratiques réduits.



**Figure 3.58** – Maillage 2D de l'éprouvette 'AE'



**Figure 3.59** – Maillage 3D de l'éprouvette 'AE'

Comme pour le calcul des éprouvettes plots, le formalisme utilisé est de type lagrangien total. La loi est hyperélastique, endommageable, viscoélastique avec approche fonctionnelle. Les coefficients sont ceux optimisés sur les essais de traction et compression uniaxiales - § 3.3.1 -.

Des ensembles de noeuds ont été définis afin d'appliquer les conditions limites. Le groupement  $n\_haut$  représente la face supérieure de l'éprouvette,  $n\_bas$  la face inférieure (médiane) et  $n\_rayonx$  ( $x=0$  à 23) représente chaque rayon de la face inférieure.

Les conditions limites sont alors :

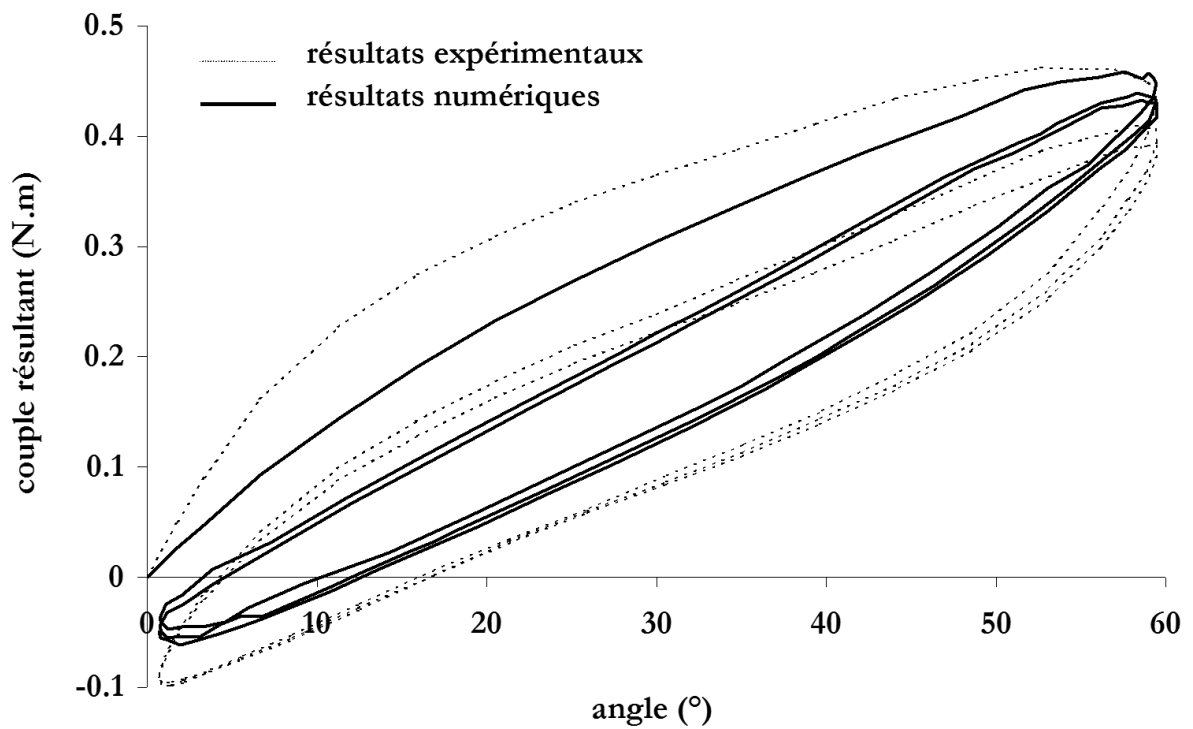
- rotation : l'angle de rotation est mesuré expérimentalement, divisé par deux puisque l'on travaille sur une demi éprouvette et appliquée sur la face supérieure ( $n\_haut$ ). Cette rotation impose les déplacements selon les trois directions : le déplacement selon la direction 3 est nul. Elle est quasi sinusoïdale, de période quelques secondes et oscille entre deux valeurs  $\alpha_{min}$  et  $\alpha_{max}$ .
- nœud 1 bloqué en 1 et 2
- même degré de liberté appliqué selon la troisième direction sur la face inférieure ( $n\_symm$ ) : la face reste plane et perpendiculaire à la direction 3. Les déplacements des nœuds sont libres dans les deux autres directions. En effet expérimentalement, l'un des mors de l'éprouvette est monté sur des rails et son déplacement est libre dans la direction de l'axe de rotation. De plus, par symétrie, cette face doit rester plane.
- empêchement de rotation sur les groupes de nœuds  $n\_rayonx$  (ils correspondent à des directions radiales de la face inférieure): déplacement radial des nœuds possible mais déplacement angulaire impossible : la face ne tourne pas mais peut se contracter ou se dilater.

Etant donné la durée importante des calculs, et la stabilisation dès le second cycle des contraintes calculées numériquement sur l'éprouvette 'plot', seuls les trois premiers cycles sont simulés. Les temps de calcul CPU sont alors de l'ordre de 300 000s.

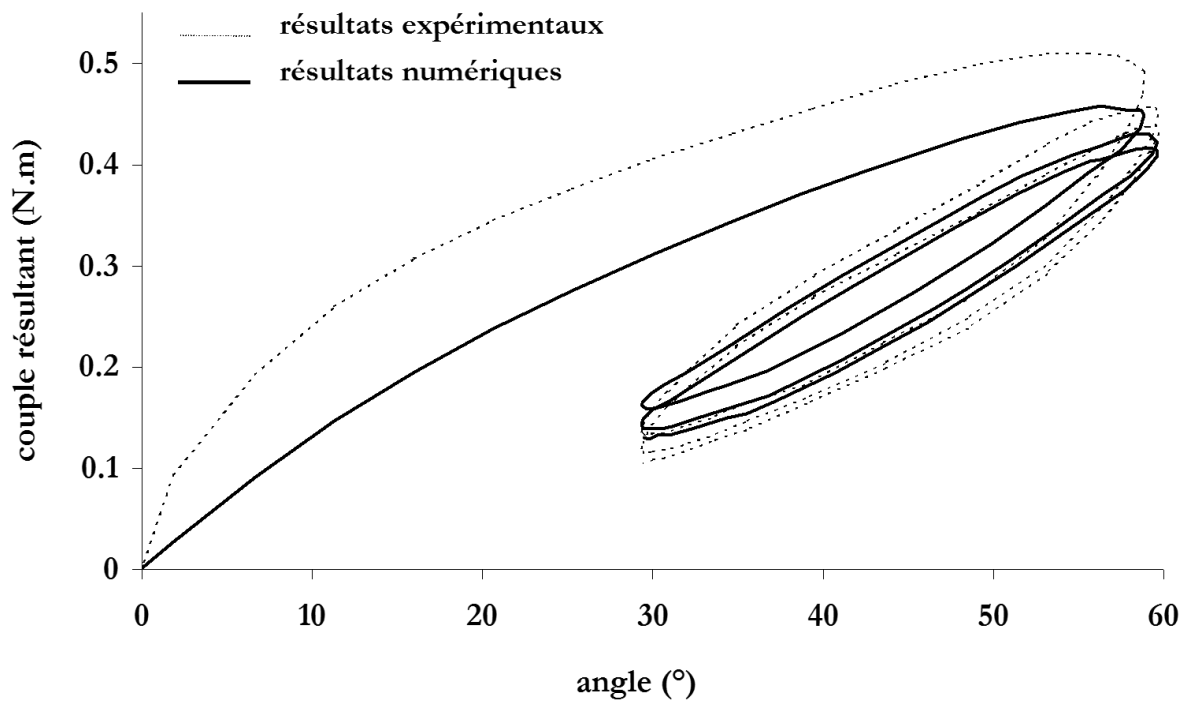
Le fichier de mise en données et le fichier matériau sont présentés en annexe 3G.

Dans un premier temps, les valeurs globales de couple résultant et d'angle issues des simulations sont comparés aux valeurs expérimentales. Trois chargements différents ont été appliqués :  $0/60^\circ$ ,  $+20/60^\circ$  et  $-35/35^\circ$  - Fig. 3.60, 3.61 et 3.62 -. Les résultats sont, comme dans le cas précédent, satisfaisants. Les valeurs de couple sont bien représentées sur le comportement stabilisé.

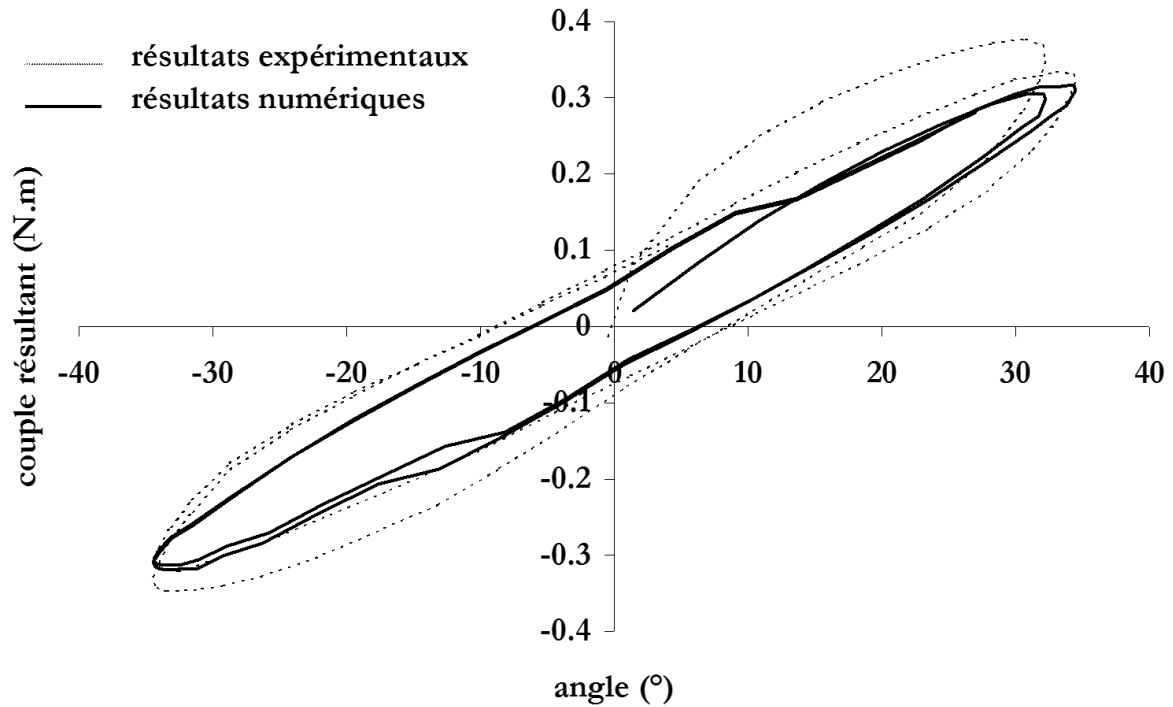




**Figure 3.60** – Simulation d'un chargement de torsion entre 0 et 60 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience



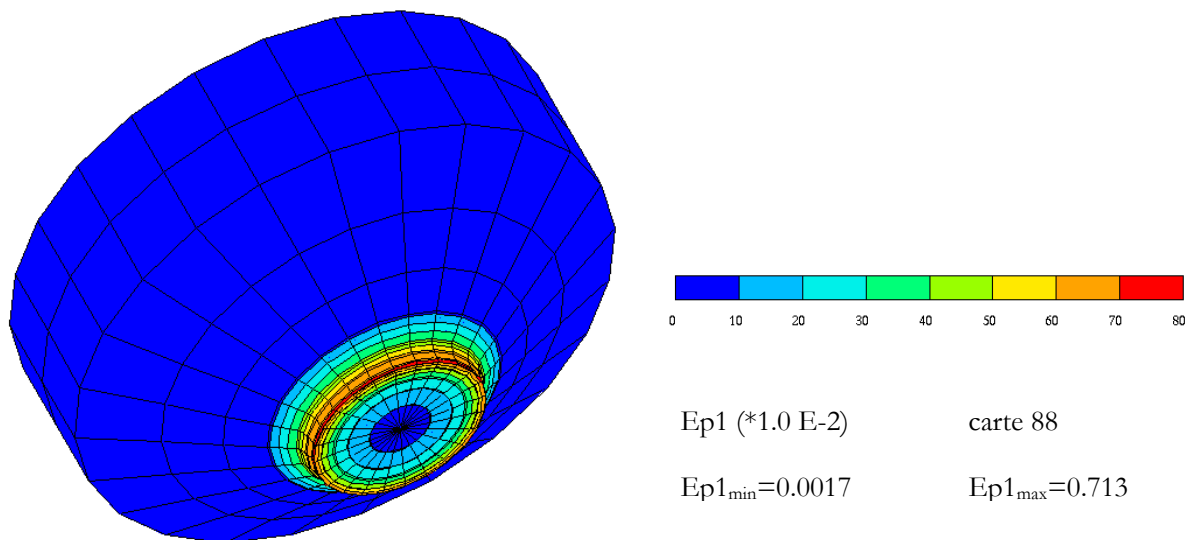
**Figure 3.61** – Simulation d'un chargement de torsion entre 30 et 60 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience



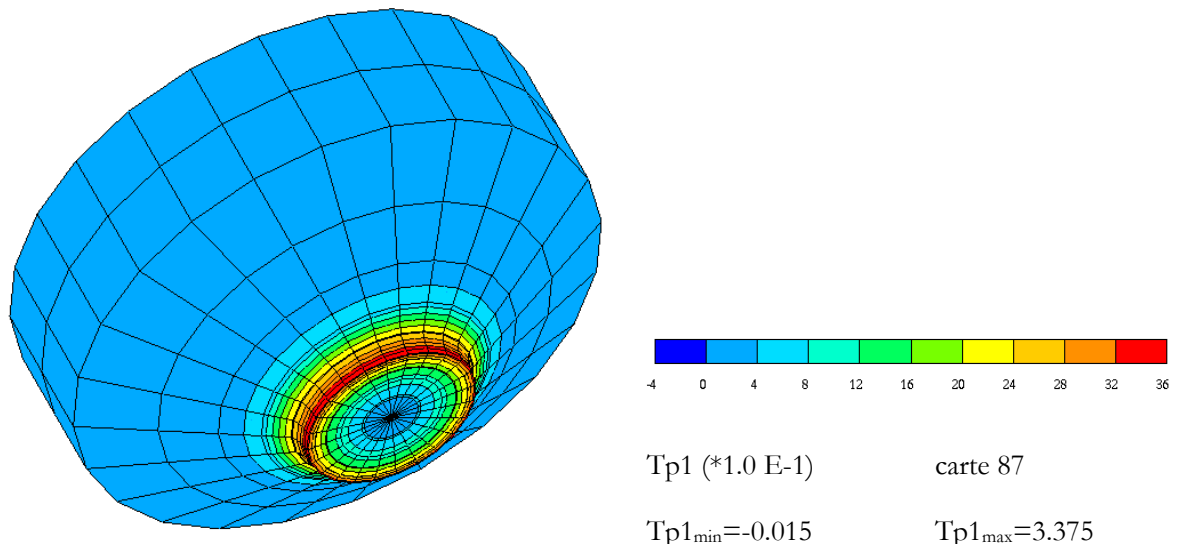
**Figure 3.62** – Simulation d'un chargement de torsion entre  $-35$  et  $35$  ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience

Les Fig 3.63 et 3.64 présentent les cartographies des isovaleurs de la déformation principale maximale de Green Lagrange  $Ep1$  et de la contrainte principale maximale de Cauchy  $Tp1$  au sommet du troisième cycle de chargement d'une éprouvette testée entre 0 et  $40^\circ$ . Ces cartographies font apparaître la symétrie de révolution. On constate que les déformations et les contraintes sont maximales en fond d'entaille, sur la surface de l'éprouvette.

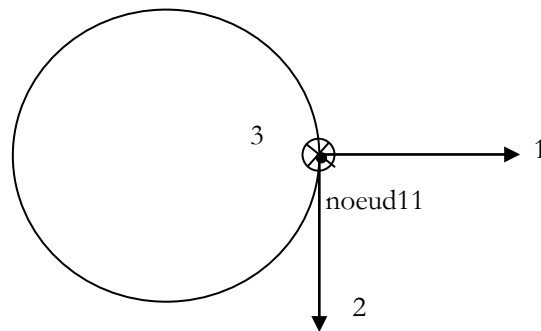
Sur le nœud 11 du fond d'entaille – Fig. 3.65 –, les composantes des déformations de Green Lagrange  $E_{23}$  et  $E_{33}$  ainsi que les contraintes de Cauchy  $T_{23}$  et  $T_{22}$  sont tracées – Fig. 3.66 –. Les autres composantes présentent des valeurs très inférieures et ne sont pas représentées sur le graphe.



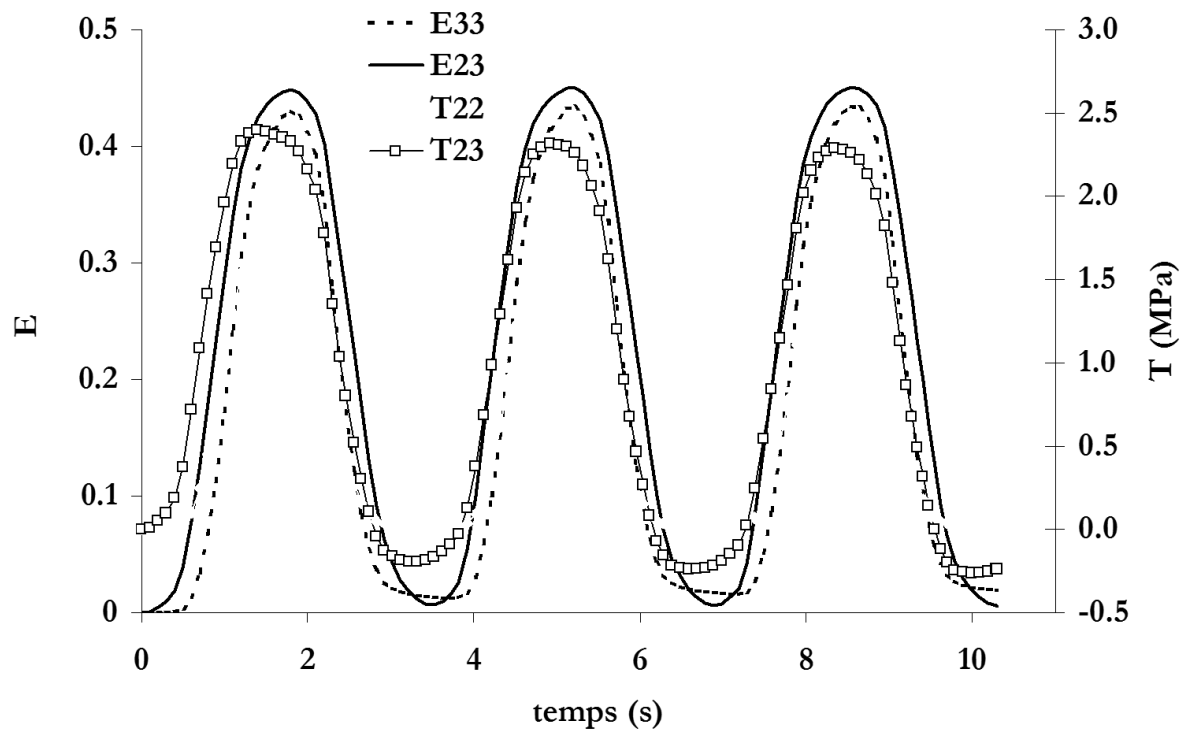
**Figure 3.63** – Cartographie des isovaleurs  $Ep1$  (déformation principale n°1 de Green-Lagrange) sur l'éprouvette 'AE' testée entre 0 et  $40^\circ$  – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement  $\alpha=40^\circ$



**Figure 3.64** – Cartographie des isovaleurs  $Tp1$  (contrainte principale n°1 de Cauchy) sur l'éprouvette 'AE' testée entre 0 et 40 ° – Sommet du 3<sup>ème</sup> cycle de chargement  $\alpha=40^\circ$



**Figure 3.65** – Schéma de la face inférieure (ou de symétrie) de l'éprouvette AE – Position du nœud 11 par rapport au repère d'explicitation des contraintes et des déformations



**Figure 3.66** – Evolution des composantes  $E_{33}$  et  $E_{23}$  du tenseur des déformations de green Lagrange et des composantes  $T_{22}$  et  $T_{23}$  du tenseur des contraintes de Cauchy sur le nœud 11 en fonction du temps

### 3.4.2 – Cas du SBR chargé – Approche par variables internes

Les simulations présentées dans ce paragraphe sont effectuées avec une loi hyperélastique incompressible, endommageable, viscoélastique avec approche par variables internes. Les identifications de cette loi sont décrites dans le paragraphe 3.3.3. Suite aux conclusions précédentes, et en prenant en compte la durée des calculs, seuls les trois premiers cycles sont calculés.

#### Simulation des essais de traction-compression sur éprouvette ‘plot’ – Comparaison des deux jeux optimisés ( $f_a=47$ et $f_a=10$ )

Le maillage, le chargement et les conditions aux limites sont identiques à ceux utilisés pour les calculs viscoélastiques avec approche fonctionnelle.

Le formalisme appliqué aux éléments est de type lagrangien total. La loi est hyperélastique, endommageable, viscoélastique avec approche par variables internes. Les coefficients sont ceux optimisés sur les essais de traction et compression uniaxiales - § 3.3.1 -.

Les temps de calcul CPU sont globalement inférieurs à 30 000s. Ils sont ainsi de l'ordre de 6 fois plus importants que les calculs avec l'approche fonctionnelle.

Comparons dans un premier temps les calculs menés avec les deux jeux optimisés précédemment. Le premier jeu a été obtenu en imposant des bornes sur  $f_a$  égales à 0 et 50. Le second jeu a été obtenu en imposant des bornes égales à 0 et 10. Les deux jeux sont alors :

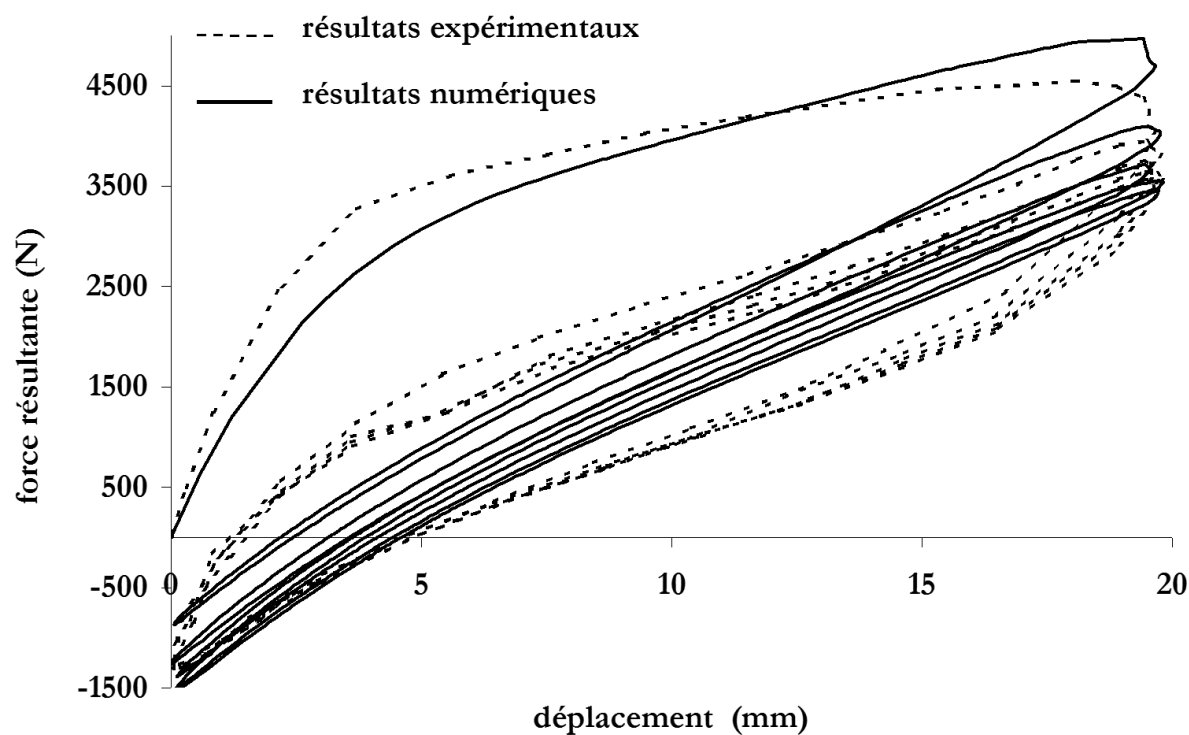
Jeu n°1

$$\begin{pmatrix} c_{10}^e = 3.565 \\ c_{01}^e = 1.305 \\ c_{20}^e = 0.839 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad \begin{pmatrix} c_{10}^a = 3.74 \text{ MPa} \\ c_{01}^a = 1.866 \text{ MPa} \\ f_a = 47. \text{MPa.s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_\infty = 0.718 \\ \eta = 0.206 \end{pmatrix}$$

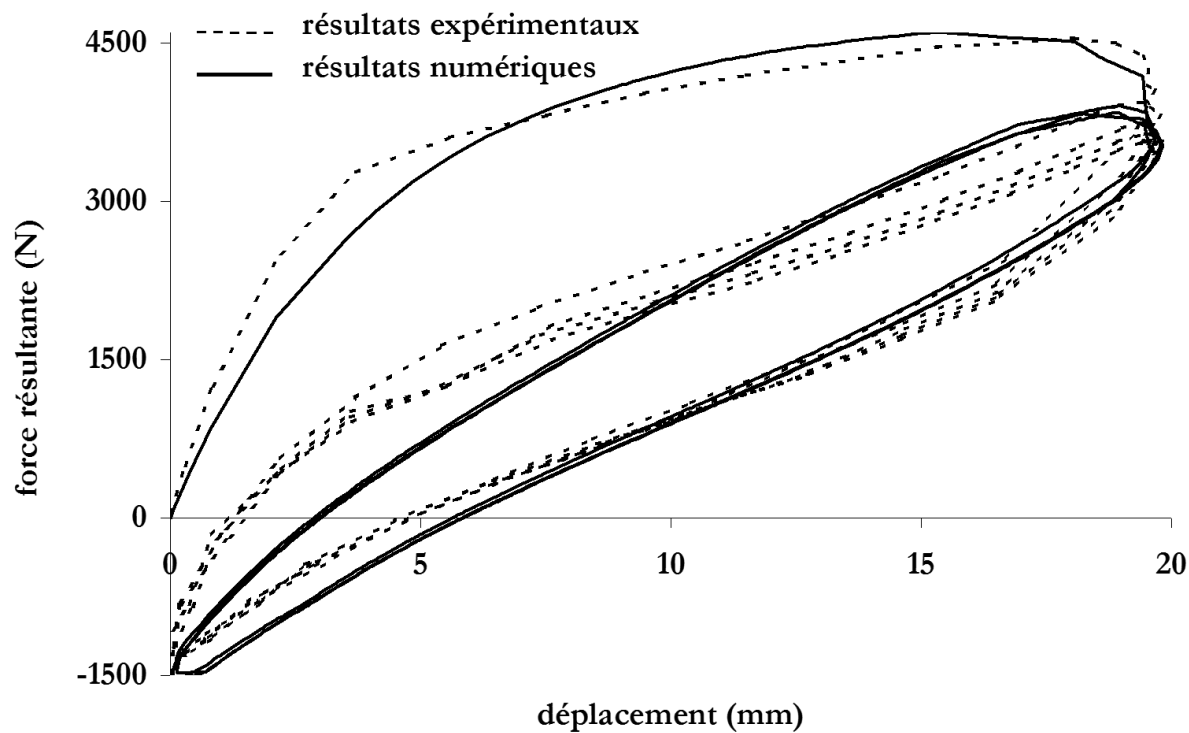
Jeu n°2

$$\begin{pmatrix} c_{10}^e = 4.112 \\ c_{01}^e = 0.973 \\ c_{20}^e = 2.448 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad \begin{pmatrix} c_{10}^a = 4.715 \text{ MPa} \\ c_{01}^a = 1.42 \text{ MPa} \\ f_a = 10. \text{MPa.s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_\infty = 0.754 \\ \eta = 0.253 \end{pmatrix}$$

Le chargement appliqué sur le plot oscille entre 0 et 20 mm. La Fig. 3.67 illustre les résultats numériques, comparés au résultats expérimentaux, obtenus avec le jeu n°1. La Fig. 3.68 illustre les résultats obtenus avec le jeu n°2.



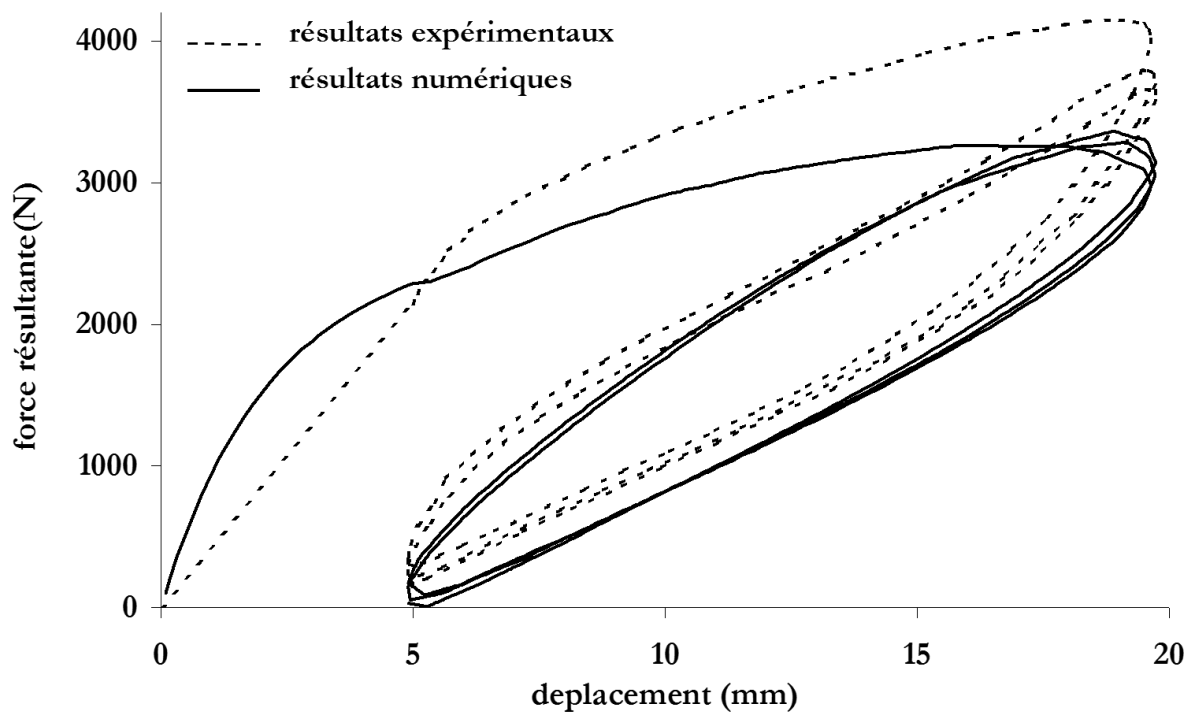
**Figure 3.67** – Simulation d'un essai de traction-compression sur éprouvette 'plot' déplacement imposé entre 0 et 20mm – Jeu n°1 ( $f_a=47$  MPa.s)



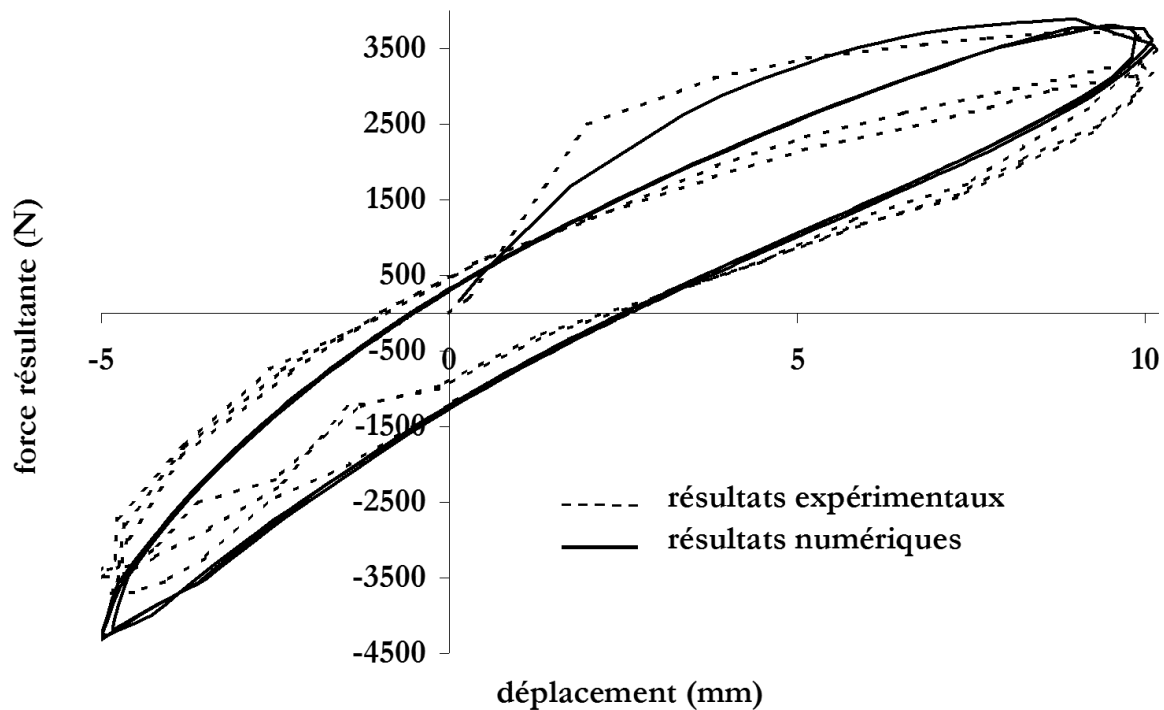
**Figure 3.68** – Simulation d'un essai de traction-compression sur éprouvette 'plot' déplacement imposé entre 0 et 20mm – Jeu n°2 ( $f_a=10$  MPa.s)

Le jeu n°1 ( $f_a=47$  MPa.s) permet de simuler correctement l'amplitude de force résultante. L'aire du cycle d'hystérèse est cependant fortement sous estimée. Le jeu n°2 simule correctement l'amplitude de force, mais également l'hystérèse. Ce résultat n'est pas surprenant. En effet, le paramètre  $f_a$  égal à 10 MPa.s est plus adapté pour simuler des cycles de périodes plus faibles.

Deux autres essais sont alors simulés avec le jeu de paramètres n°2. Les chargements sont +5/20 mm et -5/10 mm – Fig. 3.69 et 3.70 -. Le calcul avec un chargement de -10/15 mm ne converge pas, probablement parce que la compression est trop importante. Le domaine de validité des paramètres a été mal estimé pour l'application au calcul des plots en compression..



**Figure 3.69** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre 5 et 20 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience – Jeu n°2 ( $f_a=10$  MPa.s)



**Figure 3.70** – Simulation d'un chargement de traction cyclique entre -5 et 10 mm d'une éprouvette 'plot' – Comparaison avec l'expérience - Jeu n°2 ( $f_a=10$  MPa.s)

D'autres calculs imposant des conditions aux limites différentes ont été menés. L'ensemble des résultats paraît assez satisfaisant. Les erreurs sur les valeurs globales en traction sont supérieures à celles observées à partir de l'approche fonctionnelle. Les hystérèses et contraintes des premières montées en charge sont par contre mieux simulées. La raideur du matériau en compression est cependant surestimée.

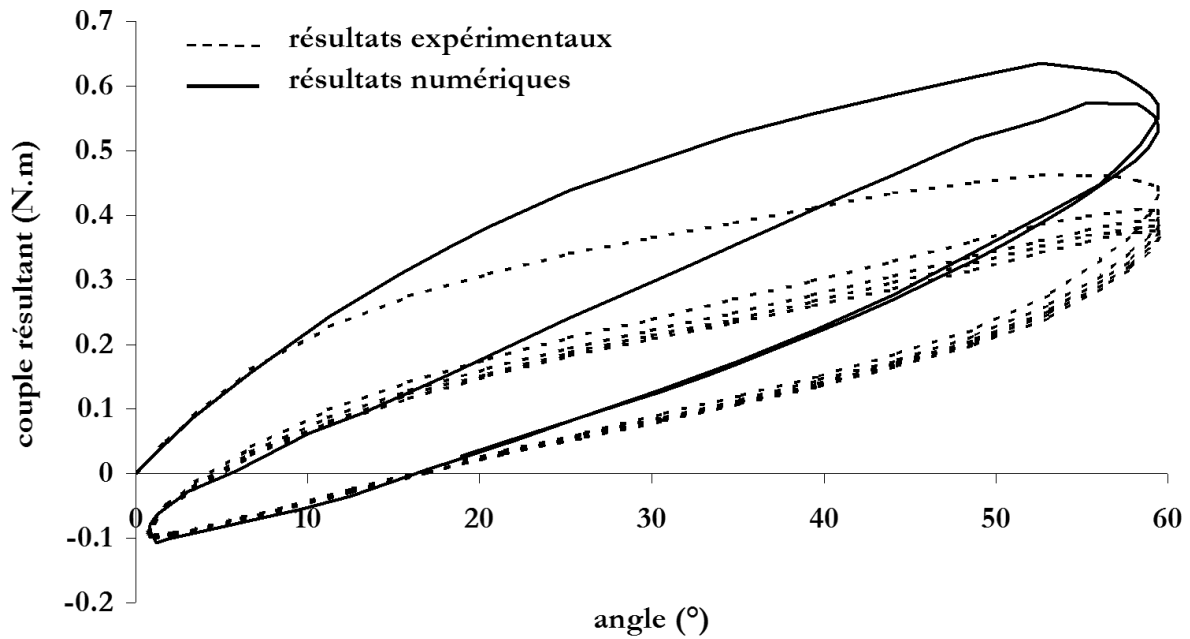
### Simulation des essais de torsion-torsion sur éprouvette 'AE'

Les maillages, éléments et conditions aux limites sont les mêmes que ceux appliqués dans le cas de l'approche fonctionnelle. Le formalisme appliqué aux éléments est de type lagrangien total. La loi est hyperélastique, endommageable, viscoélastique avec approche par variables internes. Seul le jeu n°2 ( $f_a=10$  MPa.s) est testé.

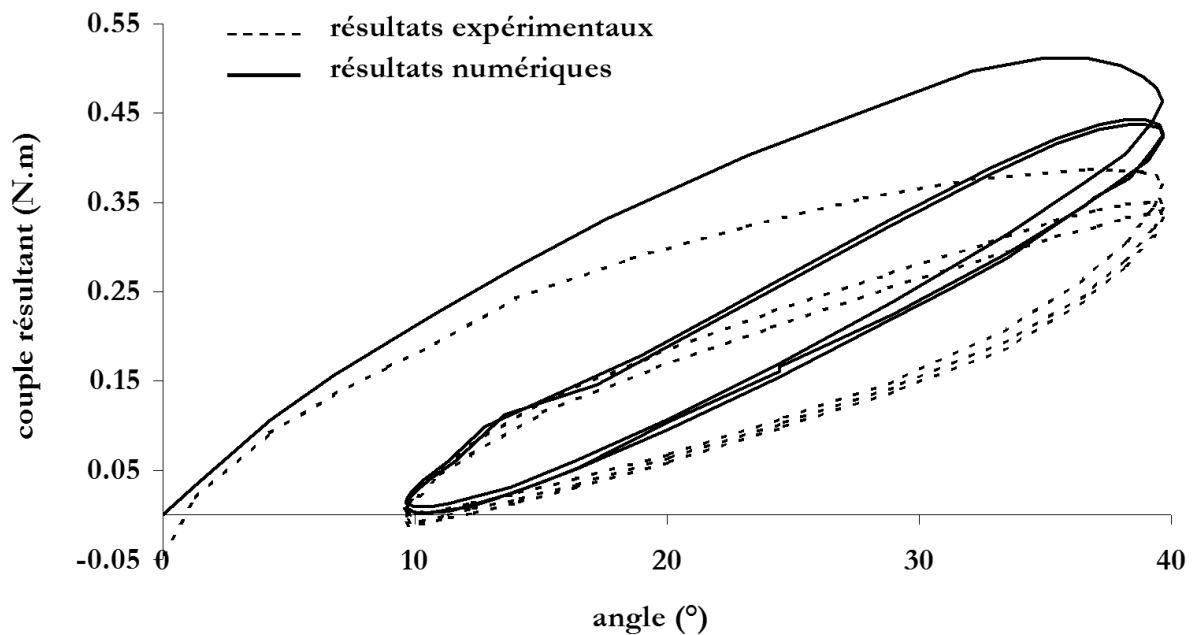
Les temps de calcul CPU sont très longs, de l'ordre de plusieurs mois (l'écriture des équations devrait être simplifiée au cours de travaux ultérieurs). Nous tenons à signaler qu'à notre connaissance, aucun calcul de ce type en trois dimensions n'a été rapporté dans la littérature jusqu'à ce jour.

Seuls deux calculs ont été menés. Les chargements sont sinusoidaux, entre 0 et 60° pour le premier calcul et entre 10 et 40° pour le second calcul. Les valeurs globales de couple résultant sont comparées aux valeurs de couple mesurées expérimentalement – Fig. 3.71 et 3.72 -. La raideur globale simulée est supérieure de plusieurs dizaines de pour cent à la raideur expérimentale. Il est probable que les coefficients aient été mal ajustés. En effet, l'essai de traction plane n'a pas été pris en considération lors de l'identification des coefficients. Ceci pourra être amélioré dans le futur.





**Figure 3.71** – Simulation d'un chargement de torsion entre 0 et 60 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience – Jeu n°2 ( $f_a=10$  MPa.s)



**Figure 3.72** – Simulation d'un chargement de torsion entre 10 et 40 ° d'une éprouvette 'AE' – Comparaison avec l'expérience – Jeu n°2 ( $f_a=10$  MPa.s)

### 3.4.3 – Comparaison des deux approches viscoélastiques

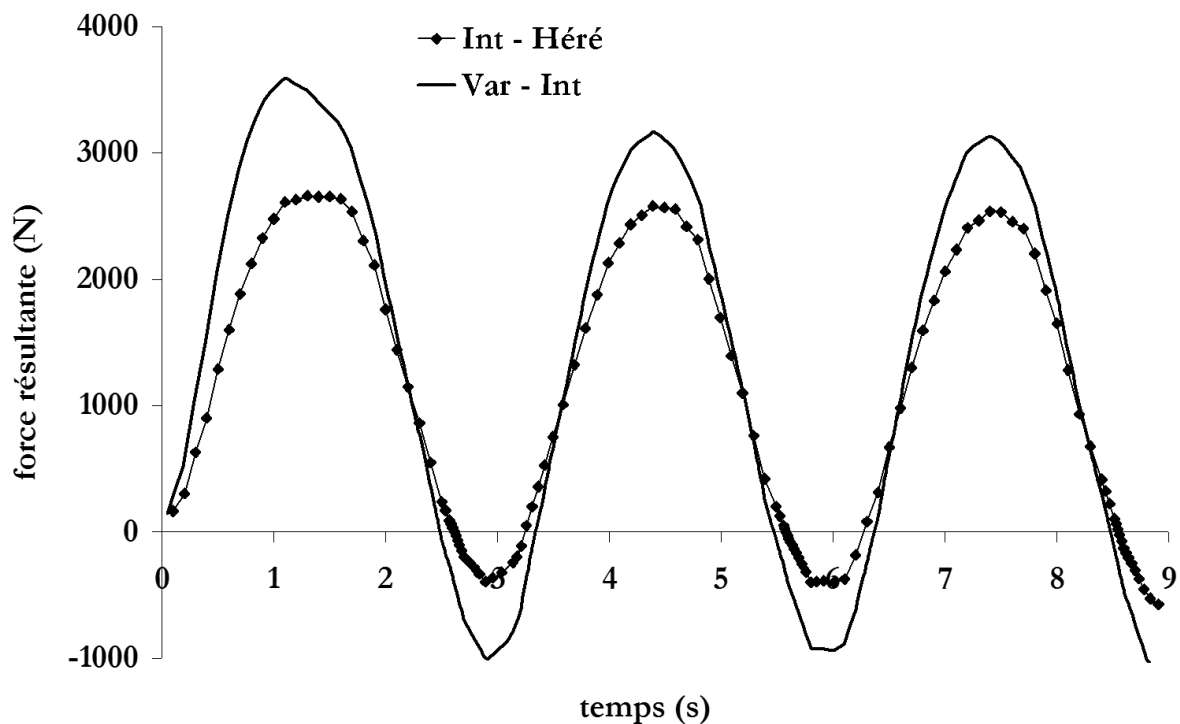
Dans ce paragraphe, les deux modèles de type hyperélastique incompressible, endommageable et faisant intervenir la viscoélasticité soit par une approche fonctionnelle, soit par une approche par variables internes, sont mis en regard. Les résultats numériques obtenus avec les deux approches sont comparés, cette fois, à travers des chargements de traction-compression sur une éprouvette type 'plot'.

Les jeux de coefficients utilisés dans les deux approches sont ceux identifiés dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.3.

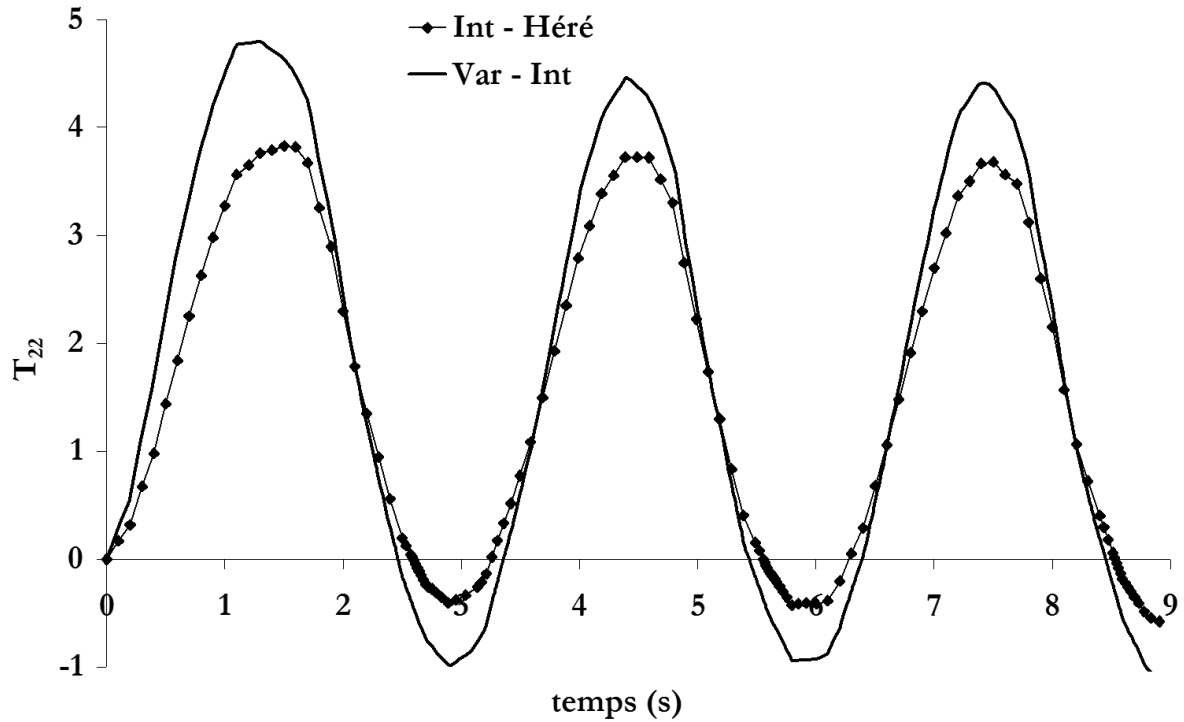
Le calcul qui sert de comparaison est celui d'un plot dont le chargement de traction oscille de façon sinusoïdale entre 0 et 10 mm avec une période de 3 s. Les forces résultantes, ainsi que les contraintes et déformations en fond d'entaille sont comparées.

On constate que la force résultante calculée avec l'approche par variables internes est plus importante – Fig. 3.73\_- . Ceci n'est pas surprenant puisque les contraintes simulées en traction uniaxiale et à ces vitesses sont plus élevées dans le cas de l'approche par variables internes. Localement, sur le nœud du fond d'entaille, on constate que les déformations sont également plus importantes dans le cas de l'approche par variables internes – Fig. 3.74 et 3.75 -. Cette localisation de la déformation plus importante est liée à une redistribution différente des contraintes et des déformations selon la loi utilisée. En effet, les répartitions des contraintes et des déformations sont calculées à chaque itération d'un incrément du calcul grâce aux équations d'équilibre. Les déformations locales varient donc avec la loi de comportement.

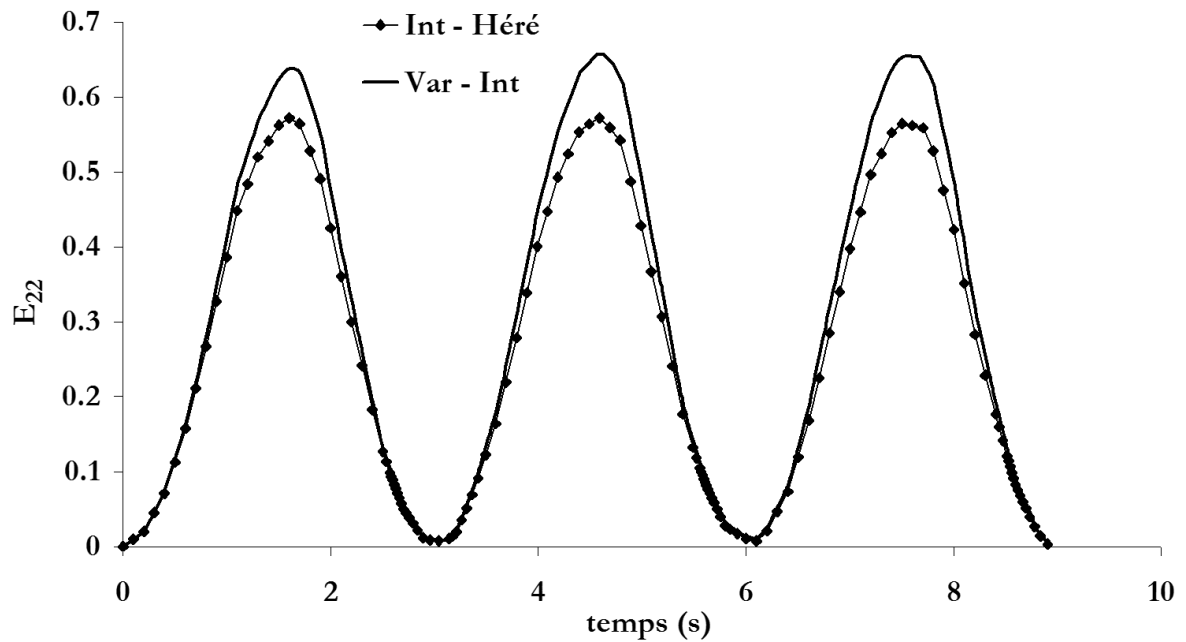
Notons que ce nœud de fond d'entaille subit un chargement quasi-uniaxial (contraintes 11 et 12 très faibles).



**Figure 3.73** – Simulations de l'essai de traction – compression sur 'plot' 0/10 mm – Comparaison de la force résultante sur le plot entre les deux approches viscoélastiques



**Figure 3.74** – Simulations de l'essai de traction –compression sur 'plot' 0/10 mm– Comparaison de la contrainte de Cauchy  $T_{22}$  (axiale) en fond d'entaille entre les deux approches viscoélastiques



**Figure 3.75** – Simulations de l'essai de traction-compression sur 'plot' 0/10 mm – Comparaisons de la déformation de Green Lagrange  $E_{22}$  (axiale) en fond d'entaille entre les deux approches viscoélastiques

## 3.5 – Conclusion

Le caoutchouc styrène butadiène **SBR** de nuance A présente un comportement hyperélastique incompressible, endommageable et viscoélastique.

La modélisation de l'**hyperélasticité** fait intervenir une loi de type Rivlin généralisée.

La modélisation de l'**endommagement** est discontinue. L'endommagement est supposé isotrope et dépendant de la plus grande élongation principale. Il aurait été intéressant de développer un modèle dans lequel l'endommagement serait dépendant du potentiel de déformation [Miehe, 95]. Cette approche pourrait être intéressante pour conserver la non linéarité du comportement. Elle présente cependant l'inconvénient d'attribuer un endommagement plus important à un matériau sollicité en compression qu'en traction (potentiel de dissipation plus important).

Deux types d'approche ont permis de modéliser la composante **viscoélastique**. La première approche est dite **fonctionnelle** : elle utilise une intégrale héréditaire et correspond à un modèle de Maxwell généralisé. Elle a été développée par Bernstein et al [Bernstein, 63]. Elle est intéressante et permet une modélisation correcte mais son écriture est basée sur des équations de viscoélasticité linéaire. Elle n'est donc pas entièrement satisfaisante d'un point de vue purement mécanique. La seconde approche est dite à **variables internes**. Elle correspond à un modèle de Poynting-Thomson. La théorie s'appuie principalement sur les travaux de Germain (méthode de l'état local associé) [Germain, 1986] et sur ceux de Sidoroff [1974, 1975, 1980]. Son écriture est justifiée thermodynamiquement mais le modèle ne fait intervenir qu'une variable interne (un seul amortisseur). Le comportement viscoélastique ne peut donc être modélisé que sur l'intervalle de temps pris en compte par l'amortisseur (3 décades au mieux).

Les deux types de lois intégrale héréditaire et variables internes font intervenir respectivement 10 et 8 paramètres.

Leur **identification** est délicate car toutes les composantes du comportement sont couplées. L'identification n'étant pas satisfaisante lorsque les coefficients sont optimisés simultanément, elle doit suivre un processus itératif.

Les jeux de paramètres ont été validés par la simulation des essais de **traction-compression et torsion sur éprouvettes axisymétriques entaillées**. Il est important de noter que ces essais multiaxiaux sont 5 à 50 fois plus rapides que les essais simples sur lesquelles les lois ont été identifiées. L'approche fonctionnelle fournit de meilleurs résultats que l'approche par variables internes. Ceci provient du fait que le modèle de Poynting Thomson ne fait intervenir qu'un élément viscoélastique. Il serait intéressant de développer un modèle à variables internes avec deux ou plusieurs éléments.

Le SBR a été considéré **incompressible**. Expérimentalement, nous avons vu que la déformation isovolume était importante en traction et due à la cavitation. Elle est par contre très faible sous un état de compression. Nous avons choisi de considérer la matériau numériquement incompressible, afin de bien modéliser son comportement en compression. Il aurait été intéressant de mettre au point un modèle de d'endommagement induisant des variations de volume [Andrieux, 1996]. Cependant, comme nous l'avons montré, les variations de volume qui se produisent dans le SBR A sont réversibles. La variation de volume ne peut donc être directement corrélée à l'endommagement.

Une quatrième composante aurait pu intervenir dans la modélisation du comportement : la composante **élastoplastique**. Nous supposons en effet qu'une partie de la dissipation qui se produit sous chargement cyclique, ainsi qu'une partie de la déformation rémanente observée après ce même type de chargement sont de nature plastique : modification de la microstructure suite à des réarrangement (glissements et rupture de contacts charge/charge et charge/chaîne, modification du réseau secondaire de charges). Nous avons attribué ces effets à la viscoélasticité (temps de relaxation très court et très long). Il aurait toutefois été plus juste d'ajouter cette composante à la modélisation.

Le **polyuréthane cellulaire** présente un comportement hyperélastique compressible et viscoélastique. L'hyperélasticité compressible est modélisée par un modèle de Mooney. La viscoélasticité a été modélisée avec une approche fonctionnelle. Les paramètres des lois ont été identifiés avec les essais de traction et

compression uniaxiales et de compression eudiométrique. Les termes de relaxation des parties déviatoriques et sphériques ont été supposées égales. L'identification pourrait être améliorée si on les supposait différentes. Nous n'avons pas pu valider cette optimisation par des calculs éléments d'essais complexes car nous n'avons pas pu obtenir d'éprouvettes axisymétriques entaillées.

En conclusion, ce chapitre décrit la méthodologie qui a été mise en place pour optimiser une loi de comportement pouvant intégrer les composantes hyperélastiques incompressibles ou compressibles, viscoélastiques et endommageable d'un élastomère

Il amène également plusieurs perspectives de travail :

- Hypothèse incompressible erronée si la cavitation a lieu dans l'élastomère chargé
- Endommagement non isotrope
- Plasticité du comportement : hystérésis et déformation permanente
- Relaxation des composantes déviatoriques et sphériques différentes dans un matériau compressible
- Modèle viscoélastique à variable interne avec deux ou plusieurs éléments viscoélastiques

# Bibliographie

**Abaqus** - *Finite Strain Viscoelasticity* - Theory Manual Version 5.8,

**Ambacher**, Strauss, Kilian, Ulm, Wolff - *Reinforcement in Filler-Load Rubber* – Kautschuck + Gummi - Kunststoffe 44, Jarhgang, Nr. 12/ **1991**

**Andrieux** - *Sur les milieux visco-hyperélastiques endommageables* - Thèse Université Technologique de Compiègne, **1996**

**Arruda**, Boyce - *A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic material* - Journal Mechanics and. Physics of Solids, vol.41, n°2, pp. 389-412, **1993**

**Boukamel** - *Actes du troisième colloque national en Calcul des Structures* - Giens Presses Académiques de l'Ouest, Giens, 20-23 mai **1997**

**Burr** - Exercice long du DEA Mécanique et Matériaux - **1999**

**Bernstein**, Kearsley, Zapas - *A study of Stress Relaxation with Finite Strain* - Transaction of the society of rheology, VII, 391-410, 1963

**Besson**, Foerch - Large scale object-oriented finite element code design - *Computer methods in applied mechanics and engineering* 142, 165-187, **1997**

**Bueche** - *Mullins effect and rubber-filler interactions* - Journal of applied polymer science, vol.15, pp.271-281, **1961**

**Carpentier-Gabrieli** - *Etude numérique du comportement thermomécanique des élastomères sous sollicitations harmoniques* - Thèse Université d'Aix-Marseille II, **1995**

**Davet** - *Sur les densités d'énergie en élasticité non linéaire: confrontation de modèles et de travaux expérimentaux* - Annales des Ponts et Chaussées - 3<sup>ème</sup> trim. **1985**

**Diani** - Contribution à l'étude du comportement élastique et de l'endommagement des matériaux élastomères - *Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan*, 9/7/ **1999**

**Eterovic** et Bathe - *A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combines isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures* - International Journal for numerical Methods in engineering, vol.30, pp.1099-1114, **1990**

**Germain** - *Cours Mécanique* - Ellipses, **1986**

**Govindjee**; J.Simo - *A micro-mechanically bases continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins'effect* - J.Mech. Phys. Solids. Vol.39. No. 1 pp. 87-112, **1991**

**Govindjee**, J.Simo - *Carbon black filled rubbers incorporating Mullins'effect* - Journal Mech. Phys. Solids, vol.40, n°1, pp. 213-233, **1992**

**Green**, Tobolsky - *A new approach to the theory of relaxing polymeric media* - J. Chem. Phys. 14(2), 80, **1946**

**Hart-Smith** - Z.Angew.Math.Phys., vol.17, p.608, **1966**

**Hassani** - *Validation et formulation variationnelle d'une loi de comportement viscoélastique non linéaire en grandes déformations* - Thèse ENPC - 31/10/**1997**

**Heuillet**, Dugautier - *Modélisation du comportement élastique non linéaire des caoutchoucs et élastomères thermoplastiques* - Journée Technique du CFCP 13/9/**1995**

**Hill** - proc. R. Soc (Lond.) A326, 131, **1972**

**Holzapfel**, Stadler, Ogden - Aspects of stress softening in filled rubbers incorporating residual strains – Constitutive Models for Rubbers, Dorfmann & Muhr, Balkema, Rotterdam, **1999**

**Ihlemann** – *Modelling inelastic rubber behavior under large deformations based on self-organizing linkage patterns* - Constitutive Models for Rubbers, Dorfmann & Muhr, Balkema, Rotterdam, **1999**

**Johnson**, Quickley, Mead - *Large strain viscoelastic constitutive models for rubber, part.1: Formulations* - Rubber Chemistry and Technology nov-dec 94, vol 67, n.5, **1994**

**Johnson**, Quickley, Mead - *Large strain viscoelastic constitutive models for rubber part 2 : Determination of materials constant* - Rubber Chemistry and Technology may-june 95, vol 67, n.2, **1995**

**Kachanov** - Introduction to Continuous Damaga Mechanics - Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands, **1986**

**Kalliske**, Rothert - **Constitutive Approach to rate-independant properties of filled elastomers** - International Journal of Solids and structures, vol.35, p.2057-2071, **1998**

**Kalliske**, Rothert - Viscoleastic and elastoplastic damage formulations - Constitutive Models for Rubbers, Dorfmann & Muhr, Balkema, Rotterdam, **1999**

**Killian**, Strauss, Hamm - *Universal properties in filler-loaded rubbers* - Rubber Chemistry and Technology, vol 67(1), 1-16, **1994**

**Kraus** - *Reinforcement of elastomers by carbon black* - Rubber Chemistry and Technology, vol 51, n.2, pp 297-321, **1978**

**Laraba** - *Etude des comportements hyperélastique et viscohyperélastique de deux élastomères par extensométrie optique bidimensionnelle* - Thèse Ecole Centrale Paris, **1998**

**Lemaitre**, Chaboche - Mécanique des Matériaux Solides - *Dunod*, **1985**

**Miehe** - *Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type-large-strain elastic materials* - European Journal of Mechanics vol.14 n°5 **1995**

**Miehe** et Keck - *Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation* - Journal of Mechanics and Physics if solids, 48 pp. 323-365, **2000**

**Mullins** - *Softening of rubber by deformation* - Rubber Chemistry and Technology, vol 42, **1969**

**O'Dowd**, Knauss - *Time dependant large principal deformation of polymers* - J.Mech. Phys. Solids. Vol.43. No. 5 pp. 771-792, **1995**

**Ogden** - *Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for incompressible rubber-like solids* - Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, vol.326, pp565-584, **1972**

**Palgen** - *Physique du comportement des élastomères* - cours ENSMP, **1989**

**Piques, Dufresne** - *Comportement viscoélastique* - Cours DEA Mécanique et Matériaux, 1997

**Schapery** - *On the characterization of non linear viscoelastic Materials* - Polymer Engineering and Science, July, Vol.9, n°4, 1969

**Septanika, Ernst** - *Application of the network alteration theory for modelling the time dependant constitutive behavior of rubbers - Part.I Genral Theory* - Mechanics of materials 30, 253-263, **1998**

**Septanika, Ernst** - *Application of the network alteration theory for modelling the time dependant constitutive behavior of rubbers Part.II Further evaluation of the general theory and experimental verification* - Mechanics of materials 30, 265-273, **1998**

**Sidoroff** - *Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire* - Journal de Mécanique, vol.13 - n°4, **1974**

**Sidoroff** - *Variables internes en viscoélasticité - I : Variables internes scalaires et tensorielles* - Journal de Mécanique, vol.14 - n°3, **1975a**

**Sidoroff** - *Variables internes en viscoélasticité II. Milieux avec configuration intermédiaire* - Journal de Mécanique, vol.14 - n°4, déc.**1975b**

**Sidoroff** - *Description des comportements rhéologiques par variables internes* - Cahier du Groupe français de Rhéologie - Colloque 1977, n° spécial janv. 1980 – Colloque de **1977**

**Sidoroff** - *Description des comportements rhéologiques par variables internes* - Cahier du Groupe français de Rhéologie - Colloque 1977, n° spécial janv. **1980**

**Sidoroff** - *Les grandes déformations* - rapport Gréco n° 51/**1982**

**Soulimani** - *Une méthode énergétique de modélisation de la viscoélasticité non linéaire en grandes transformation* - Thèse de l'Ecole Nationale ds Ponts et Chaussées - 25/5/**1993**

**Simo** - *On a fully three-dimensionnal finite-strain viscoelastic damage model : formulation and computational aspects* - Computer methods in applied lechanics and engineering 60 pp.153-173, North holland, **1987**

**Tanner** - *From A to (BK)Z in Constitutive Relations* - Journal of Rheology, 32(7), 673-702, **1988**

**Yeoh** - *Some forms of the strains energy fonction for rubber* - Rubber Chemistry and Technology nov-dec 93, vol 66, n.5, **1993**

**Verdu** - *Elasticité caoutchoutique* - Cours DEA Mécanique et Matériaux, 1997

**Wolff** - *Chemical aspects of rubber reinforcement by filler* - Rubber Chemistry and Technology, vol 69 n.3, pp325-346, **1996**

**Zset**, ZéBuLoN version 8.01 - Transvalor/ENSMP, Centre des matériaux, BP.87, 91003 EVRY cedex, Northwest Numerics, Inc., 1219 Westlake Ave. N#210, seattle, WA 98115 '<http://www.nwnumerics.com>' / **1999**





---

# Chapitre 4

## Comportement en endurance du SBR chargé de silice

---

*Ce chapitre reprend l'ensemble des résultats obtenus en fatigue sur le SBR de nuance A.*

*Le premier paragraphe expose les procédures expérimentales, les conditions de chargement et les résultats bruts obtenus. Les essais ont été menés sur des éprouvettes axisymétriques entaillées. Deux paramètres varient lors de ces essais : le chargement maximal et l'amplitude de chargement. Quelques tendances quant aux paramètres mécaniques déterminant l'amorçage d'une fissure sur le matériau sollicité en fatigue sont esquissées.*

*Le second paragraphe illustre les mécanismes d'endommagement mis en évidence. Les observations des faciès de rupture permettent également d'expliquer la dispersion importante du nombre de cycles à l'amorçage.*

*Le troisième paragraphe fait appel au calcul par éléments finis pour connaître à partir du chargement global les variables locales de contrainte et de déformation en fond d'entaille. Plusieurs calculs nous conduisent à mettre au point des corrélations entre les variables globales et les variables locales. Ceci permet de ne pas programmer un calcul par condition de chargement.*

*Le quatrième paragraphe présente la synthèse des résultats. Elle réunit l'ensemble des essais sur des diagrammes qui font intervenir des paramètres pertinents pour décrire l'endommagement du matériau en fatigue. Couplées aux observations, ces analyses mettent en évidence deux paramètres critiques quant à l'endommagement du matériau en fatigue.*

*Une conclusion clôt le chapitre.*

## 4.1 - Conditions d'essais - Résultats

La campagne d'essais a pour ambition de déterminer les paramètres mécaniques critiques d'endommagement en fatigue du matériau SBRA. Elle doit donc permettre de solliciter le matériau dans un domaine vaste de contraintes et de déformations. Ce paragraphe détaille la mise en œuvre de ces essais, leurs conditions et les résultats bruts obtenus.

Rappelons que seul le SBR a été testé sous chargement de fatigue. Les résultats relatifs au SBR A sont présentés dans ce mémoire. Les essais menés sur les deux autres nuances B et C sont présentés dans l'annexe 4A. De plus, les éprouvettes axisymétriques de PU cellulaire n'ont pu être mises en œuvre pour ce travail. Ce matériau n'a donc pas été testé en fatigue.

### 4.1.1 – Mise en oeuvre des essais

Afin d'explorer un domaine de contraintes et de déformations large mais également d'augmenter le rapport entre le volume et la surface (pour diminuer l'influence des défauts de surface), nous avons décidé de tester des éprouvettes axisymétriques entaillées en traction-compression et en torsion.

D'autre part, l'objectif industriel étant de prévoir le nombre de cycles à l'apparition d'une fissure, nous nous intéressons uniquement à l'amorçage de la fissure et non à sa propagation.

### Les machines d'essais – Les éprouvettes

Deux types d'éprouvettes sont utilisées : les éprouvettes axisymétriques faiblement entaillées appelées 'plot' – rayon d'entaille de l'ordre de 40 mm -, et les éprouvettes axisymétriques fortement entaillées appelées 'AE' – rayon d'entaille de l'ordre de 2 mm -. Les éprouvettes 'plots' sont testées en traction-compression sur une machine électromécanique de fatigue à grand débattement. Elle fonctionne par un système bielle-manivelle. Les éprouvettes 'AE' sont testées en torsion sur une machine de torsion. Dans les deux cas, un système numérique permet de contrôler le pilotage et l'acquisition. La description plus complète des éprouvettes et des machines se trouve dans le § 2.1.

Rappelons que le moule des éprouvettes axisymétriques 'plot', préexistant à l'étude, était gravé de sigles et d'écritures qui constituent, en plus des joints du moule, des défauts de surface – § 2.1, Fig. 2.11 - . De plus, le point d'injection se situe dans la zone utile. Ceci ajoute un défaut de surface important et peut accentuer la non homogénéité des propriétés du matériau (répartition des charges, orientation des chaînes) dans cette zone. Le moule des éprouvettes 'AE' a par contre été fabriqué sur notre demande. Le point d'injection est situé sur les bords de l'éprouvette et le moule n'a pas été gravé. Seuls les joints constituent des défauts de surface.

### La détection de l'amorçage d'une fissure

Comme nous l'avons déjà souligné, cette étude concerne l'amorçage et non la propagation de la fissure dans l'éprouvette. Ceci découle de l'objectif scientifique : prévoir la durée de vie d'un composant à l'amorçage d'une fissure. La détection de l'amorçage est choisie conventionnellement lors de l'apparition d'une fissure de 1mm. Elle est détectée à la loupe binoculaire ou à l'œil nu.

L'observation de l'endommagement lors d'essai de traction in-situ - § 2.4.3.2 - nous amène à penser que l'amorçage de cavités est quasi-immédiat. Cependant, la création de cavités isolées ne conduit à aucun endommagement global du matériau et ne remet pas en question son utilisation. La coalescence de ces cavités est par contre critique puisqu'elle conduit à la propagation d'une fissure. Le stade critique d'endommagement de la pièce de caoutchouc est donc représenté dans cette étude par l'apparition d'une fissure de 1 mm.

De plus, la norme suivie pour mesurer la résistance à la fatigue des semelles de chaussures au Centre Technique du Cuir consiste à relever le nombre de cycles lorsqu'une fissure de 1 mm est détectée. Ceci constitue un argument supplémentaire pour justifier notre choix.

Cette détection engendre une dispersion supplémentaire sur la valeur du nombre de cycles à l'amorçage due à la subjectivité et aux aléas propres à toute détection faite par un observateur.

## Conditions d'essais

Les essais sont menés à température ambiante. La température des salles est comprise entre 20 et 25°C tout au long de l'année.

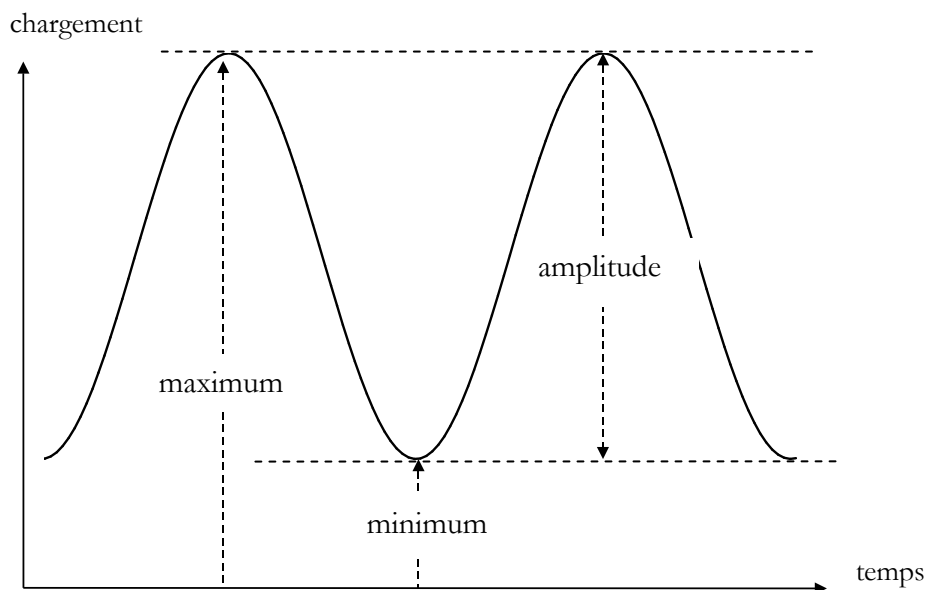
Les essais sont pilotés en déplacement (ou angle) car l'essai industriel Bennewart est contrôlé en déplacement. Le signal de pilotage est tel que la réponse soit quasi-sinusoïdale. On en définit l'amplitude, la valeur moyenne et la fréquence.

La norme utilisée pour effectuer les essais de flexion sur semelles sur la machine d'essais Bennewart impose une fréquence de 150 cycles/min, c'est-à-dire une période de 0.4 s. Etant données les possibilités de vitesses de chargement qui peuvent être imposées sur les machines d'essais de traction-compression et torsion, nous choisissons d'imposer une période de cycle de l'ordre de 3 s. De plus, ce choix présente un compromis entre un auto-échauffement réduit (il dépend de l'amplitude de la sollicitation) et une durée d'essai limitée. La température interne peut toutefois atteindre 60 °C au cœur de l'éprouvette. Ces réflexions sont étayées dans l'annexe 4B.

Diverses amplitudes et niveaux moyens de sollicitation sont balayés, afin d'explorer un domaine de sollicitation vaste et de détecter l'influence éventuelle de l'amplitude de la sollicitation sur le comportement en fatigue.

## Terminologie

La Fig. 4.1 illustre les chargements minimal, maximal et leur amplitude.



**Figure 4.1** – Terminologie utilisée dans cette partie

Le rapport de contraintes R est :

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

Si  $R = -1$ , l'essai est dit en contraintes alternées

Si  $R \leq 0$ , l'essai est dit en contraintes répétées asymétriques

Si  $R > 0$ , l'essai est en contraintes ondulées.

### 4.1.2 – Les résultats

Ce paragraphe présente l'ensemble de résultats (tableaux, courbes) obtenus.

#### Résultats de traction-compression obtenus sur les éprouvettes 'plots'

Rappel des conditions d'essais :

matériau : SBR A  
éprouvettes : 'plots'  
période : 3 s  
solicitation : déplacement sinusoïdal  
environnement : ambiant  
critère d'amorçage : fissure de 1 mm détectable à l'œil nu

Le tableau de la Fig. 4.2 résume l'ensemble des essais effectués sur les éprouvettes 'plots' en traction-compression. Il rappelle les numéros des éprouvettes, leur lot d'origine, les déplacements minimal  $U_{\min}$  et maximal  $U_{\max}$  imposés, les remarques sur l'amorçage. La dernière colonne 'extrapolé' le nombre de cycles à l'amorçage  $N_i$  à partir des observations. En effet, il arrive que l'éprouvette amorce en l'absence de l'observateur. Une incertitude existe donc sur la détermination du nombre de cycles à l'amorçage. Un nombre  $N_i$  est estimé à partir des données dont nous disposons (intervalle de temps entre les observations, évolution et propagation de la fissure ou amorçage d'autres fissures).

Notons d'autre part que sur sept lots commandés, seuls deux ont pu être utilisés (lots 1 et 3). Les éprouvettes des autres lots ont présenté différents défauts : porosités, trous d'injection arrachés (l'éprouvette est alors 'trouée' sur plusieurs millimètres de profondeur). Dans deux des cinq lots inutilisables, les éprouvettes ne présentaient pas de défauts apparents, mais leur comportement mécanique était différent (moins raide) et amorçaient en quelques milliers de cycles quel que soit le chargement. Nous supposons que le mélange initial était trop vieux.

La localisation de l'amorçage est également précisée dans le tableau : on le repère par rapport à la zone utile ZU (zone de diamètre le plus faible), aux joints, au point d'injection, aux défauts de surface (rond d'écriture, ...).

ep	n° lot	$U_{\min}$ (mm)	$U_{\max}$ (mm)	Observations	$N_i$ extrapolé (cycles)
AP4	1	0	15	N=8 000 fissure 2 mm hors des joints dans ZU	7 000
AP5	1	5	21	N= 6 700 fissure 2 mm dans ZU	6 000
AP6	1	-2	13	N=500 deux fissures de 1 mm hors des joints dans ZU	500
AP7	1	-2	13	N=7 800 fissures 1 mm sur joint dans ZU et hors-joint hors ZU	7 800
AP8	1	-4.5	10	N=155 000 fissure 2 mm sur rond d'écriture	140 000
AP9	1	-2.5	13	N=28 000 fissure 1 mm sur bas du point d'injection	28 000
AP10	1	5	20	N=18 000 fissure 1 mm sur rond d'écriture	18 000
AP11	1	5	20	N=4 700 fissure 3 mm au dessus du pt d'injection	4 000
AP12	1	5	20	N=7 700 RAS - N=25 000 fissure sur la moitié du plot	15 000
AP21	3	5	21	arrêté à N=10 000 - Rupture sous azote liquide	?
AP22	3	5	21	N=9 600 : RAS - N=27 600 : fissure 20mm	20 000
AP23	3	0	10	N=290 000 : RAS - essai arrêté	infini
AP24	3	-5	5	N=100 000 : RAS - essai arrêté	infini
AP25	3	-5	15	N=6 000 : RAS - N=11 200 : fissure 5 mm sur écriture	8 000
AP26	3	-5	15	N= 4 500 : RAS - N=6 500 : fissure 2 mm sur écriture	6 000
AP27	3	-5	10	N=60 000 RAS - N=72 000 fissure autour du pt d'injection	65 000
AP28	3	0	20	N=4 800 3 fissures de 1 mm sur écritures	4 800
AP29	3	-10	15	N=6 000 fissure 1 mm sur sigle	6 000
AP30	3	0	24	N=1 200 fissures à plusieurs endroits	1 200
AP31	3	5	15	N=130 000 fissure 1 mm au dessus du point d'injection	130 000
AP32	3	10	15	N>260 000	infini

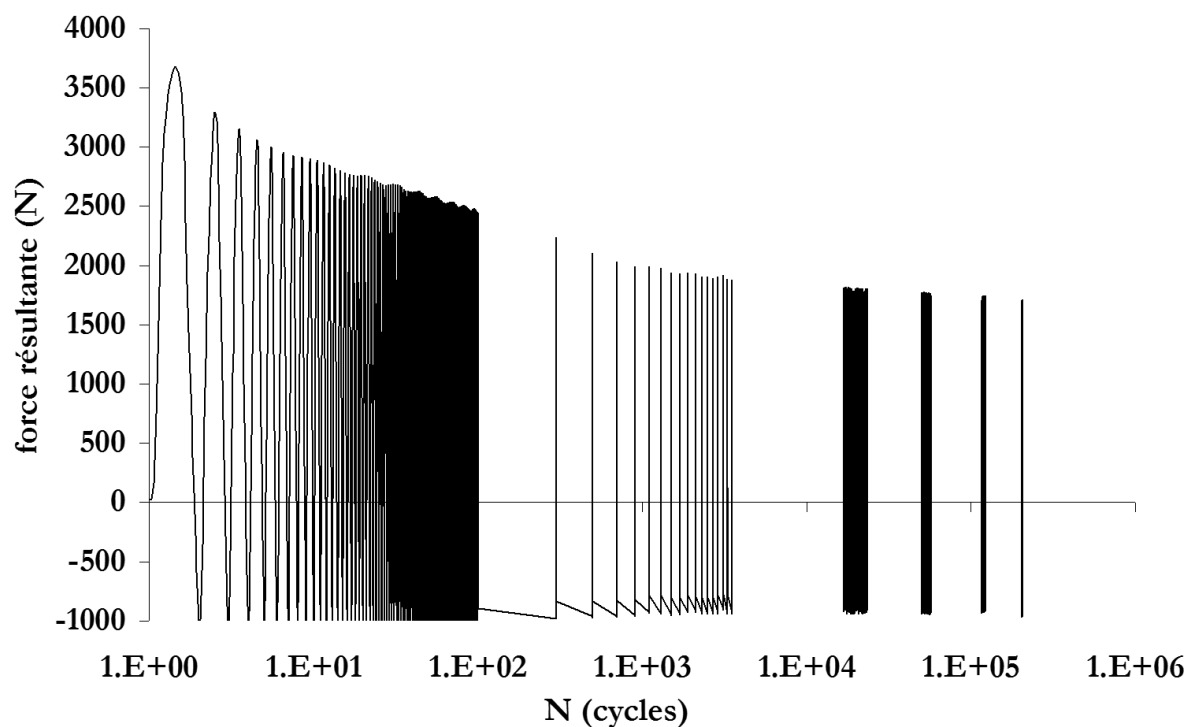
**Figure 4.2** – Tableau récapitulatif des essais de traction-compression menés sur les éprouvettes 'plots'

On constate d'après cette présentation simple des résultats que le nombre de cycles à l'amorçage semble dépendre à la fois du déplacement maximal et de l'amplitude de déplacement.

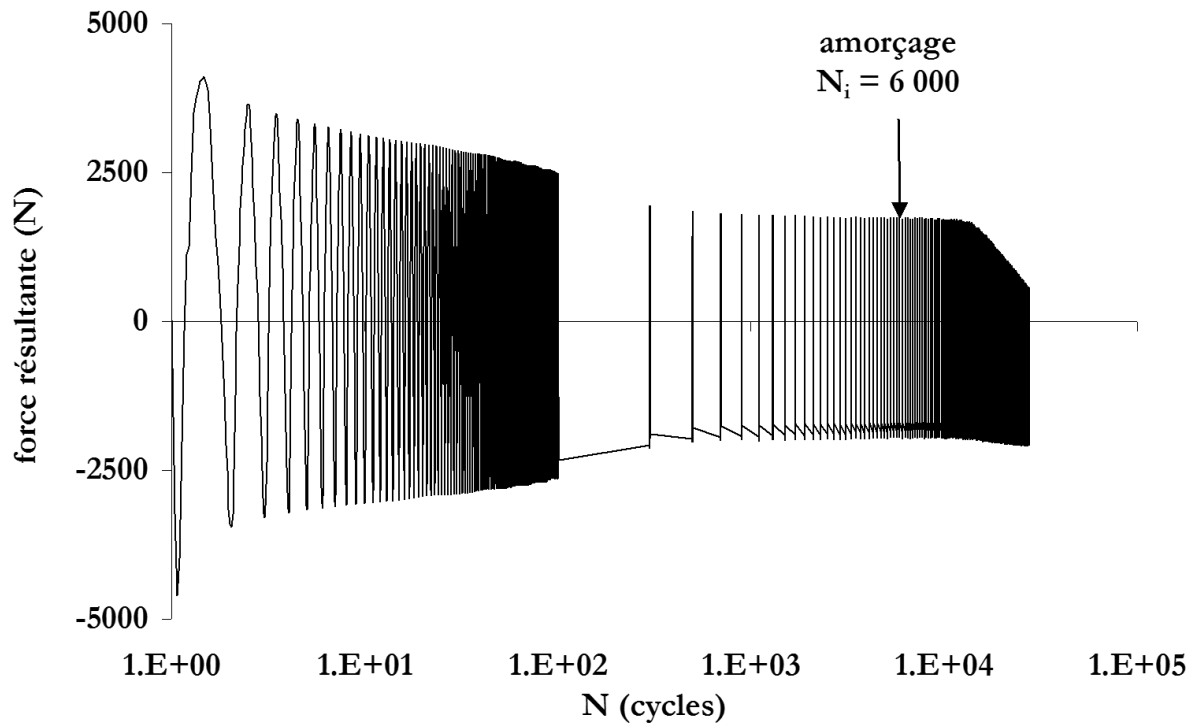
essai AP23	0/10 mm	$N_i > 300\,000$	}	<i>déplacement maximal</i>
essai AP4	0/15 mm	$N_i = 7\,000$		
essai AP4	0/15 mm	$N_i = 7\,000$	}	<i>amplitude de déplacement</i>
essai AP31	5/15 mm	$N_i = 130\,000$		

Une dispersion importante est cependant observée (essais AP6 et AP7, ou AP10 et AP11 dans le tableau).

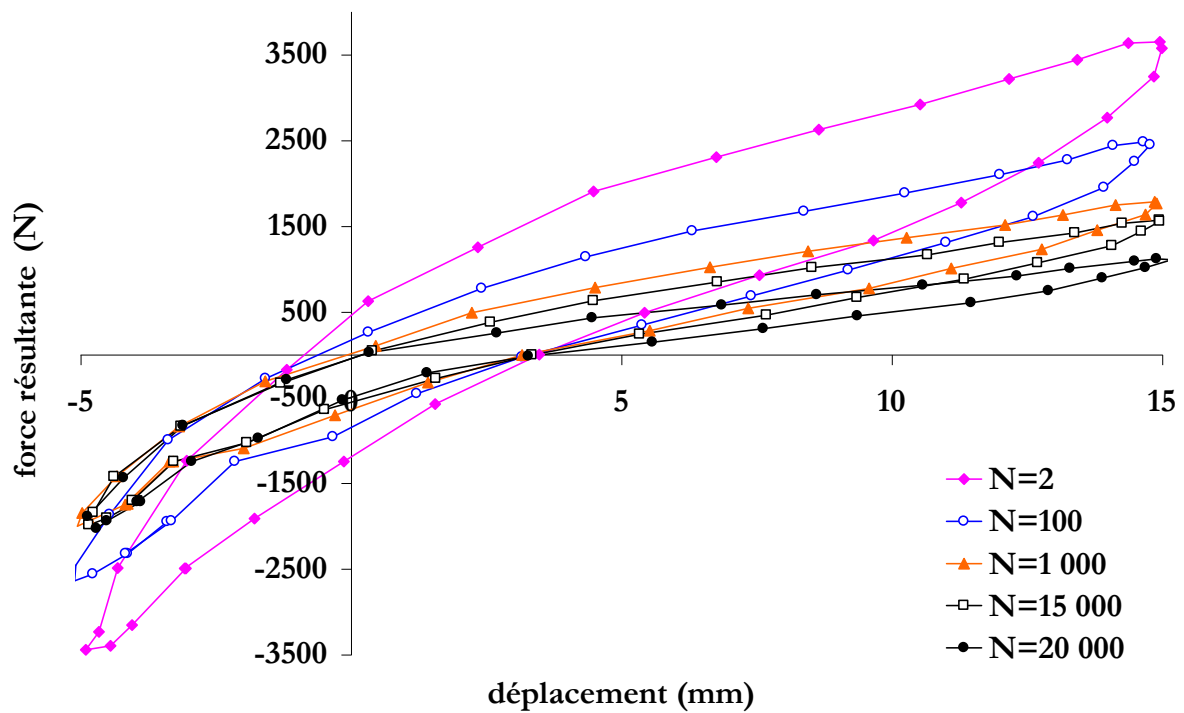
La force résultante globale mesurée évolue au cours du temps. Deux essais sont présentés sur les Fig. 4.3 et 4.4. Leurs déplacements minimal et maximal sont 0/10 mm (essai AP23) et -5/15 mm (essai AP26). Dans ces deux cas comme dans la plupart des essais, la force résultante chute d'environ 40% au cours des 100 premiers cycles. Elle se stabilise à moins de la moitié de sa valeur maximale après un nombre de cycles variables (entre  $10^2$  et  $10^4$ ). Cet adoucissement du matériau est dû à l'effet Mullins sur les premiers cycles et à la viscoélasticité du matériau, mais peut également être lié à l'échauffement du matériau. Nous n'avons pas testé la variation du comportement du SBR chargé en silice avec la température. Il est toutefois probable que sa raideur diminue, ou tout au moins que son adoucissement augmente avec la température [Beatty, 1964]. On note également que l'amorçage n'est pas associé à une chute de force globale. Les cycles 'force résultante/déplacement imposé' sont tracés dans le cas de l'essai -5/15 mm (essai AP26) – Fig. 4.5 -. On constate que l'aire du cycle d'hystérésis diminue au cours de l'essai, ainsi que les valeurs de force résultante en traction et en compression. A  $N=20\,000$  cycles, seul un ligament de caoutchouc subsiste.



**Figure 4.3** – Essai AP23 0/10mm – Evolution de la force résultante avec le nombre de cycles –  $N_i > 2.10^5$



**Figure 4.4** – Essai AP26 -5/15mm – Evolution de la force résultante avec le nombre de cycles –  $N_i=6\,000$



**Figure 4.5** – Essai AP26 -5/15mm – Cycles représentatifs du comportement viscoélastique à  $N=2$ , 100, 1 000, 15 000 et 20 000 -  $N_i=6\,000$

On note une dispersion importante dans les résultats. Une partie de cette dispersion est inhérente aux essais de fatigue : taille des défauts dans le volume sollicité, probabilité de trouver un défaut près de la surface, ... Dans le cas présent, les observations résumées dans le paragraphe 4.2 révèlent une origine possible à cette dispersion : l'amorçage interne.

## Résultats de torsion obtenus sur les éprouvettes 'AE'

Rappel des conditions d'essais :

matériau : SBR A

éprouvettes : 'AE'

période : 2.2 s ( $\Delta\alpha=10^\circ$ ) à 4.5 s ( $\Delta\alpha=70^\circ$ )

sollicitation : déplacement quasi-sinusoidal

environnement : ambiant

critère d'amorçage : fissure de 1 mm détectable à l'œil nu

Le tableau de la Fig. 4.6 résume les essais effectués. Comme précédemment, les numéros des éprouvettes et des lots correspondants y figurent. Les observations et les nombres de cycles à l'amorçage déduits sont accolés.

Notons que les fissures amorcent toujours sur le même joint. En effet, l'un des joint est plus marqué : les deux 'demi-éprouvettes' n'arrivent pas parfaitement face à face. Il semble que le moule ait été mal positionné lors de la mise en forme des éprouvettes ou qu'il ait été mal conçu. Il est ainsi courant que les fissures s'amorcent sur ce joint 'protubérant' : ceci est décrit dans le tableau par 'fissure de la peau du joint'. Il est délicat de situer correctement l'instant où la fissure a traversé cette 'protubérance' et pénétre réellement dans l'éprouvette. La présence de ce défaut engendre d'une part l'anticipation du nombre de cycles à l'amorçage, et d'autre part une dispersion importante (essais AE21 et AE32 ou AE16 et AE25).

De plus, près de ce joint, quelques éprouvettes présentent une surface 'fripée'. Ces propos seront illustrés par des clichés pris au microscope électronique à balayage dans le paragraphe 4.2. Ces irrégularités de surface peuvent également favoriser l'amorçage.

Comme dans le cas des plots, on constate sur ces résultats que deux paramètres semblent avoir une influence sur le nombre de cycles à l'amorçage : l'angle de rotation maximal et l'amplitude de l'angle de rotation.

essai AE23	0/30 °	$N_i = 160\,000$	}	<i>rotation maximale</i>
essai AE19	0/50 °	$N_i = 9\,000$		
essai AE19	0/50 °	$N_i = 9\,000$	}	<i>amplitude de rotation</i>
essai AP32	40/50 °	$N_i > 180\,000$		

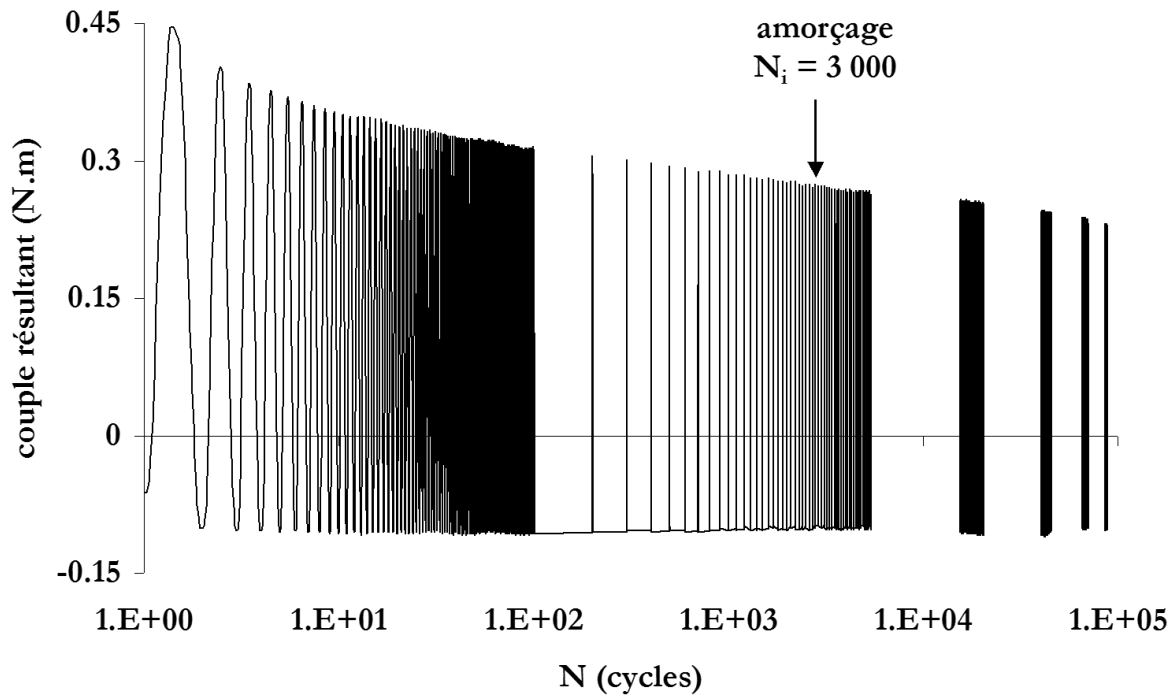


Ep	n° lot	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	Observations	Ni extrapolé
		(°)	(°)		(cycles)
AE2	1	0	70	N=650 fissure 1 mm hors joint	650
AE3	1	0	70	N=2 000 fissure 2 mm sur joint 1	1 500
AE5	1	0	30	N=144 000 fissure 1mm sur joint 1	145 000
AE6	1	0	40	N=3 530 fissure 0.5 mm sur joint 1	5 000
				N=25 000 fissure demi circonférentielle	
AE7	1	0	40	N=30 000 fissure 2 et 4 mm hors joint	15 000
AE8	1	0	40	N=9 000 fissure 1mm sur joint 1	9 000
AE9	1	0	40	N=9 000 fissure 2.5 mm ds la zone fripée et 0.5 mm sur joint 1	11 000
				N=13 000 fissure 1 mm joint 1	
AE10	1	0	20	RAS à N=700 000	infini
AE11	2	10	40	N=4 800 RAS - N=23 000 fissures > 1mm sur joint 1	20 000
AE12	2	10	30	RAS à N=123 000	infini
AE13	2	-30	30	N=6 300 RAS - N=45 000 fissures 1mm sur les 2 joints	30 000
AE14	2	-35	35	N=6 400 RAS - N=22 000 fissure 1 mm peu nette N=60 000 2 fissures de 2 mm	40 000
AE15	2	0	35	N=62 000 RAS - N=80 000 fissure 1 mm sur joint 1	80 000
AE16	2	0	60	N=50 000 RAS - N=110 000 fissure 3 mm sur joint 1	70 000
AE17	2	0	70	N=2 000 2 fissures de 1 et 1.5 mm sur joint 1	1 500
AE18	2	30	70	Ni=2 000 fissure 1 mm sur joint 1	2 000
AE19	2	0	50	N=8 000 fissure 0.5 mm sur joint 1 - N=21 000 fissure 3 mm	9 000
AE20	2	30	50	N=7 300 fissure de peau du joint - N=32 500 fissure joint > 1 mm	25 000
AE21	2	30	60	N=1 000 RAS - N=6 000 fissure 2 mm sur joint 1	5 000
AE22	2	20	40	N=100 000 fissure 1 mm sur joint 1	100 000
AE23	2	0	30	N=160 000 fissure 1 mm sur joint 1	160 000
AE24	2	20	30	RAS à N=450 000	infini
AE25	2	0	60	N=3 400 fissure 1.5 mm sur joint 1 et 0.5 mm sur joint 2	3 000
AE26	2	50	60	N=240 000 RAS	infini
AE27	2	40	60	N=230 000 RAS	infini
AE28	2	20	60	N=7 000 RAS - N=20 000 fissure 1 mm sur joint 1	20 000
AE29	2	20	50	N=2 000 joint 1 fissure de peau du joint commence à pénétrer l'ep. N=3 800 fissure 1.5 mm	3 000
AE30	2	40	50	N=176 000 RAS	infini
AE31	2	20	50	N=4 500 joint 1 fissure 1 mm	4 500
AE32	2	30	60	N=147 000 fissure 2 mm sur joint 1	120 000
AE34	2	0	50	N=3000 fissure 1 mm sur joint	3 000
AE35	2	-20	40	N=19 000 fissure 1.5 mm joint 1 - N=27 000 fissure joint 3 à 4 mm	15 000
AE36	2	10	50	N=8 000 fissure de peau du joint 1 - N=18 000 fissure 1.5 mm joint	15 000
AE37	2	30	40	N=413 000 RAS	infini
AE38	2	20	60	N=1 500 fissure 1 mm sur joint 1	1 500
AE39	2	10	60	N=8 000 fissure 1 mm joint 1	8 000
AE40	2	-30	40	N=5 400 fissure <=1mm joint 1 - N=17 500 fissure 2 mm	6 000
AE41	2	-10	40	8 500<Ni<22 000	15 000
AE42	2	-20	30	N=50 000 fissure 1mm sur joint 1	50 000
AE43	2	-20	35	N=29 000 fissure 1mm sur joint 1	29 000
AE44	2	-10	30	N=7 800 RAS - N=28 000 fissure joint 1 >1 mm	20 000
AE45	2	10	50	N=8 500 RAS - N=23 000 2 fissures >1 mm joint 1	18 000
AE46	2	60	70	N=480 000 RAS	infini

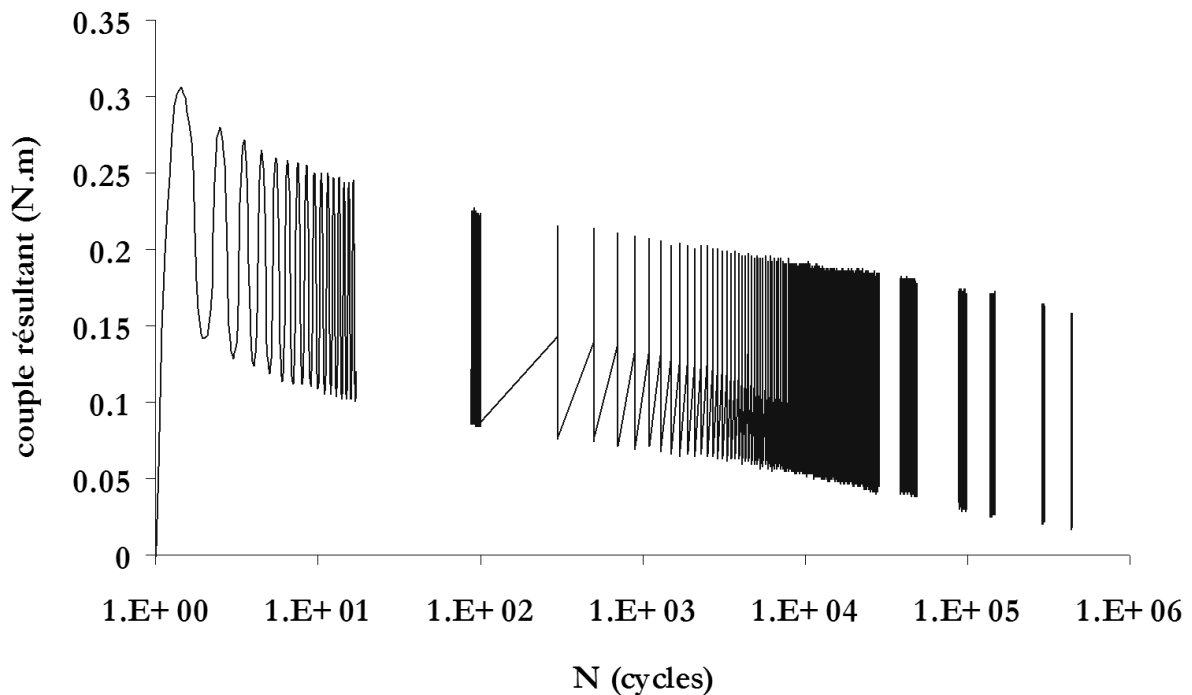
**Figure 4.6** – Tableau récapitulatif des essais de torsion menés sur les éprouvettes ‘AE’

Le couple résultant est mesuré au cours du temps. Deux exemples d'essais de conditions limites 0/50° et 20/30° sont présentés sur les Fig. 4.7 et 4.8. Le couple chute d'environ 30% au cours des 100 premiers cycles. Dans le cas de l'essai 0/50°, comme dans le cas de l'ensemble des essais effectués en contraintes répétées (rapport de charge <0), le couple se stabilise à moins de la moitié de sa valeur maximale, après un nombre de cycles variable (entre 10<sup>2</sup> et 10<sup>4</sup>). Dans le cas de l'essai 20/30°, comme dans le cas général des essais en contraintes ondulées (R>0), le couple ne se stabilise pas. Ceci est dû à la composante visqueuse

du comportement, et plus précisément à la forte relaxation des contraintes. D'autre part, dans tous les cas où une fissure s'amorce, la contrainte chute moins rapidement que dans le cas des essais en traction-compression car la fissure se propage à une vitesse plus faible du fait du gradient de déformation important dans le cas de l'essai de torsion.



**Figure 4.7** – Essai AE34  $-0/50^\circ$  – Evolution du couple résultant avec le nombre de cycles –  $N_i=3\,000$



**Figure 4.8** – Essai AE24  $-20/30^\circ$  – Evolution du couple résultant avec le nombre de cycles – Aucun amorçage observé

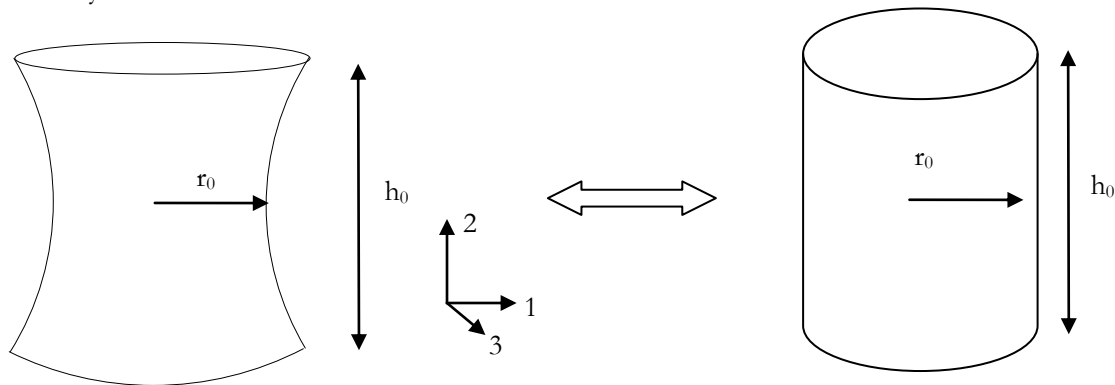
### 4.1.3 – Les tendances

Les résultats présentés dans le paragraphe précédent esquissent des tendances quant aux paramètres mécaniques influant sur l'amorçage d'une fissure en fatigue : il semble que cet amorçage dépende à la fois de la déformation maximale imposée, mais aussi de l'amplitude de déformation. Ces tendances vont être vérifiées dans les paragraphes suivants.

### Calculs des déformations et des contraintes normées

Les valeurs mesurées lors des essais sont les valeurs globales mesurées par les capteurs. Les variables déformation et contrainte normées peuvent être obtenues par un calcul appliqué sur un simple cylindre en traction ou en torsion. Ces variables moyennées sont appelées  $E_{\text{norm}}$  et  $K_{\text{norm}}$ .

Ainsi, le plot de rayon  $r_0=18.4$  mm dans la zone utile et de hauteur  $h_0=40.2$  mm est schématisé par un cylindre de rayon  $r_0$  et de hauteur  $h_0$ .



**Figure 4.9** – Dimensions de l'éprouvette cylindrique assimilée au 'plot' pour le calcul des contraintes et des déformations normées

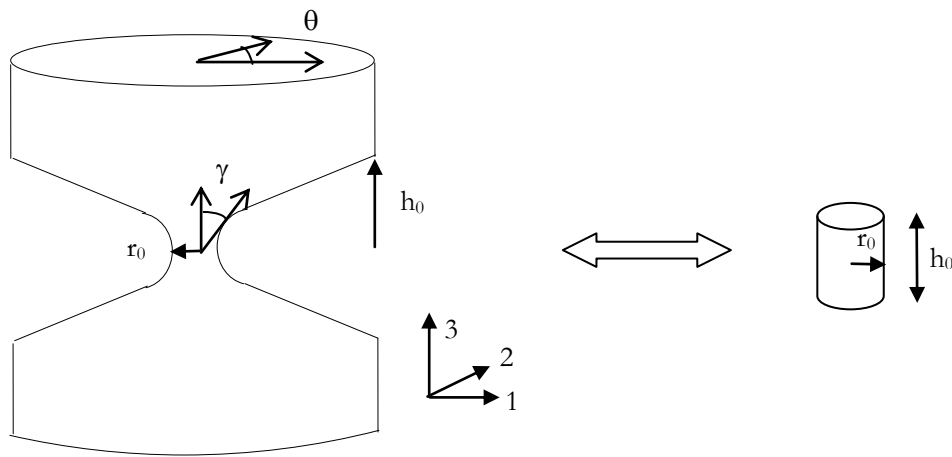
Les variables normées sont alors :

$$E_{\text{norm}} = U_2 / h_0 \qquad K_{\text{norm}} = F_2 / (\pi r_0^2) \qquad (172)$$

$U_2$  est le déplacement global imposé

$F_2$  est la force résultante globale mesurée

De la même façon, l'éprouvette AE est assimilée à un cylindre de rayon égal au rayon de la zone utile de l'AE de rayon  $r_0=4.8$  mm et de hauteur  $h_0$ .



**Figure 4.10** – Dimensions de l'éprouvette cylindrique assimilée à l' 'AE' pour le calcul des contraintes et des déformations 'normées'

$$E_{\text{norm}} = \frac{1}{r_0} \cdot \tan \gamma \approx \frac{1}{r_0} \cdot \theta / h_0 \quad K_{\text{norm}} = 2/\pi \cdot 1/r_0^3 \cdot C \quad (173)$$

$\theta$  est l'angle de rotation imposé

$C$  est le couple résultant mesuré

Les variables de contrainte et de déformation normées sont calculées à partir des mesures globales récupérées au cours du 3<sup>ème</sup> cycle. Ce choix de relever la force ou le couple résultant au 3<sup>ème</sup> cycle est certes conventionnel. Il s'appuie toutefois sur les résultats du chapitre 2 qui montrent que l'adoucissement dû à l'effet Mullins a lieu essentiellement au cours du premier cycle, et que le troisième cycle viscoélastique est stabilisé. Une réserve peut être émise à l'observation des essais de fatigue : ils montrent une décroissance de la force ou du couple résultant tout au cours de l'essai. Toutefois, il est délicat de choisir le numéro du cycle auquel on relève la force ou le couple, car les essais présentent des stabilisations à des moments différents. D'autre part, nous avons voulu être cohérent avec les résultats présentés dans les paragraphes suivants qui utilisent les calculs numériques, menés uniquement sur les trois premiers cycles pour des raisons de temps de calcul.

Ceci permet de réunir sur un même graphe les essais de traction-compression et de torsion. Il s'agit bien évidemment d'une première approximation puisque les variables de déformation et de contrainte, moyennées dans ce cas, seront ensuite calculées précisément par éléments finis.

## Influence de la contrainte maximale imposée à l'éprouvette

Quelques essais considérés valides et obtenus en traction-compression et torsion sur les éprouvettes axisymétriques sont synthétisés sur un graphe. La contrainte normée maximale  $K_{\text{norm max}}$  apparaît en ordonnée et le nombre de cycles à l'amorçage  $N_i$  en abscisse – Fig. 4.11 -. Les nuages de points sont orientés selon une courbe puissance (tracée sur le graphe par régression selon la méthode des moindres carrés) pour chaque type d'essai.

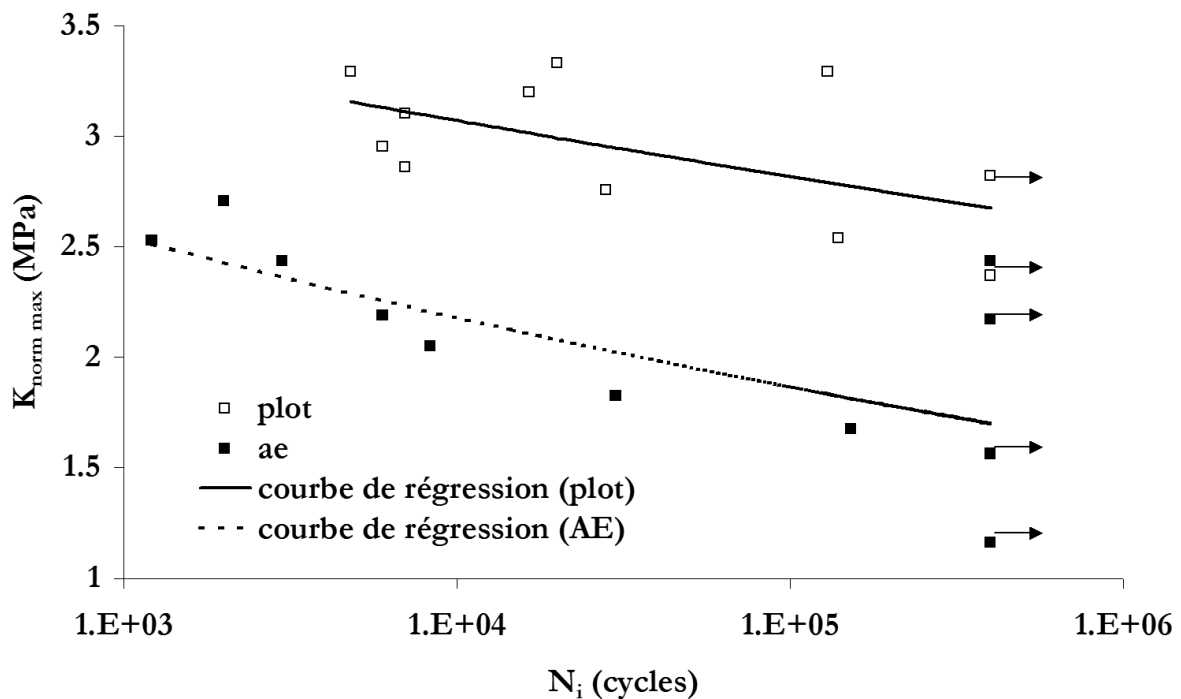
Cette régression s'inspire de l'équation de Wöhlher [Rémy, 96] qui détermine une courbe de durée de vie en fatigue de la forme

$$\sigma = C \cdot N_i^{-a}$$

La contrainte maximale est considérée ici, d'où :

$$K_{\text{norm max}} = C \cdot N_i^{-a}$$

Les courbes de régression sont décroissantes : le nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure diminue lorsque la contrainte maximale augmente. Les courbes tracées à partir des essais de traction compression sur plots et de torsion sur AE ne sont pas superposées. On peut supposer que ceci est dû au calcul 'normé' donc approximatif des contraintes.

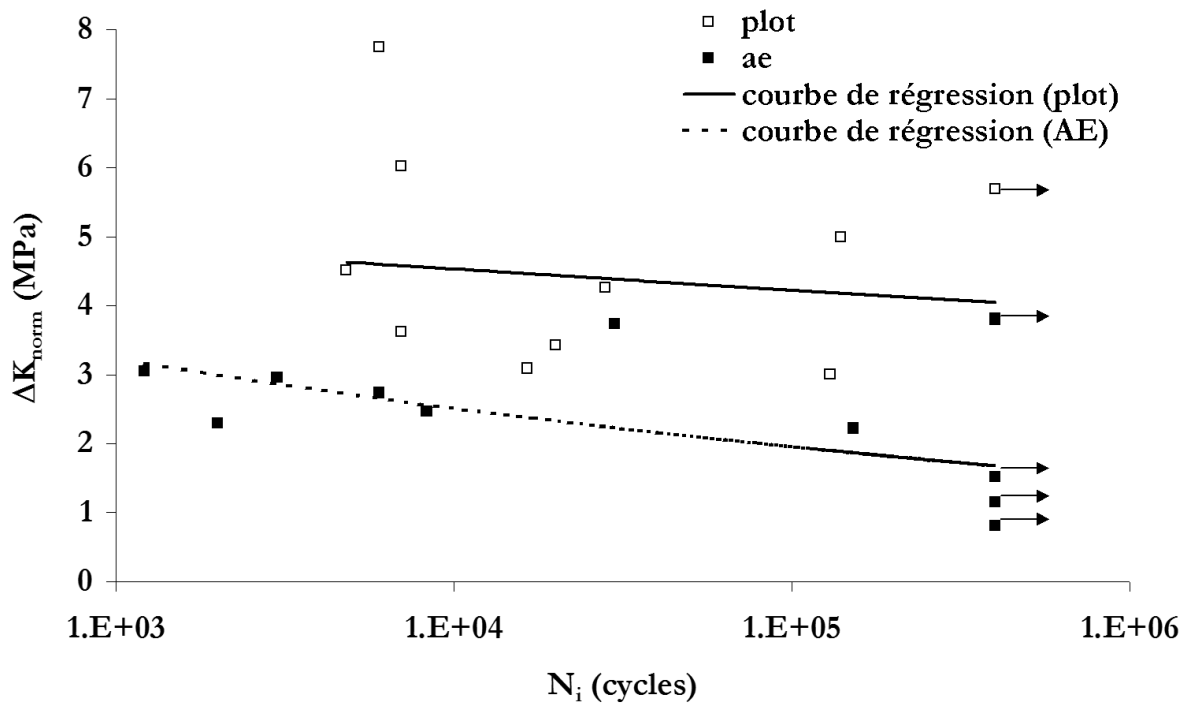


**Figure 4.11** – Synthèse des essais de fatigue sur 'plots et AE – Influence de la contrainte normée maximale sur le nombre de cycles à l'amorçage – La flèche indique que  $N_i > 400\,000$  cycles

## Influence de l'amplitude de contrainte imposée à l'éprouvette

L'amplitude des contraintes est cette fois considérée. Les essais sont réunis sur un graphe présentant l'amplitude de la contrainte normée en ordonnée et le nombre de cycles à l'amorçage en abscisse :

$$\Delta K_{\text{norm}} = C \cdot N_i^{-a}$$



**Figure 4.12** – Synthèse des essais de fatigue sur plots et AE – Influence de l'amplitude de contrainte normée sur le nombre de cycles à l'amorçage

Les courbes de tendance sont déterminées par régression linéaire. Les courbes sont presque horizontales : l'influence de l'amplitude de contrainte n'apparaît pas nettement.

Le critère apparaît délicat à formuler en contraintes. D'une part, la contrainte évolue tout au cours de l'essai. Il est donc délicat de choisir, expérimentalement, la contrainte maximale représentative de l'essai. Numériquement, la chute de contrainte qui se produit pendant ces milliers de cycles n'est pas modélisée. Dans tous les cas, il est illusoire de calculer le comportement de l'éprouvette sur 10 000 cycles. D'autre part, cette relaxation de contrainte importante efface les différences de chargement. Par exemple, les essais AP23 et AP24, dont les conditions limites de chargement sont 0/10 mm et 0/15 mm, présentent des forces résultantes au bout du 5<sup>ème</sup> cycle égales à 3 000 N dans les deux cas.

Nous nous intéressons donc aux déformations.

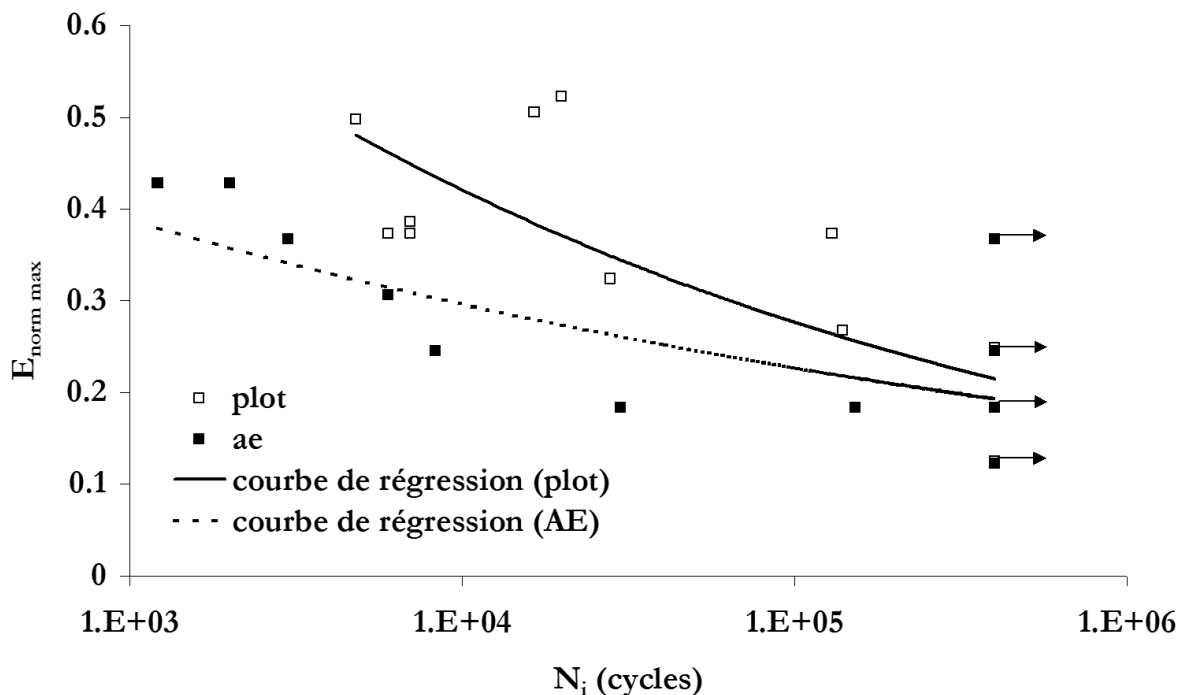
## Influence de la déformation maximale imposée à l'éprouvette

La déformation maximale normée est considérée. La courbe de régression est alors de la forme :

$$E_{\text{norm max}} = C \cdot N_i^{-a}$$

Les courbes de régression font apparaître une nette dépendance du nombre de cycles  $N_i$  avec la déformation maximale – Fig. 4.13 -. De même que précédemment, les courbes synthétisant les essais sur plot et les essais sur AE ne sont pas superposées. Cela provient probablement, comme nous l'avons déjà expliqué, du calcul approximatif des déformations normées.

On conclut que lorsque la déformation maximale augmente, le nombre de cycles à l'amorçage diminue.



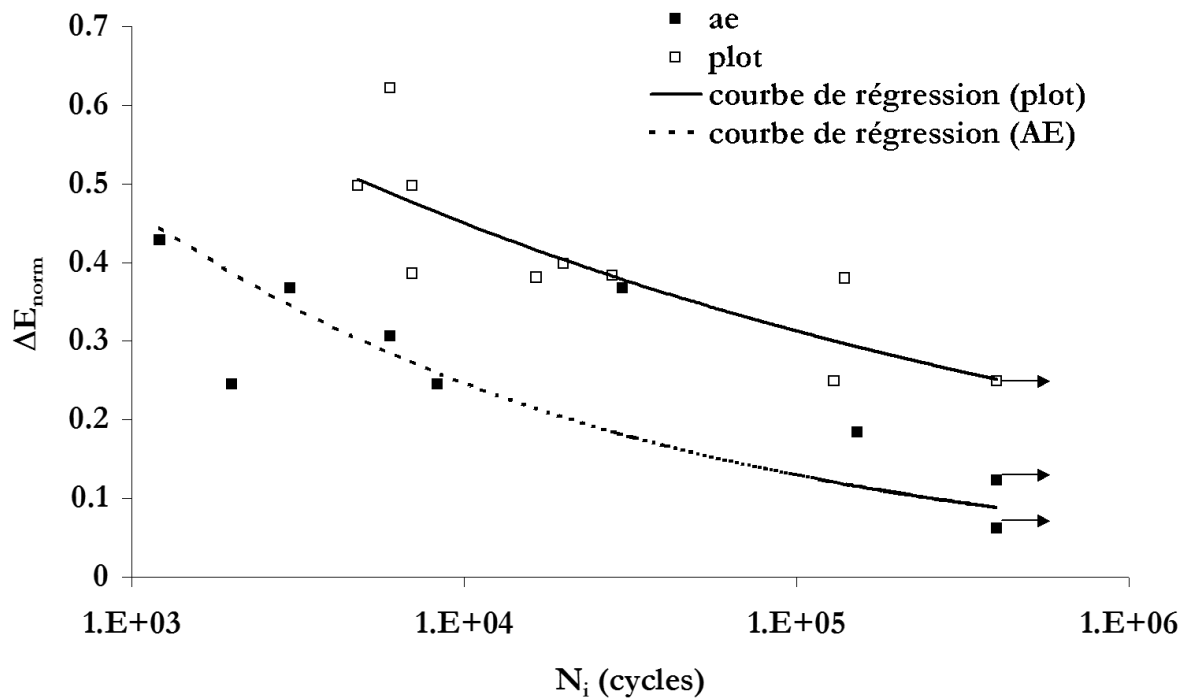
**Figure 4.13** – Synthèse des essais de fatigue sur plots et AE – Influence de la déformation normée maximale sur le nombre de cycles à l'amorçage

Les points sont toutefois dispersés autour de la courbe : un autre paramètre joue un rôle dans l'amorçage : l'amplitude de déformation.

## Influence de l'amplitude de déformation imposée à l'éprouvette

Les essais sont cette fois synthétisés sur un graphe faisant apparaître l'amplitude de déformation  $\Delta E_{\text{norm max}}$  en fonction du nombre de cycles à l'amorçage  $N_i$  – Fig. 4.14 -. Les courbes de régression sont également tracées.

Il apparaît que lorsque l'amplitude de la déformation augmente, le nombre de cycles à l'amorçage diminue.



**Figure 4.14** – Synthèse des essais de fatigue sur 'plots' et AE – Influence de l'amplitude de la déformation normée sur le nombre de cycles à l'amorçage

L'influence des paramètres mécaniques de déformation semble plus probante que celle des paramètres en contrainte sur le nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure. Nous avons vu en effet que le paramètre **déformation maximale** était lié à l'endommagement du matériau. Il est donc critique pour l'endommagement. **L'amplitude de déformation** est par contre liée à l'aspect visqueux du comportement. Plus l'amplitude diminue, plus la dissipation est faible, plus les mouvements de chaînes et charges sont faibles et moins l'endommagement est 'alimenté' et peut progresser.

Notons que ces graphes sont tracés pour des variables moyennées, fonction linéaire des variables globales imposés à l'éprouvette. Ils sont calculés sans prendre en compte l'effet structure 'localisant' les déformations et les contraintes. Afin de rendre ces résultats intrinsèques au matériau et indépendants de la géométrie, il faut tracer les mêmes diagrammes, mais en faisant apparaître les variables mécaniques locales.

## Conclusion

Nous retenons ainsi deux paramètres critiques pour déterminer l'amorçage d'une fissure : la déformation maximale et l'amplitude de déformation.

La dispersion des points autour des courbes de régression provient partiellement de l'influence simultanée des deux paramètres  $E_{norm\ max}$  et  $\Delta E_{norm}$ .

Cependant, une dispersion importante du nombre de cycles à l'amorçage est observée pour des essais identiques. Ces différences sont expliquées dans le paragraphe 4.2 à partir de l'observations des faciès de rupture.



## 4.2 – Mécanismes d'endommagement

Dans ce paragraphe sont exposées et commentées les observations faites au microscope électronique à balayage (MEB) sur les faciès de rupture des éprouvettes plots, puis des éprouvettes AE. Ces observations ont pour but de repérer les zones d'amorçage afin de mettre en évidence les mécanismes d'endommagement en fatigue du SBR chargé.

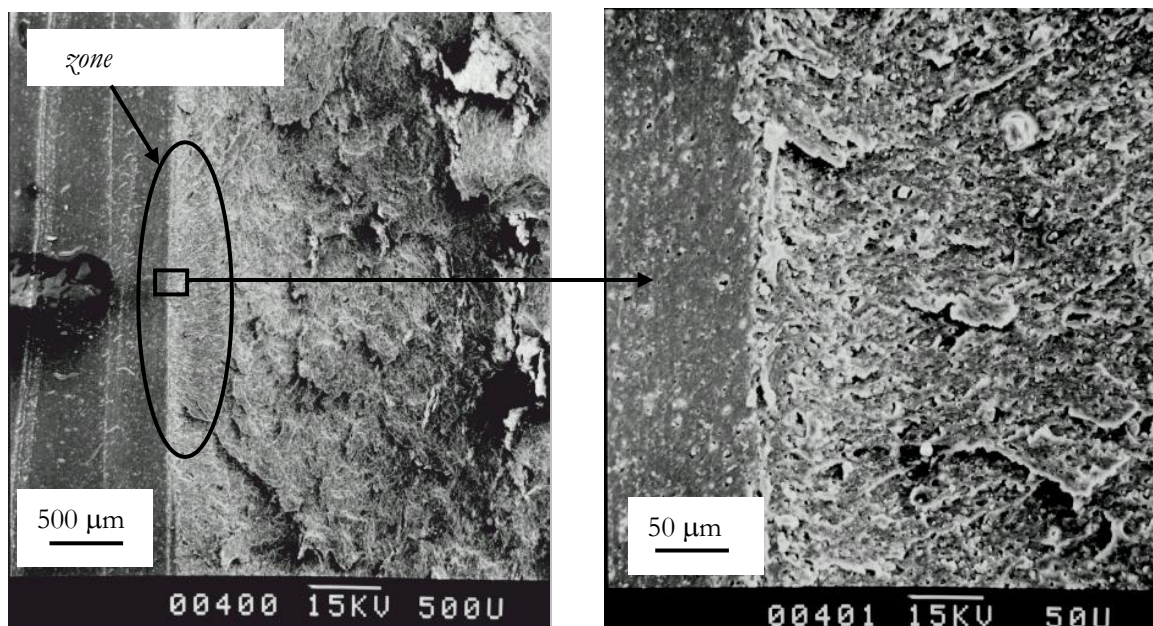
Nous pouvons rappeler quelques conclusions quant aux mécanismes d'endommagement observés en traction monotone. Trois types d'endommagement apparaissent en effet selon le type de charges considéré : agglomérat de silice, agrégat de silice ou agglomérat de noir de carbone. Si la charge est constituée d'un agglomérat de silice (ensemble d'agrégats et de gomme occluse, de taille  $\approx 10$  à  $50\text{ }\mu\text{m}$ ), elle se rompt en son sein lors de l'application d'une sollicitation. D'une part, les agrégats, rigides, ne peuvent pas accommoder la déformation et les liaisons qui maintenaient leur cohésion se rompent. D'autre part, les chaînes élastomères courtes reliant ces agrégats subissent une déformation très supérieure à l'élongation globale et cassent ou se désorbent de la surface des agrégats. Les charges constituées d'agrégats de silice (ensemble de particules, de taille  $\approx 1\text{ }\mu\text{m}$ ) présentent une bonne cohésion interne mais une mauvaise cohésion avec la matrice. Les décohésions avec la matrice apparaissent donc à des chargements assez faibles. Enfin, les agglomérats de noir de carbone présentent une très bonne cohésion avec la matrice. On observe alors une cavitation dans la gomme aux pôles de la charge, aux elongations importantes.

### 4.2.1 – Observations des faciès de rupture sur éprouvette plot

#### Préambule : Propagation de fissure dans une éprouvette 'plot'

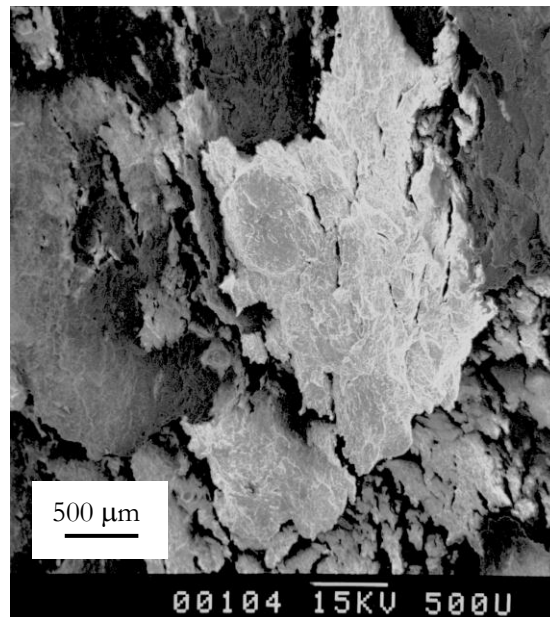
Afin de mettre en évidence les zones correspondant à l'amorçage et à la propagation d'une fissure dans le SBR chargé de silice, nous observons des faciès de rupture d'éprouvettes dans lesquelles le défaut qui constitue l'amorce est créée artificiellement avec une lame de cutter sur une profondeur de 1 mm environ. Les plots pré-fissurés sont alors sollicités en fatigue à déplacement sinusoïdal imposé.

On observe sur les faciès que la zone d'amorçage, accolée à la pré-fissure est la zone la plus plane du faciès – Fig. 4.15 –.



**Figure 4.15** – Zone d'amorçage de fissure dans une éprouvette pré-fissurée - Vue globale et détail - Essai de fatigue à déplacement imposé

La zone de propagation, qui couvre les 9/10<sup>ème</sup> de l'éprouvette est chaotique, représentative d'une rupture ductile dans un matériau dissipatif – Fig. 4.16 -. Les fissures secondaires apparaissent parallèles à la direction de traction.



**Figure 4.16** – Zone de propagation de fissure dans une éprouvette fissurée - Vue globale - Essai de fatigue à déplacement imposé

Le même type d'essai a été mené sur des éprouvettes pré-fissurées au cutter, mais en imposant une force sinusoïdale. La zone d'amorçage est semi-circulaire et plus perturbée que dans le cas de l'essai à déplacement imposé. Ceci n'est pas étonnant dans le cas de nos matériaux qui s'adoucissent fortement au cours des cycles. De plus, on observe sur le faciès une zone très plane qui correspond à la rupture quasi-fragile du ligament final.

## Faciès de rupture des éprouvettes – Vue globale

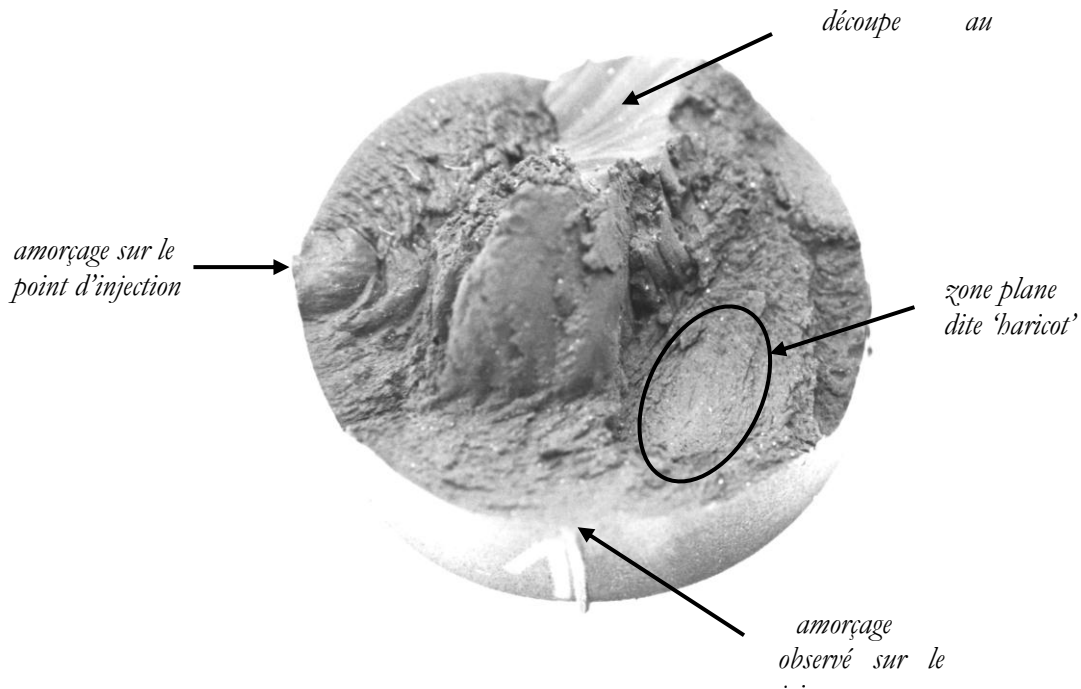
Il est important de noter, avant toute chose, que la fissure se propage, dans la plupart des cas, perpendiculairement à la sollicitation, c'est-à-dire perpendiculairement à la déformation ou à la contrainte principale.

Les faciès de rupture en fatigue des éprouvettes 'plot' sont représentatifs d'un matériau dissipatif : ils sont chaotiques. Nous nous intéressons particulièrement à la zone d'amorçage. Nous la situons soit par repérage des zones plus planes sur le faciès, soit par les zones de propagation semi-circulaires qui l'entourent. De plus, la fissure débouchante visible à l'œil nu a été repérée et notée au cours de l'essai.

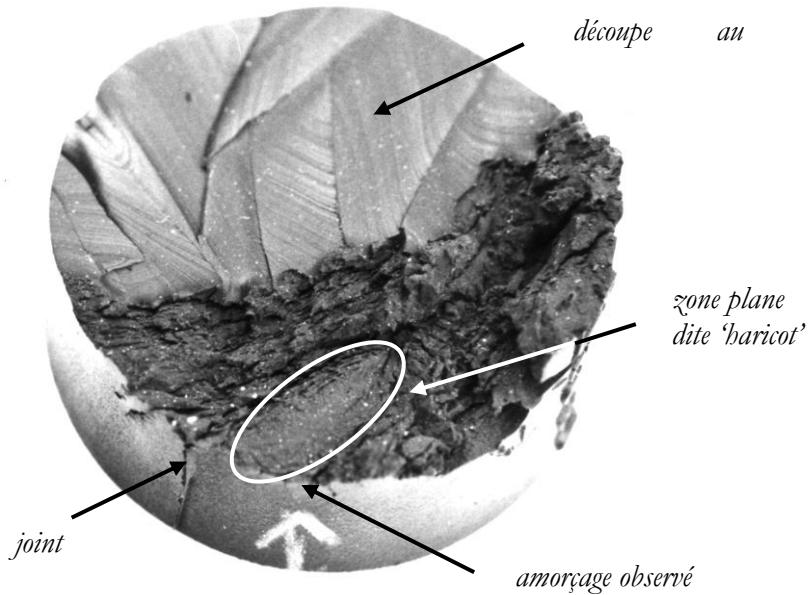
L'amorçage peut avoir lieu dans des zones différentes sur une même éprouvette : à la fois sur le point d'injection (propagation de fissures semi-circulaires) et près du joint – Fig. 4.17 -. La fissure peut également s'amorcer hors d'une zone de défaut de surface apparent – Fig. 4.18 -. La zone du point d'injection, qui est située dans la zone utile de l'éprouvette, présente des propriétés mécaniques différentes du reste du plot. En effet, la fissure, si elle s'amorce hors de cette zone, la contourne dans de nombreux cas – Fig. 4.19 -.

Dans les trois cas, on distingue sur le bord de l'éprouvette ou vers le centre, mais toujours dans la zone où l'amorçage de la fissure est finalement observé, une zone plane – entourée et indiquée sur les figures - en forme de 'haricot' (blanc !) ou de 'demi-haricot' si elle est près du bord. Suite aux observations précédentes

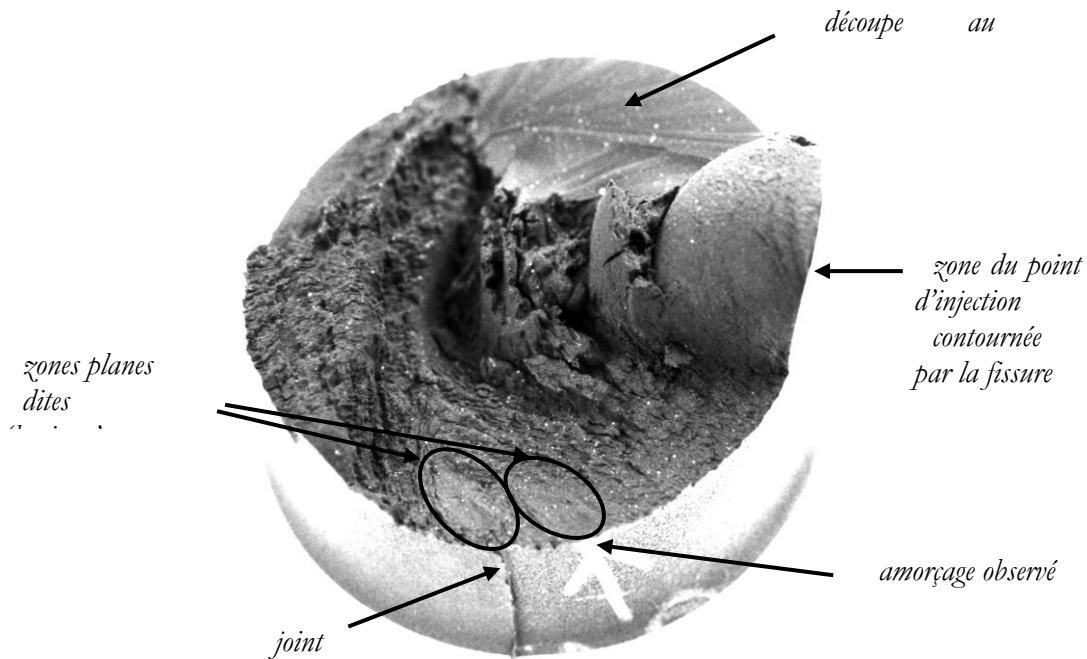
qui concluaient que les zones planes correspondaient aux zones d'amorçage et sachant que ce 'haricot' se situe toujours en face de la fissure débouchante observée à l'œil nu, nous supposons qu'il s'agit d'une zone d'amorçage de fissure. Cet amorçage interne conduit certainement partiellement à la dispersion des résultats.



**Figure 4.17** – Faciès du plot AP7 – Repérage des zones d'amorçage



**Figure 4.18** – Faciès du plot AP12 – Repérage des zones d'amorçage



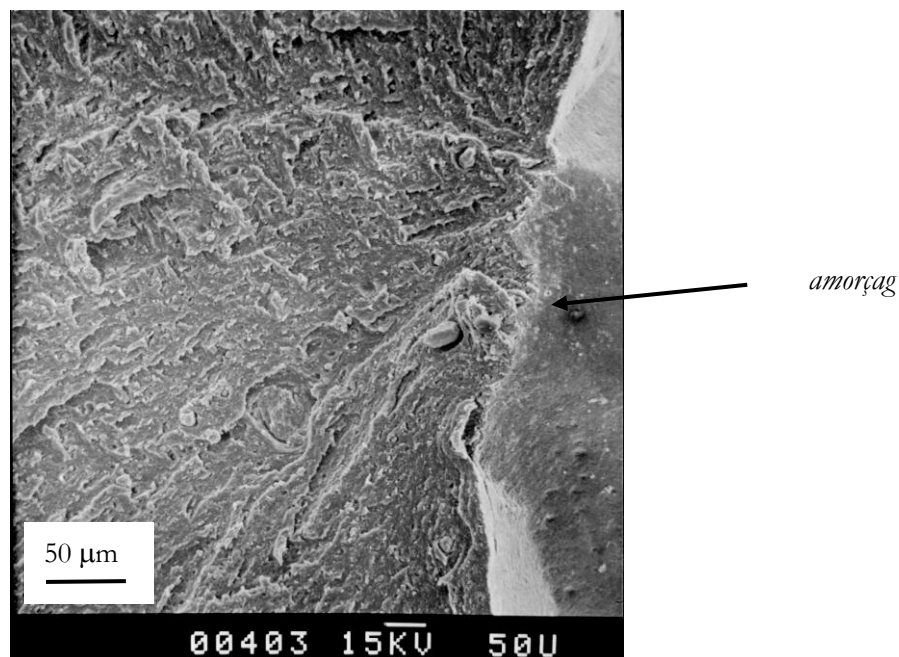
**Figure 4.19** – *Faciès du plot AP4 – Repérage des zones d'amorçage*

## Faciès de rupture sur éprouvettes plots – Détail des zones d'amorçage

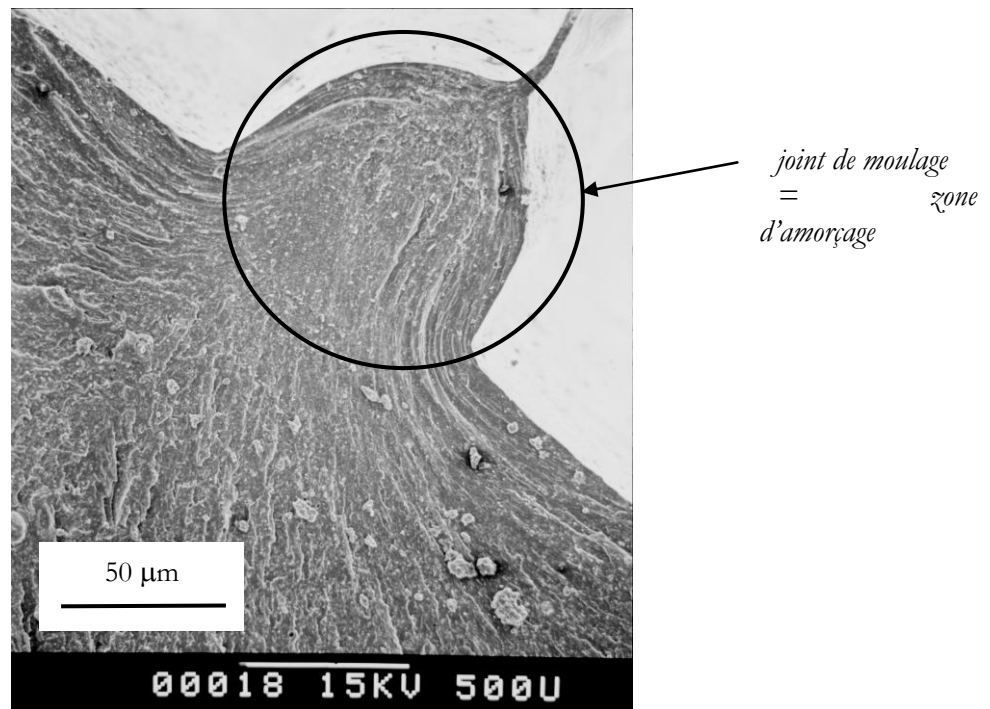
Nous nous focalisons désormais sur les zones d'amorçage de fissures repérées sur le faciès global par des zones planes.

### *Amorçage à partir des défauts de surface*

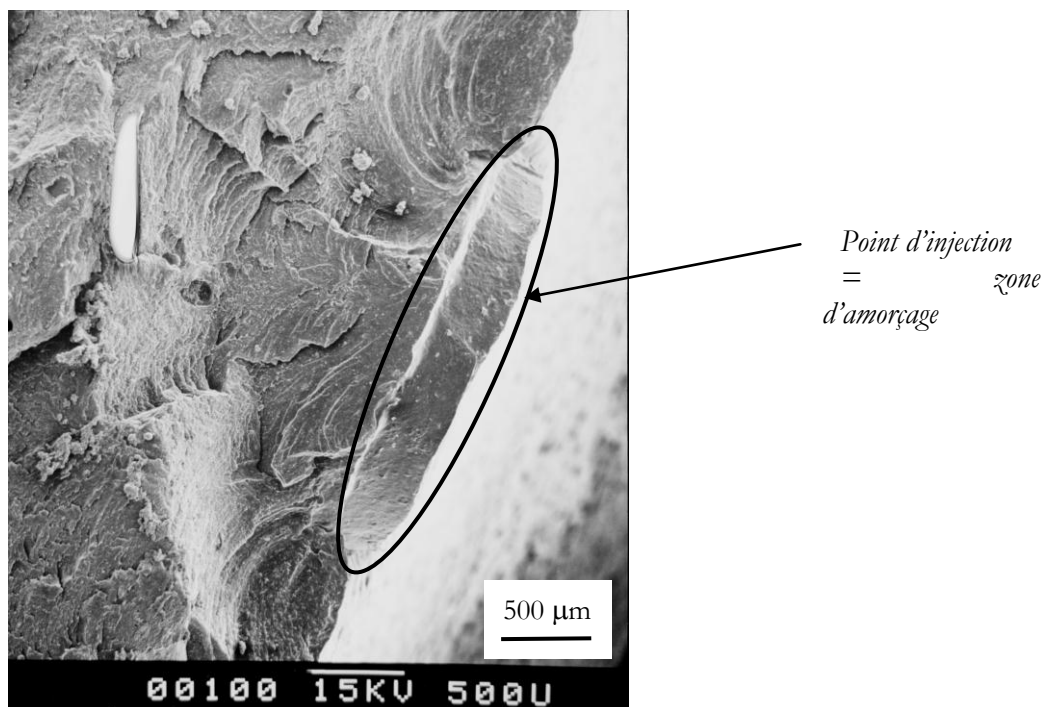
La fissure peut s'amorcer sur des défauts de surface : sur des écritures (gravée dans le moule) – Fig. 4.20 –, sur un des joints de mise en forme – Fig. 4.21 –, ou sur le point d'injection – Fig. 4.22 –.



**Figure 4.20** – *Essai AP5 – Amorçage sur défauts de surface dû aux écritures gravées sur le moule*



**Figure 4.21** – Essai AP7 – Amorçage sur le joint de moulage

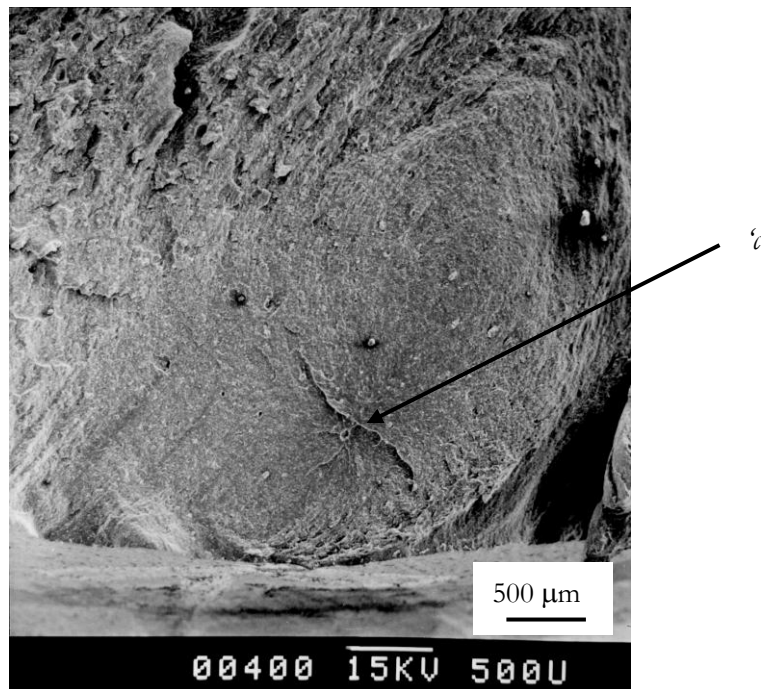


**Figure 4.22** – Essai AP1 – Amorçage sur le point d'injection

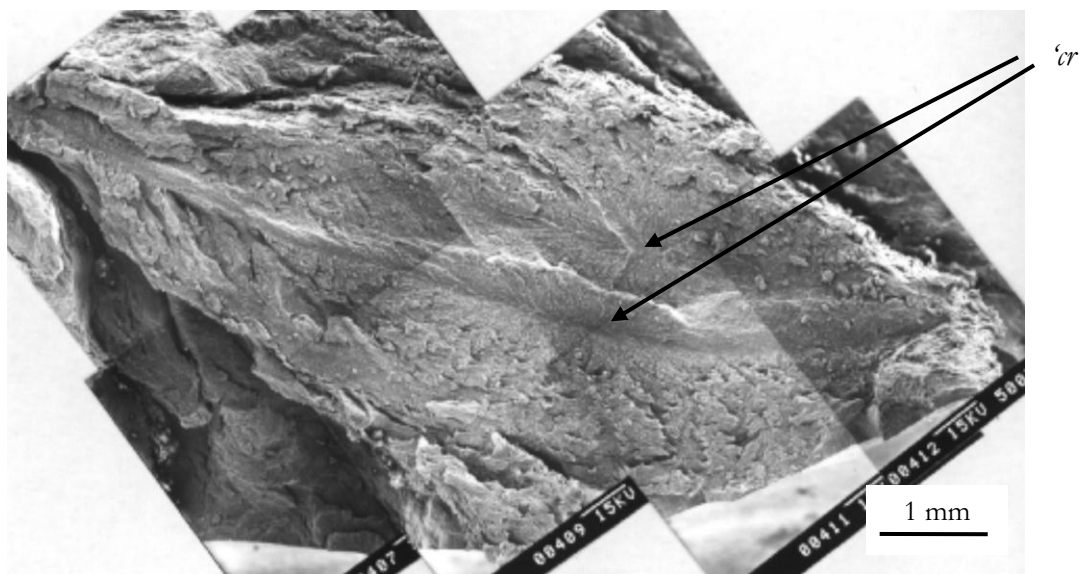
### *Amorçage à partir des défauts internes*

Les zones dites '*haricots*' (appelées ainsi à cause de leur forme sur le faciès de rupture) semblent correspondre sur un grand nombre d'éprouvettes à des zones d'amorçages. La taille de ces '*haricots*' varie entre 1 et 10 mm - Fig. 4.23, 4.24 et 4.25 -. Un trait central plus sombre divise ces zones en deux dans la longueur. Dans la plupart des cas, ces lignes semblent se dessiner autour d'un point central. Ce point apparaît comme une '*croix*' (fléchée sur les faciès), résultat de l'intersection de la 'ligne sombre' et d'une marche.

Dans un des cas (éprouvette AP26), la zone présente une forme plus ronde, et une tâche claire apparaît en son centre - Fig. 4.26 -.

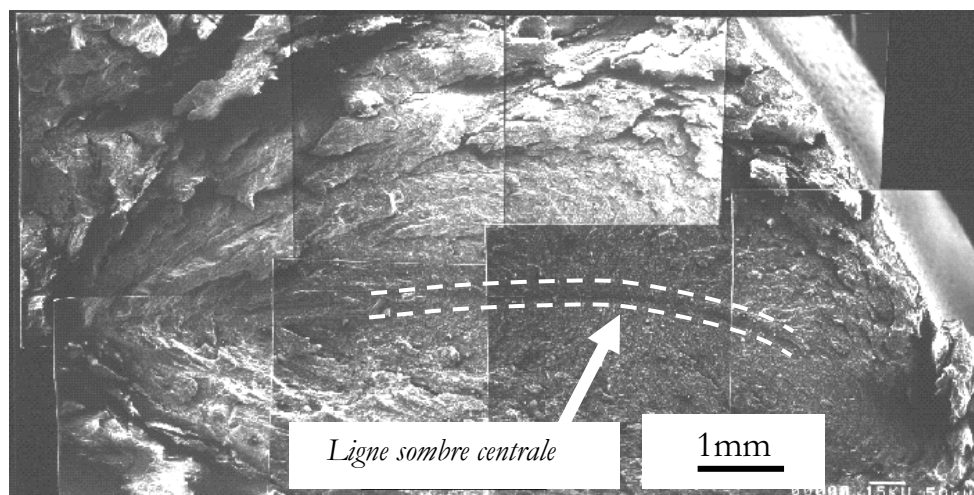


**Figure 4.23** – Essai AP5 – Zone d'amorçage en '*haricot*'

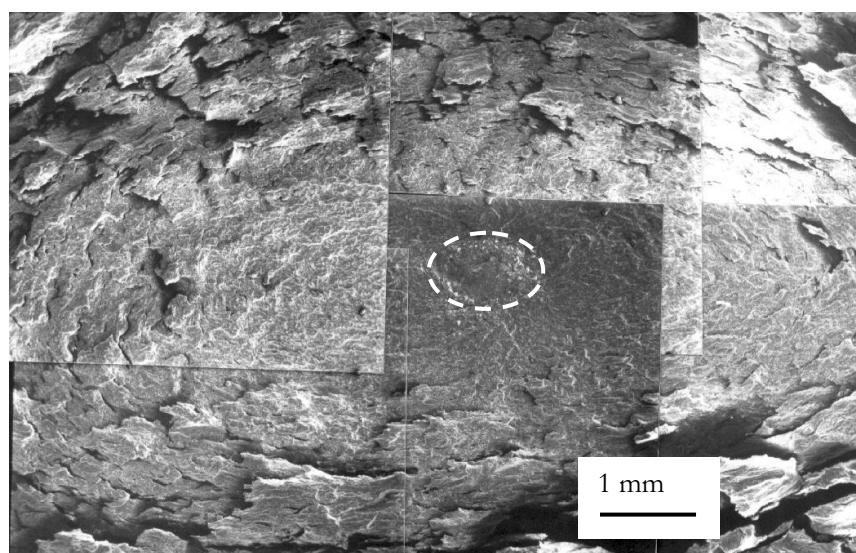


**Figure 4.24** – Essai AP11 – Zone d'amorçage en '*haricot*' - Ligne centrale sombre





**Figure 4.25** – Essai AP12 – Zone d’amorçage en ‘haricot’ – Ligne centrale sombre



**Figure 4.26** – Essai AP26 – Zone d’amorçage en ‘haricot’ – Tâche claire au centre

La forme de ces ‘haricots’ fait penser au modèle de rupture en chevron de Boyd [Bhowmick, 1984]. Dans ce modèle, la forme hyperbolique du front de fissure est due à la jonction de deux fissures de centres différents. [Lee et al., 1993] parlent de faciès en forme d’ ‘arête de poisson’ sur un mélange polycarbonate/ABS. Les fissures sont initiées sur la ‘colonne vertébrale’, et les arêtes sont formées par les intersections du front de fissure primaire avec les fronts de fissure secondaires.

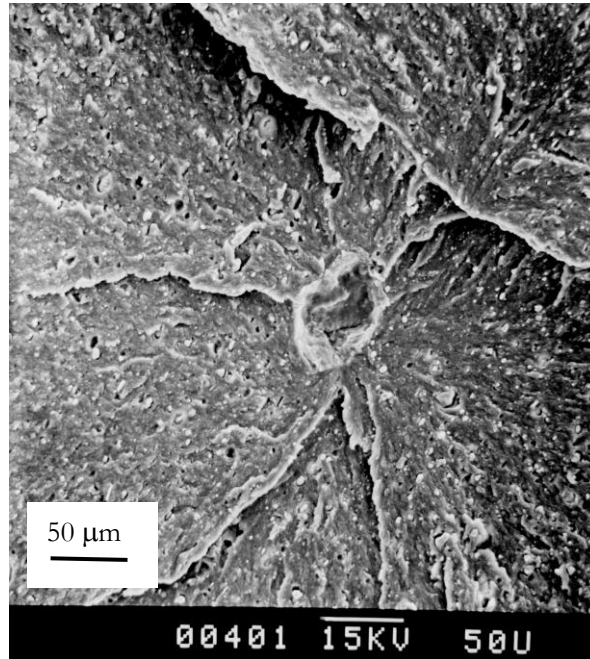
Lorsque ces zones sont détaillées, on aperçoit clairement la ‘croix’, alors considérée comme **le foyer de l’amorçage** - Fig 4.27 -. Cette zone centrale peut correspondre à une **charge de taille importante** - même figure -. D’autre part, dans les zones qui présentent des agglomérats de silice, on constate que ceux-ci sont toujours cassés en deux. En effet, les charges sont visibles sur les deux faciès – Fig. 4.28 (a) et (b) -. Elles ont donc été rompues en leur milieu. Ce phénomène a déjà été illustré lors des essais de traction in situ § 2.4.4).

[Angioletti, 1956] étudie l’endommagement des élastomères chargés en observant un élastomère réticulé transparent, chargé de sphères d’un matériau rigide, en lumière polarisée. Il montre que la concentration de contraintes induite par l’inclusion est d’autant plus importante qu’est faible son adhésion avec la matrice. Dans le cas du SBR A, les charges de silice présentent une mauvaise adhésion avec la matrice SBR. Elles sont donc source d’une concentration de contraintes importante. [Akkerman, 1963] observe

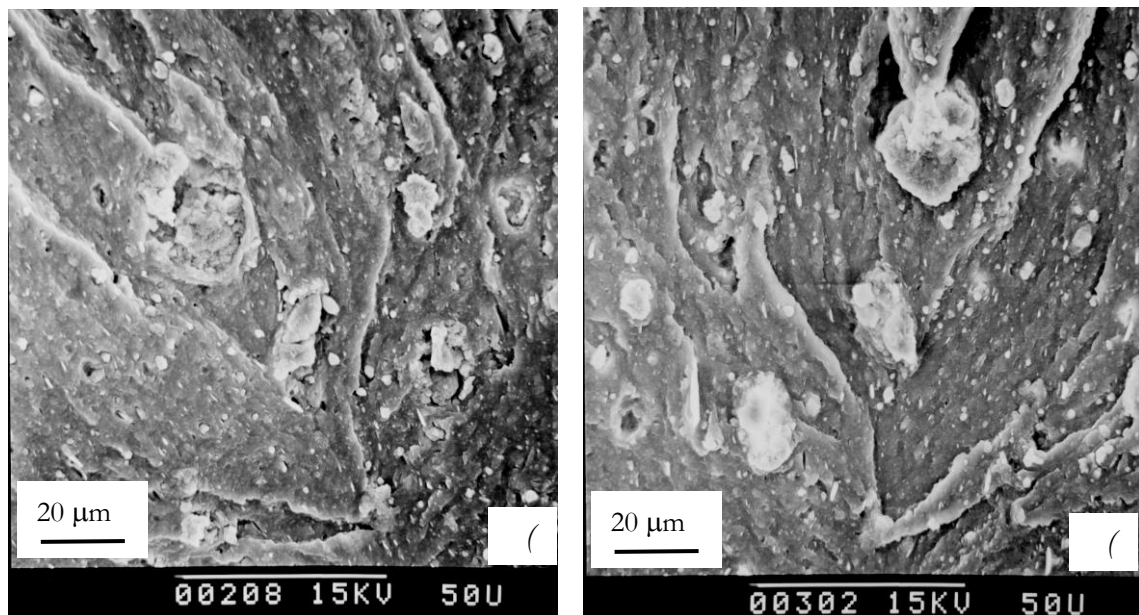
également l'amorçage de l'endommagement en fatigue sur des élastomères. Des trous se forment autour d'inhomogénéités de nature polymérique. Cette cavitation peut être interne et déboucher brusquement en surface. La présence de défauts internes diminue donc la probabilité de l'amorçage en surface de l'éprouvette.

[Saintier, 99] montre que l'endommagement en fatigue est initié par la création de vides aux pôles des agrégats de noir de carbone et de silice (cavitation puis décohésion). La fissure se propage alors à partir des vides.

Dans notre cas, les agglomérats rompent en leur milieu. On suppose que la fissure est amorcée par rupture des chaînes courtes qui relient les agrégats pour former l'agglomérat – ce phénomène est décrit dans le paragraphe 2.4 -. La fissure 'intra-agglomérat' mais 'inter-agrégat' se propage donc à partir de cet amorçage dans la matrice.



**Figure 4.27** – Essai AP5 – Centre du baricot – Croix due à l'intersection de la ligne sombre et d'une 'marche' – Foyer de l'amorçage

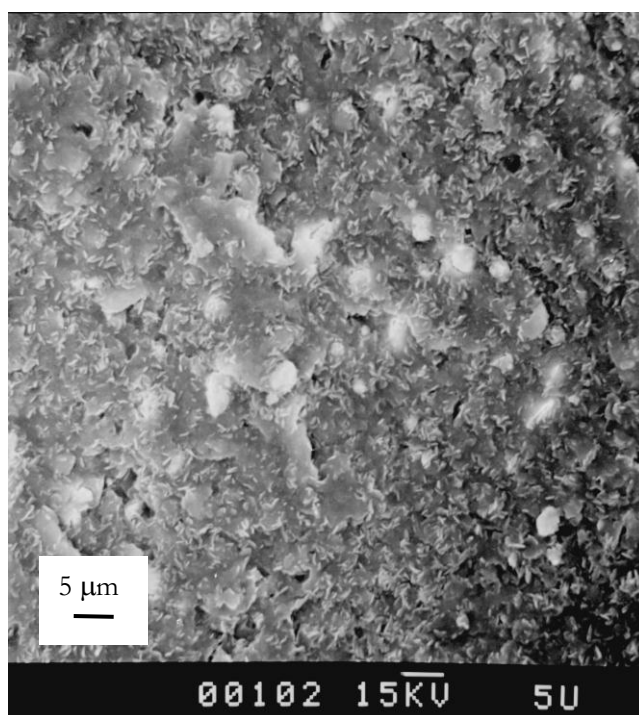


**Figure 4.28** – Essai AP6 – Zones centrales du baricot correspondantes sur les deux faciès(a) et (b) – Mise en évidence de la rupture des agglomérats de silice – Foyer de l'amorçage

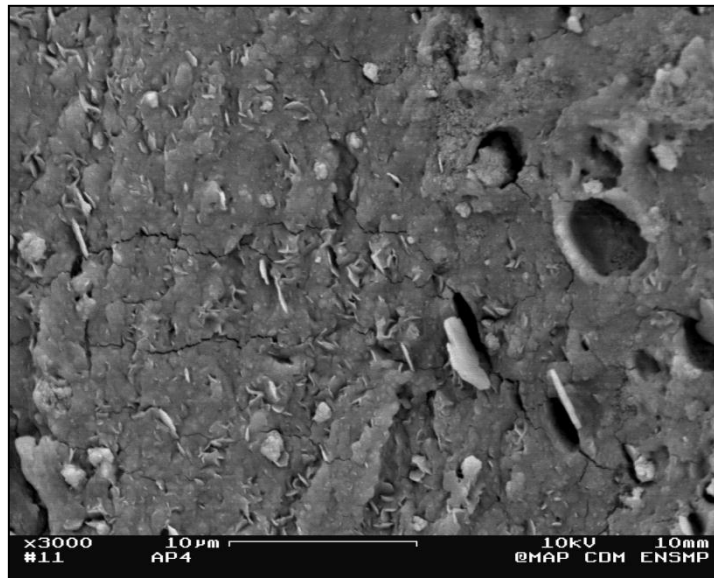


L'observation d'une charge de taille importante est toutefois peu courante. Dans de nombreux cas, on observe, au centre des haricots, une **concentration en charges apparaissant sous forme de plaquettes de taille 1 micron environ** – Fig. 4.29 et 4.30 -. Ces plaquettes ont été analysées par EDS : en plus de l'élément C constituant la gomme, les éléments O, Si et Al sont détectés. On conclue qu'elles correspondent à des charges de kaolin, avec une forme cristallographique de plans empilés. Dès que l'on s'éloigne de la zone centrale, ces plaquettes disparaissent : les clichés de la Fig. 4.31 (a) et (b) ont été pris respectivement au centre et au bord du haricot de l'éprouvette AP11. Dans le second cas, seule la gomme de caoutchouc apparaît.

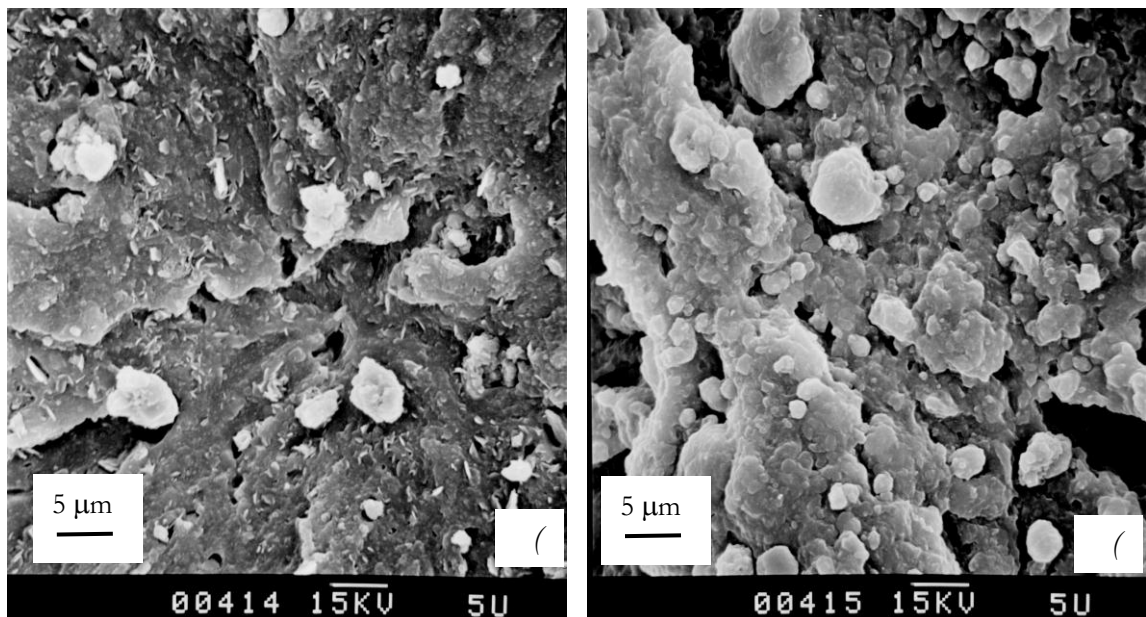
Des cartographies qualitatives de résultats d'analyses par dispersion de longueur d'ondes (WDS) sont effectuées sur ces zones 'haricots'. La surface est découpée et aplanie par une coupe superficielle au microtome (à -65°C). Les éléments O, Si, Ca, Mg, Zn et Al sont détectés. Les résultats montrent alors que le trait central du haricot, qui apparaît sombre, correspond à une zone très enrichie en silicium, et également concentrée en aluminium, zinc et soufre – Fig. 4.32 -. L'enrichissement en oxygène est supposé être trop faible pour pouvoir être détecté à travers le dépôt conducteur de carbone. Ces observations prouvent que la zone d'amorçage correspond à une zone de ségrégation de charges. On suppose que cette hétérogénéité est liée à un mauvais mélangeage de la gomme initiale avec les éléments d'addition. Ceci conduit d'une part à une concentration en charge importante (silice, kaolin), mais également à une sur-réticulation, suite à l'enrichissement en soufre (agent de réticulation) et en zinc (ZnO : activateur). Ces deux phénomènes engendrent la fragilisation du matériau.



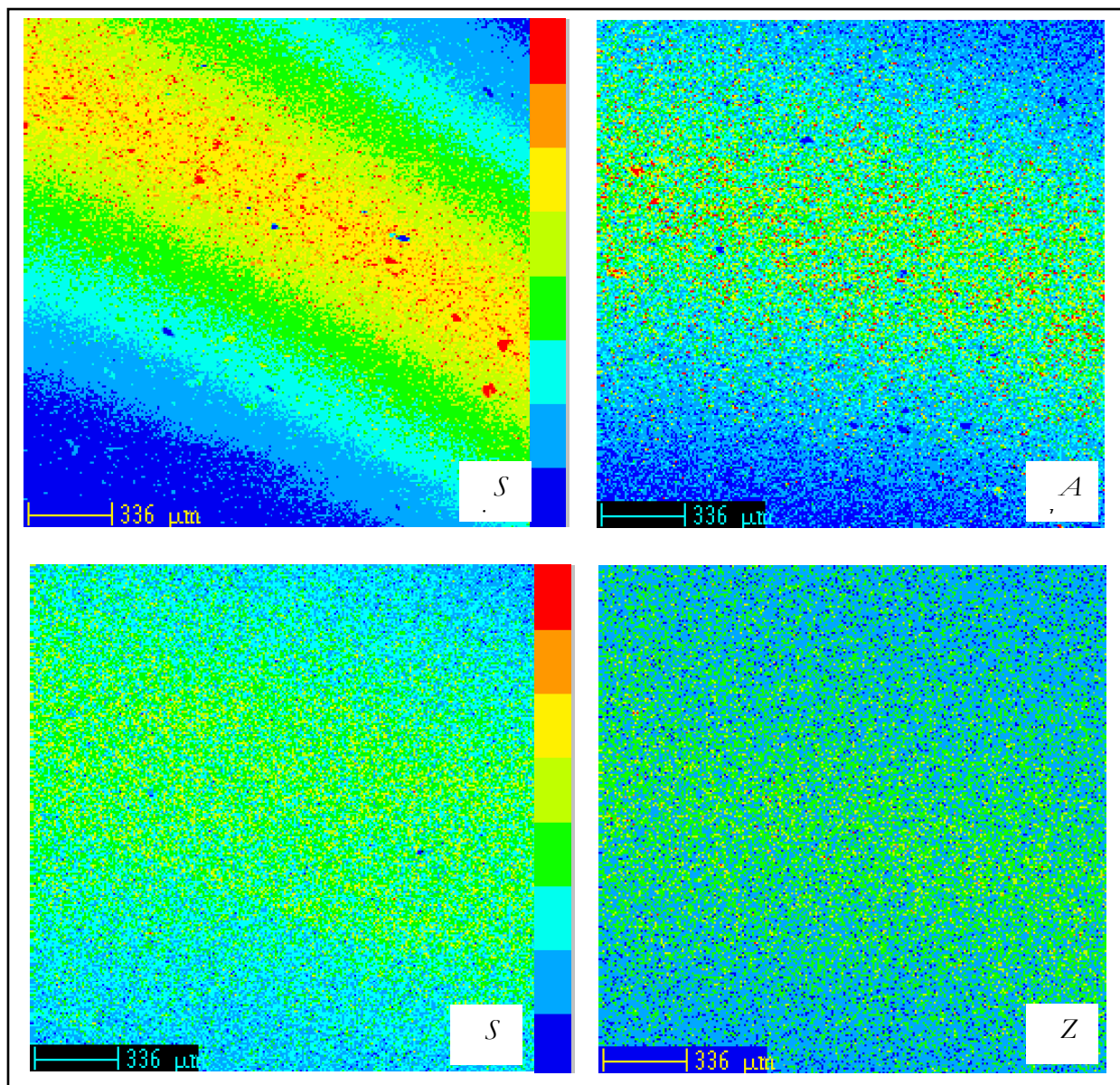
**Figure 4.29** – Essai AP7 – Centre du haricot – Plaquettes de kaolin



**Figure 4.30** – essai AP4 – Centre du haricot – Plaquettes de kaolin



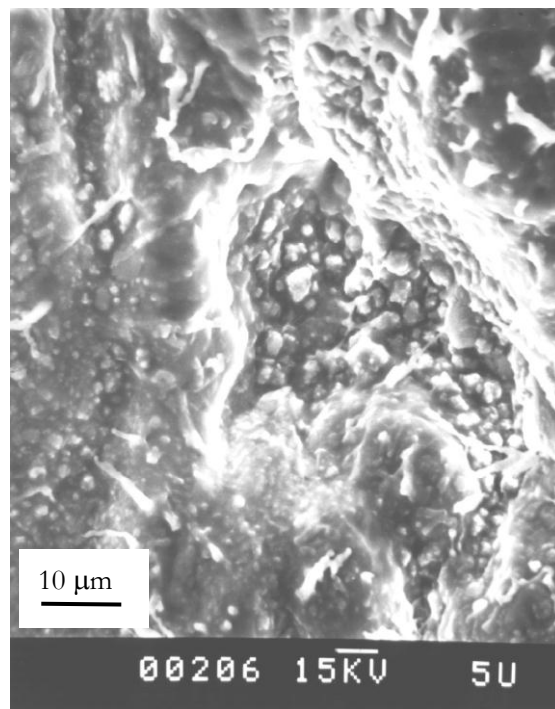
**Figure 4.31** – Essai AP11 – Comparaison du centre du haricot (a) (gomme + plaquettes de kaolin) - avec le bord (b) (gomme seule)



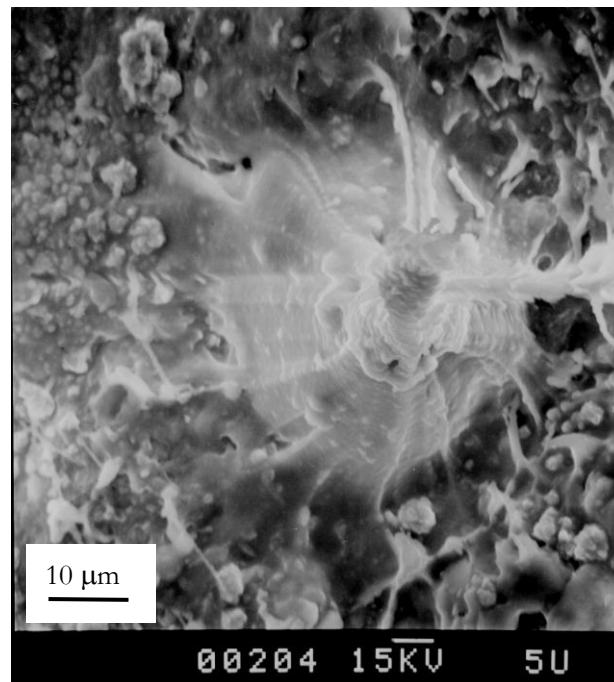
**Figure 4.32** – Cartographies d’analyses EDS des éléments Si, Al, S et Zn dans la zone centrale du ‘haricot’ – éprouvette AP4

Le cas particulier de l’éprouvette AP26 (tâche claire au centre) a également été étudié. La zone centrale est très riche en agrégats de silice de taille 1 à 2 microns – Fig. 4.33 -. Des ligaments de caoutchouc apparaissent rompus – Fig. 4.34 -.

Cette zone a également été analysée par EDS. Des cartographies des éléments O, Si, Ca, Mg, Zn et Al ont été tracées. On constate l’enrichissement, sur une zone bien précise, du matériau en éléments silicium et oxygène, en même temps qu’un appauvrissement en soufre – Fig. 4.35 -. Cette zone correspond donc à un agglomérat ‘géant’ ( $\approx 1$  mm de longueur) de silice.

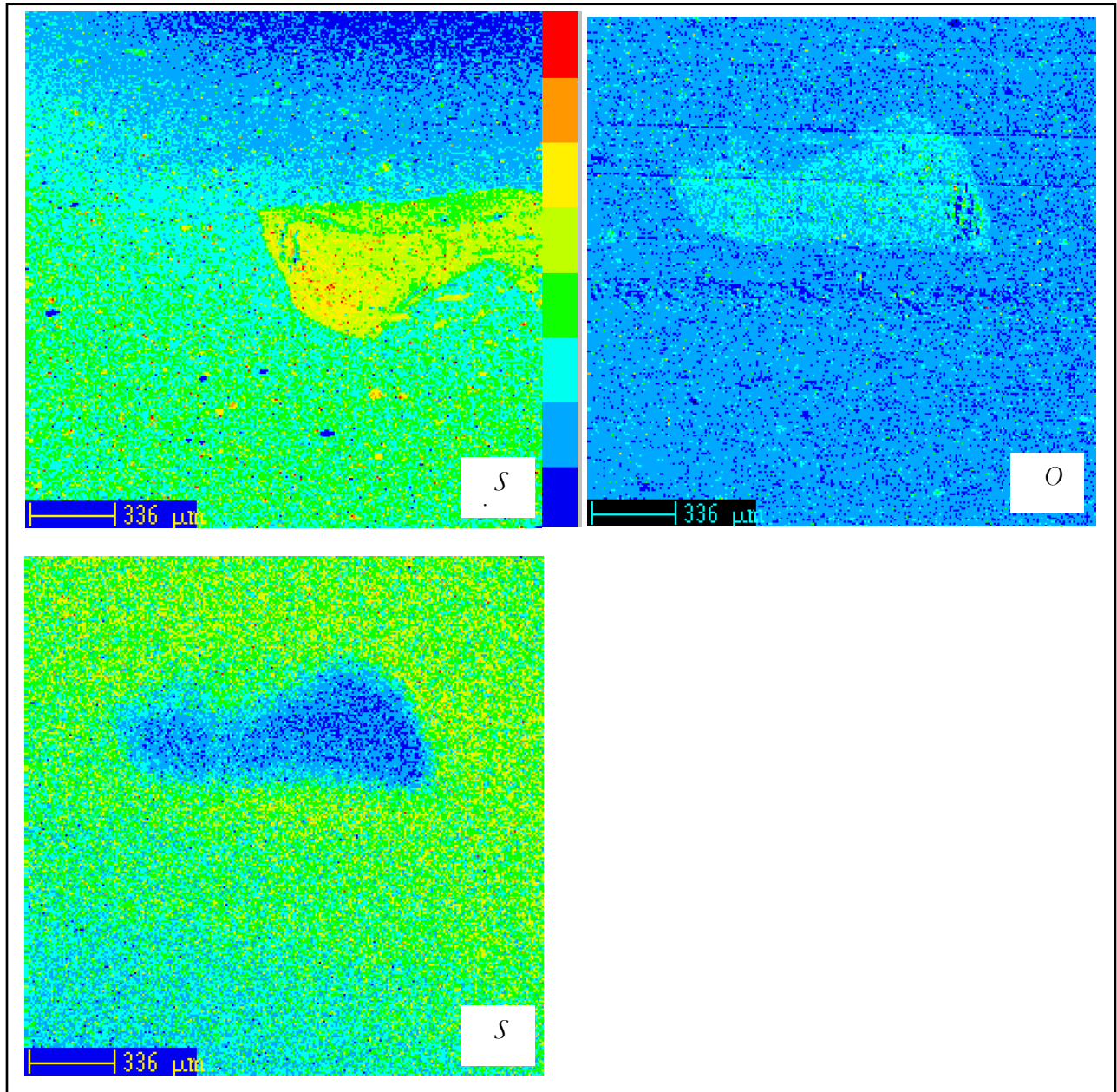


**Figure 4.33** – essai AP26 – Zone centrale du haricot – Agrégats de silice



**Figure 4.34** – Essai AP26 – Zone centrale du haricot – Ligament de caoutchouc rompu





**Figure 4.35** – Cartographies d’analyses EDS des éléments Si, O et S dans la zone de la ‘tâche claire’ – éprouvette AP26 - (la cartographie de l’élément Si est décalée car l’analyse a été menée séparément)

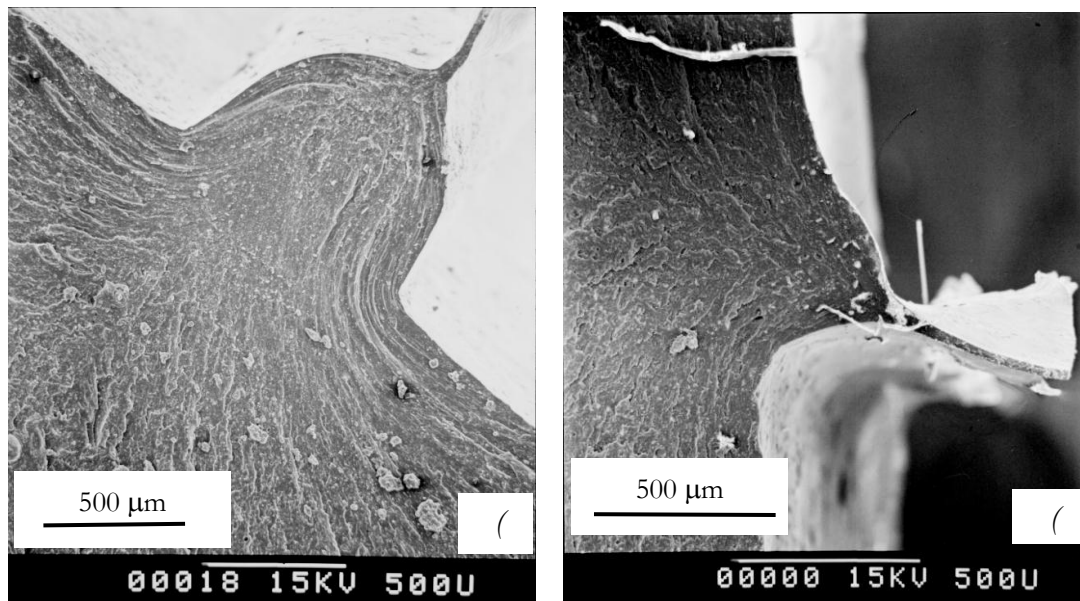
## Dispersion des résultats de durée de vie / Observation des faciès

Comme nous l'avons déjà souligné, une dispersion importante est observée dans les résultats de durée de vie. Les observations MEB expliquent en général la différence de nombre de cycles à l'amorçage.

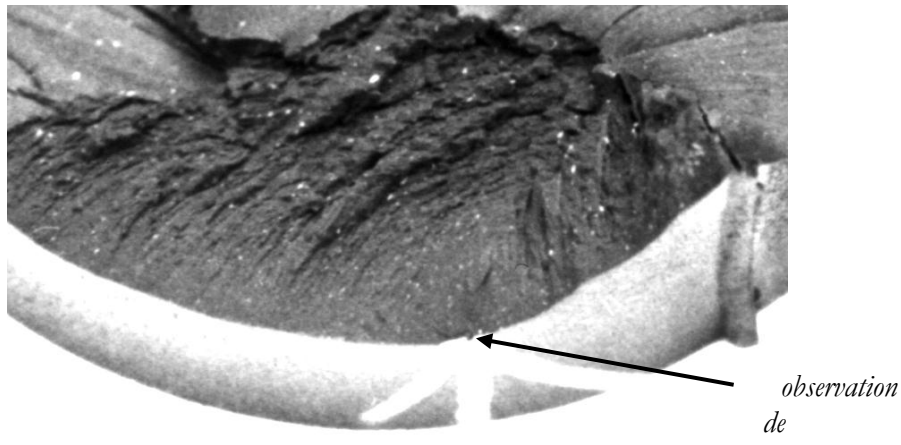
Les éprouvettes AP7 et AP9, testées entre  $-2$  et  $13$  mm, ont amorcé une fissure respectivement à  $N=8\,000$  cycles sur un joint de moulage (ainsi qu'à deux autres endroits situés hors du plan médian) et à  $N=28\,000$  sur le point d'injection. On constate que le joint de l'éprouvette AP7 est beaucoup plus épais que celui de l'éprouvette AP9 – Fig. 4.36 (a) et (b)-. De plus, l'éprouvette AP7 présente une zone plane en 'haricot' importante – Fig. 4.17 -. Ceci explique que l'amorçage soit plus tardif sur l'éprouvette AP9, et qu'il ait eu lieu en dehors des joints de moulage.

De même, l'éprouvette AP6, également testée entre  $-2$  et  $13$  mm a amorcé après  $N=600$  cycles seulement. L'observation de son faciès de rupture présente une zone en forme de demi-haricot au bord de l'éprouvette, à l'endroit où l'amorçage a été observé. La zone centrale apparaît riche en charges et sa formation laisse supposer qu'elle correspond à une zone d'hétérogénéités de mélange. L'amorçage est quasi-immédiat car cette zone se situe juste sous la surface de l'éprouvette – Fig. 4.37 -.

Les éprouvettes AP5 et AP10, testées entre  $5$  et  $21$  mm et  $5$  et  $20$  mm, présentent des cycles à l'amorçage égaux à  $6\,700$  et  $18\,000$ . L'amorce de l'éprouvette AP5 correspond à une zone en forme de haricot, située au bord de l'échantillon – Fig. 4.23 - . L'amorce de l'éprouvette AP10 est par contre situé sur un défaut dû aux écritures. L'observation de son faciès ne laisse apparaître aucune zone type 'haricot'.



**Figure 4.36** – Essais AP7(a) et AP9(b) -  $L_{min}/L_{max}=-2/13$  mm -  $N_i=8\,000 / 28\,000$  – Illustration de l'influence de la taille du joint



**Figure 4.37** – Essai AP6 -  $L_{min}/L_{max} = -2/13$  mm -  $N_i = 500$  – Illustration de l'influence de la zone en 'haricot'

## Conclusion

L'amorçage des fissures apparaît perpendiculaire à la direction de déformation ou de contrainte principale.

Il se situe essentiellement sur deux zones : les joints de moulage ou les défauts internes. Ces derniers sont visibles sur les faciès par des zones planes en forme de 'haricot'. Les 'haricots' présentent, dans la plupart des cas, soit une zone centrale de ségrégation (plaquettes de kaolin ou agrégats de silice), soit une charge de silice de taille importante. Ils correspondent donc à des hétérogénéités de mélange : mauvais mélangeage de la gomme polymère avec les éléments d'additions ou mauvaise répartition des charges de silice. On suppose que ces hétérogénéités sont importantes parce que la zone d'injection se situe dans la zone utile.

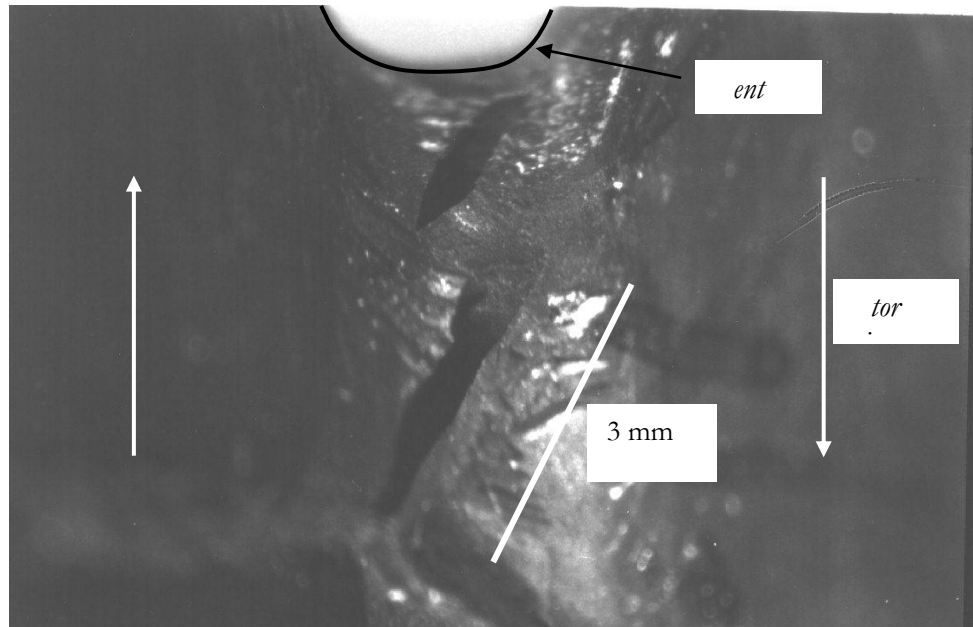
D'autre part, l'observation des faciès montre que l'hétérogénéité à l'origine de l'amorçage (quelles soient sa taille et son origine : agglomérat de silice, zone ségrégée en plaquettes de kaolin, agglomérat 'géant') apparaît toujours sur les deux faciès. Les mécanismes d'endommagement observés en traction monotone semblent donc valables en sollicitation cyclique. La fissure est initiée au sein des agglomérats par rupture ou désorption des chaînes sur les agrégats de silice.

La dispersion observée dans les résultats provient d'une part de la taille des joints de moulage de l'éprouvette et d'autre part, de l'emplacement des zones 'haricot' fortement chargées.

## 4.2.2 – Observations des éprouvettes 'AE'

### Orientation de l'ouverture des fissures

Les fissures sont toujours orientées perpendiculairement à la sollicitation, c'est à dire à environ 45° de l'axe de l'éprouvette – Fig. 4.38 -.



**Figure 4.38** – Essai AE7 – Orientation des fissures perpendiculaire à la direction de l'élongation principale

Nous avons vérifié sur un calcul par éléments finis que la déformation principale était orientée d'environ 45° par rapport à l'axe de rotation.

Rappelons d'autre part que l'amorçage a lieu préférentiellement sur l'un des deux joints, plus protubérant. Nous supposons que le moule a été soit mal positionné, soit fabriqué avec un défaut de symétrie.

### Faciès de rupture des 'AE' en torsion - Vue globale

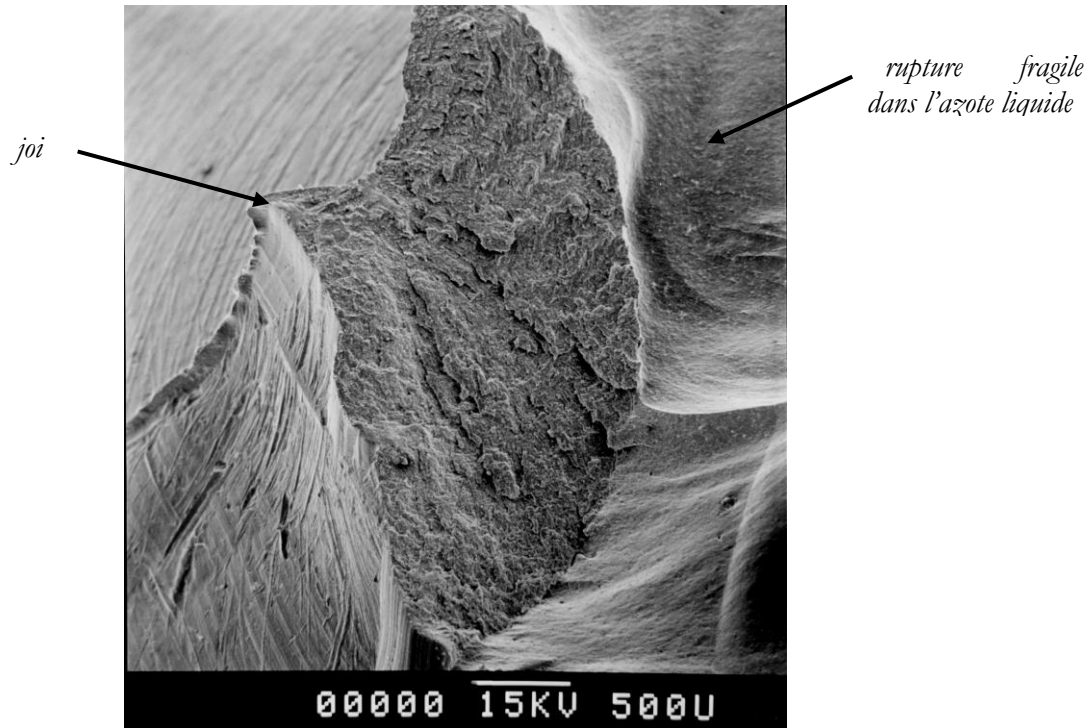
Les essais sont interrompus avant la rupture totale de l'éprouvette. En effet, le gradient de déformation est important dans une éprouvette sollicitée en torsion. Cela freine la propagation de la fissure sur toute sa surface. Les deux parties de l'éprouvette sont alors séparées par application d'un couple de torsion dans l'azote liquide.

Notons que la zone d'amorçage observée est toujours 'pentue' : son angle avoisine les 45° par rapport au plan de symétrie de l'éprouvette. L'échantillon est 'tilté' de 45° dans la chambre du MEB pour obtenir une meilleure netteté sur les clichés.

Comme nous l'avons déjà souligné, l'amorçage se situe quasiment exclusivement au niveau d'un des joints de moulage. Dans le cas des essais fortement chargés (torsion de 70°), l'amorçage a lieu à la fois sur les joints et dans la zone utile hors joints de l'éprouvette.

Le cliché de la Fig. 4.39 montre une zone globale d'amorçage au niveau d'un joint.

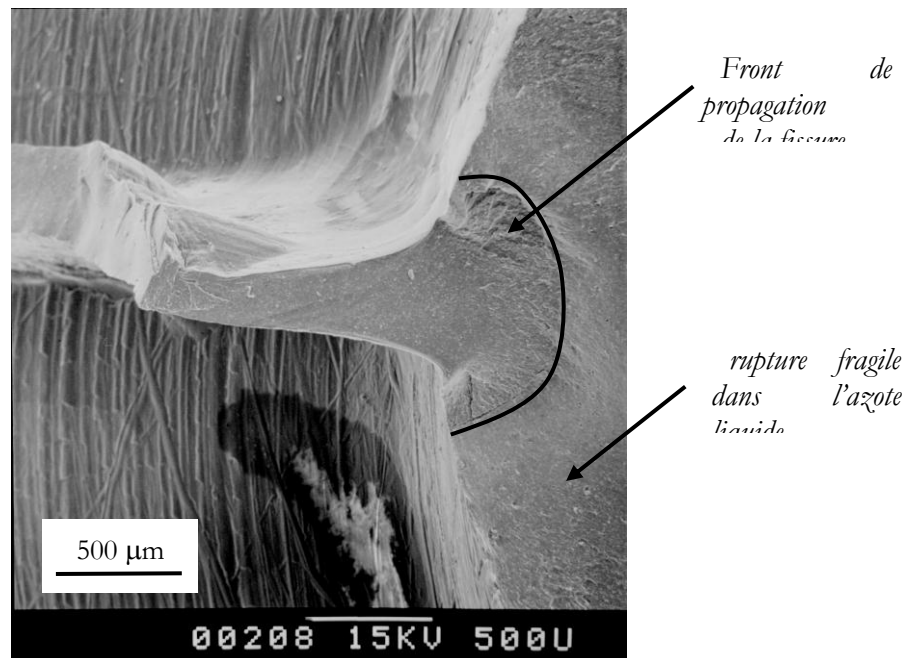




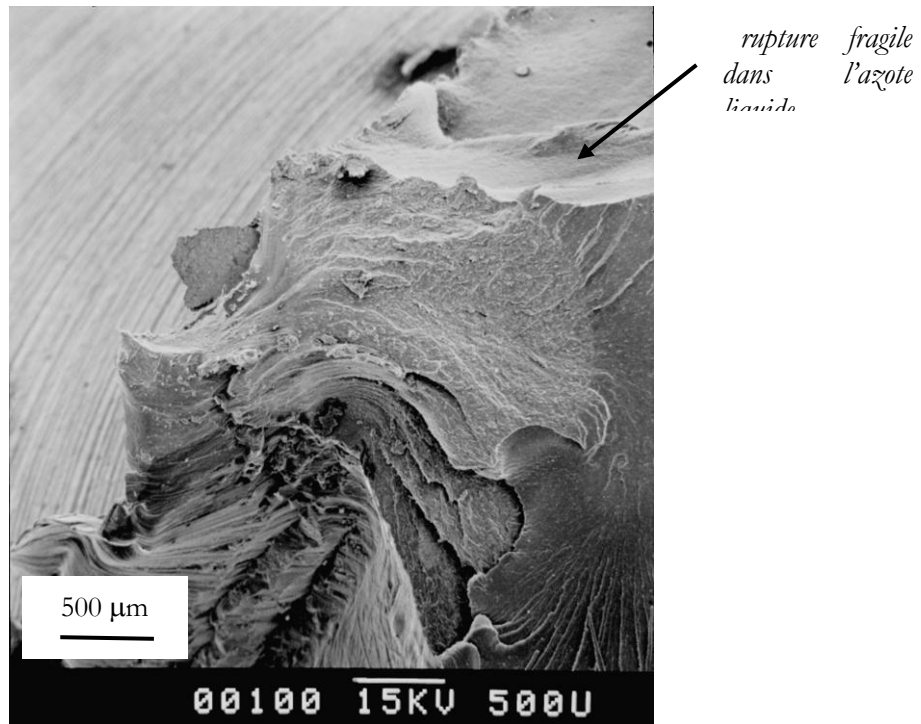
**Figure 4.39** – Essai AE16 – Vue globale de la zone d'amorçage sur le joint

### Faciès de rupture – Observation de l'amorçage sur les joints de moulage

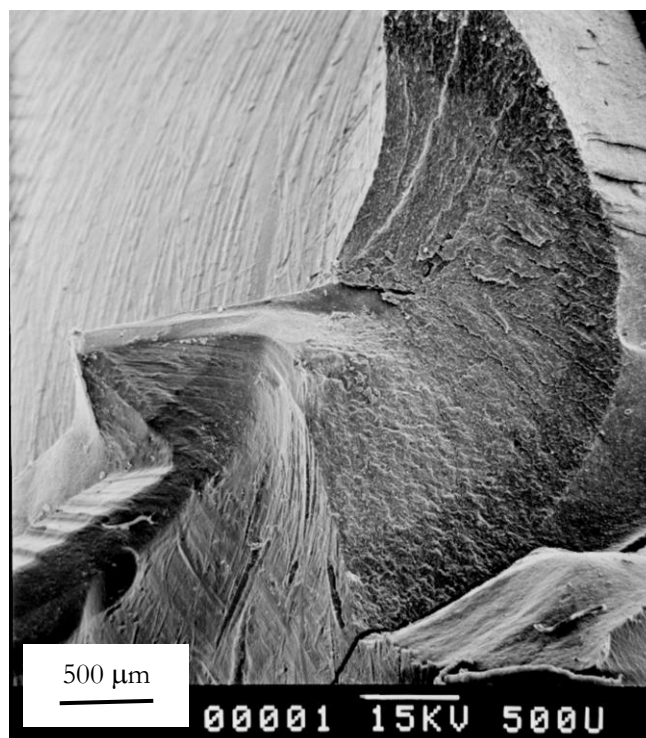
L'amorçage se situe dans la plupart des cas sur les joints de moulage – Fig. 4.40, 4.41 et 4.42 -. On constate que la forme des joints varie d'une éprouvette à l'autre. Ces joints sont plus ou moins épais et plus ou moins 'tourmentés' selon l'éprouvette.



**Figure 4.40** – Essai AE29 – Zone d'amorçage sur joint



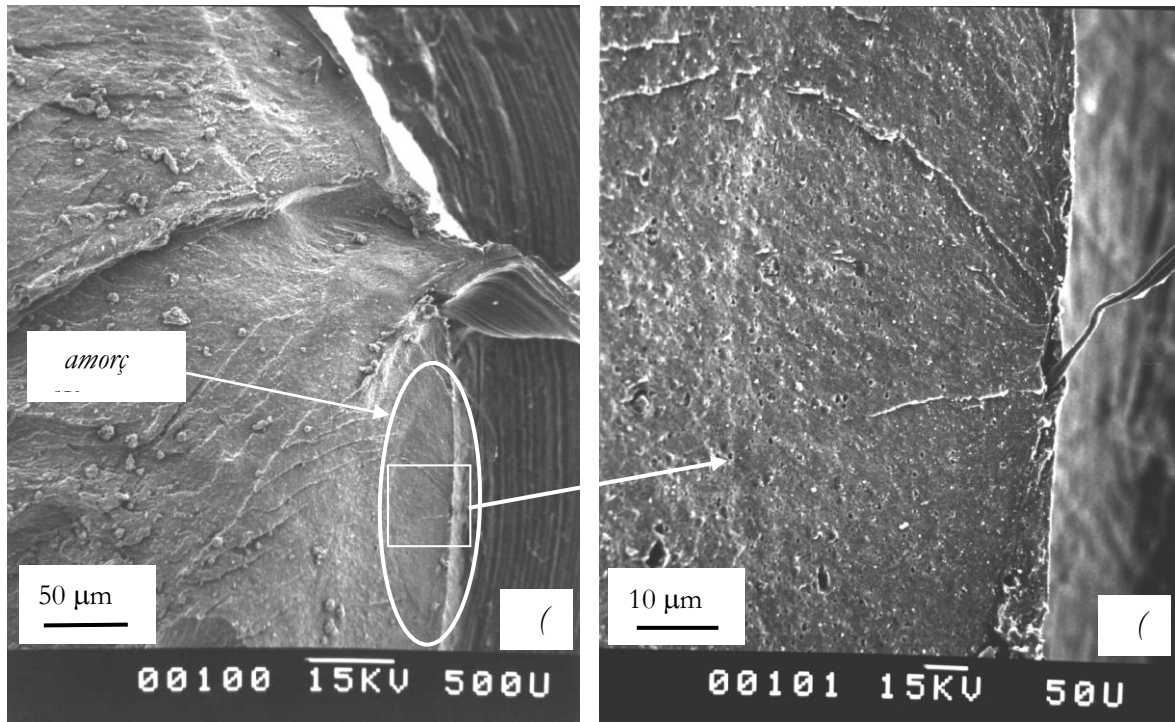
**Figure 4.41** – Essai AE35 – Zone d'amorçage sur joint



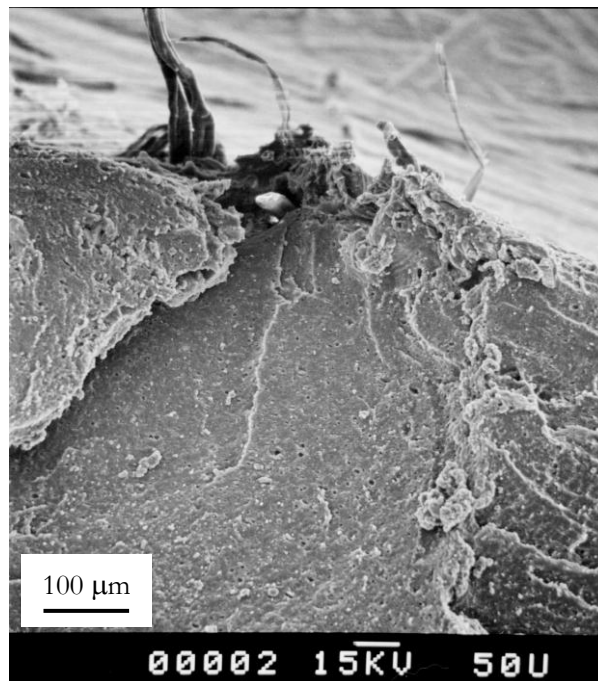
**Figure 4.42** – Essai AE42 – Zone d'amorçage sur joint

## Faciès de rupture – Observation de l’amorçage sur les défauts de surface

Le faciès de rupture de l'éprouvette AE3, testée entre 0 et 70° fait apparaître une zone semi-circulaire représentative d'un amorçage fragile – Fig. 4.43 (a) -. Le détail du centre montre une fibre insérée dans la gomme de caoutchouc – Fig. 4.43 (b) -. Ce défaut se retrouve sur d'autres éprouvettes du premier lot commandé - Fig. 4.44 ép. AE2 -. Ces fibres sont probablement issues de la finition du moule ou de son emballage. Il a en effet été utilisé pour la première fois pour mouler le lot n°1 d'éprouvettes (AE1 à 10).

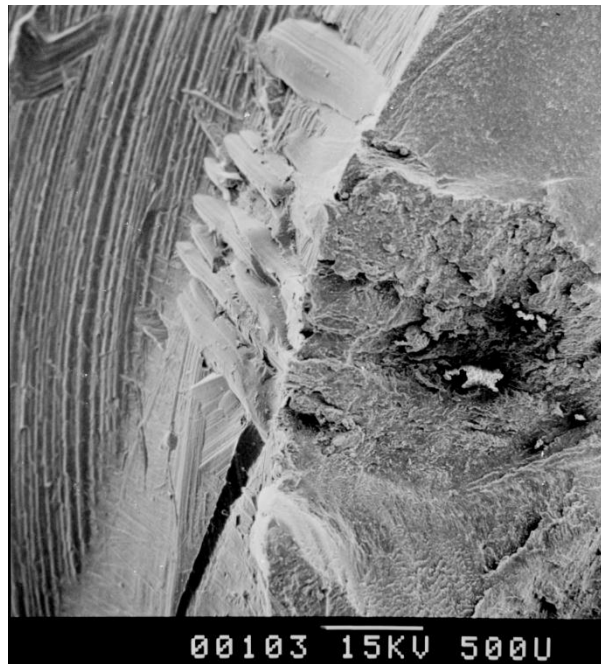


**Figure 4.43** – AE3 – Zone d’amorçage – Vue globale et détail - Présence d’une fibre

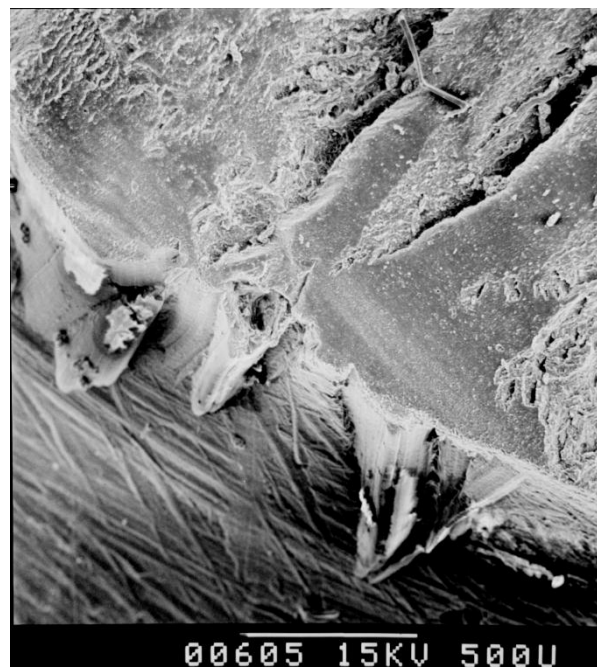


**Figure 4.44** – AE2 – Détail de la zone d’amorçage – Présence de fibres

D'autres défauts de surface correspondent à des bourrelets de caoutchouc surfacique – Fig. 4.45 et 4.46 -. Ils apparaissent toujours au même endroit. Cette zone 'perturbée' apparaît à l'œil nu comme une zone fripée. On suppose que ces défauts sont dus à un mauvais état de surface du moule.



**Figure 4.45** – AE25 – Détail d'une zone dite 'fripée' – Défauts de surface correspondant à des bourrelets de caoutchouc



**Figure 4.46** – AE38 – Détail d'une zone dite 'fripée' – Défauts de surface correspondant à des bourrelets de caoutchouc

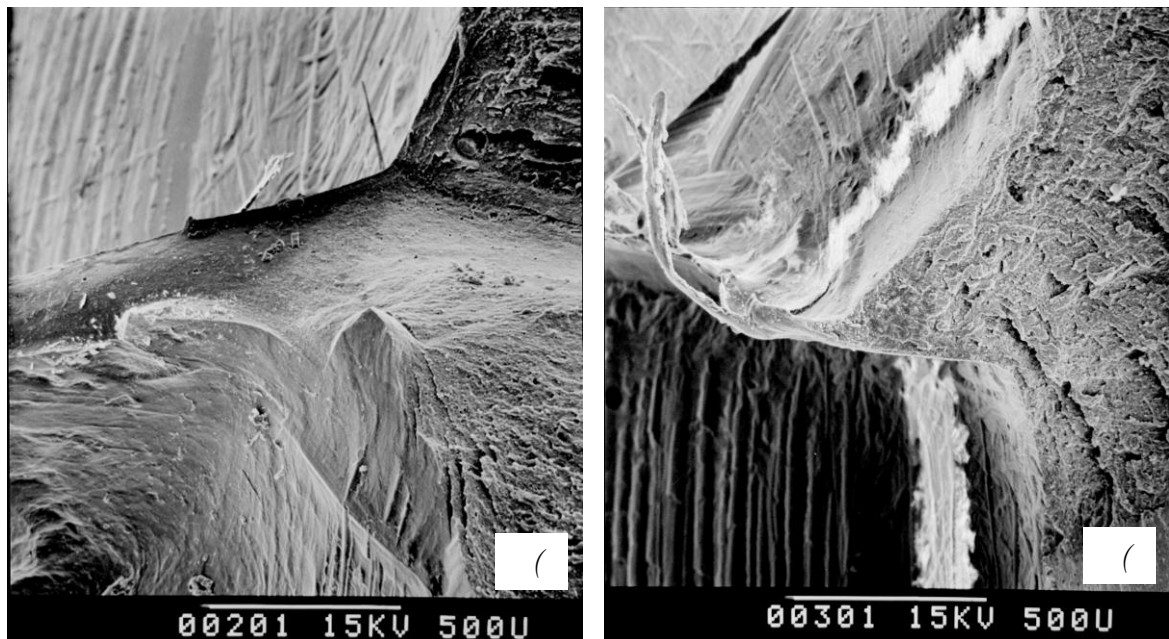
## Dispersion

Les éprouvettes AE2 et AE17, testées entre 0 et 70, présentent respectivement des cycles à l'amorçage égaux à 650 et 2 000. Nous avons déjà vu que l'éprouvette AE2 présentait un amorçage quasi-fragile dû à une fibre. L'éprouvette AE17, issue du 2<sup>ème</sup> lot, ne présente pas ce défaut et est donc plus résistante à l'amorçage d'une fissure.

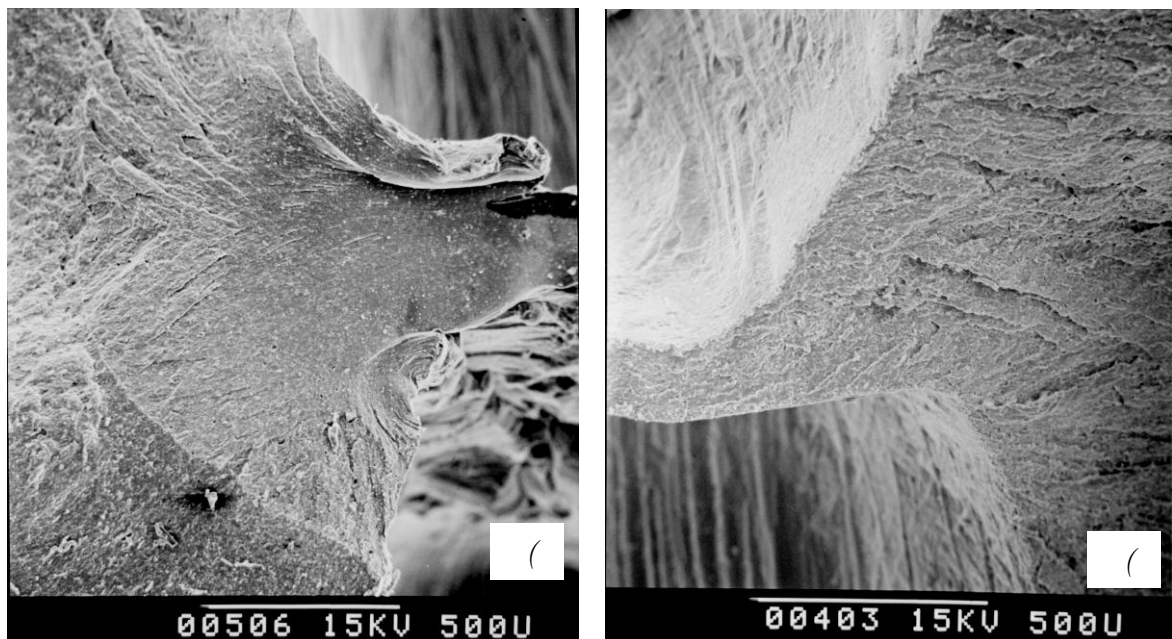
Les éprouvettes AE29 et AE36, dont les conditions limites de chargement sont 20/50° et 10/50°, ont amorcé respectivement à 3 000 et 15 000 cycles. Le joint de l'éprouvette AE36 sur lequel a lieu l'amorçage est beaucoup moins épais et long que celui de l'éprouvette AE29 – Fig. 4.47 -. Ceci explique sa durée de vie plus importante.

De même, les éprouvettes AE21 et AE32, testées avec des chargement de 30/60°, présentent des durées de vies égales à 5 000 et 120 000 cycles. Le joint de l'éprouvette AE21 présente des défauts de surface qui accélèrent l'amorçage alors que le joint de l'AE32 est lisse – Fig. 4.48 -.

Les mêmes conclusions s'appliquent également aux éprouvettes AE25 et AE16, testées entre 0 et 60°.



**Figure 4.47** – Zones d'amorçage sur joint – Comparaison des éprouvettes AE29 (a) et AE36 (b)  
 $N_i=3\ 000/15\ 000$  – Illustration de l'effet de la taille des joints sur le nombre de cycles à l'amorçage



**Figure 4.48** – Zones d'amorçage sur joint – Comparaison des éprouvettes AE21 (a) et AE32 (b)  
 $N_i=5\,000/120\,000$  – Illustration de l'effet de la taille des joints sur le nombre de cycles à l'amorçage

---

### **Conclusion**

Nous avons observé sur l'ensemble des essais que la direction de la fissure était orientée à  $45^\circ$  environ de l'axe de rotation. Cette direction correspond à celle de la plus grande déformation (ou contrainte) principale (voir les résultats du calcul par éléments finis présenté Fig. 4.55).

D'autre part, l'amorçage a lieu quasiment exclusivement sur l'un des deux joints de moulage (protubérant). La taille de ce joint varie de façon importante d'une éprouvette à l'autre.

Dans le cas des éprouvettes issues du lot n°1, l'amorce se situe également au niveau de fibres contenues dans la gomme caoutchouc au niveau de la surface des éprouvettes. On suppose qu'elles proviennent de l'emballage du moule ou de sa finition.

La taille des joints et la présence de fibres contribue évidemment à la dispersion des résultats

---

### 4.3 – Calculs des paramètres mécaniques en fond d'entaille

Les résultats obtenus sur l'ensemble des essais font apparaître deux paramètres pertinents pour décrire l'amorçage d'une fissure : la déformation maximale normée et l'amplitude de déformation normée. Comme nous l'avons souligné, cette étude s'applique à la prévision des durées de vie sur des structures de type semelle. Le critère de durée de vie doit donc être intrinsèque au matériau et indépendant de la structure testée. Pour cette raison, les diagrammes synthétisant les résultats doivent faire intervenir des variables mécaniques locales. Les résultats obtenus sur les 'plots' et les 'AE' devraient alors être confondus puisqu'il s'agit du même matériau.

#### Calculs par éléments finis des éprouvettes 'plots' et 'AE'

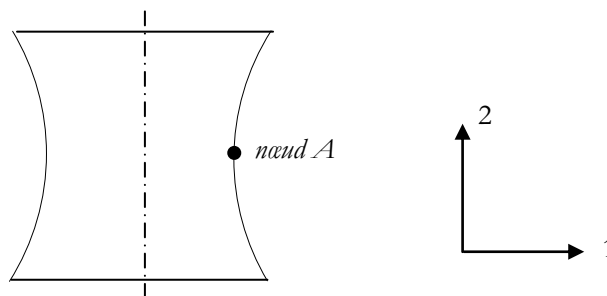
La détermination des variables mécaniques locales est faite grâce à un calcul par éléments finis et une loi de comportement représentative du SBR étudié. L'identification de la loi de comportement a fait l'objet des chapitres 2 et 3. Cette loi est hyperélastique (typique des élastomères), viscoélastique et endommageable (agglomérats de silice). Elle a été identifiée sur des essais simples, et validée sur les éprouvettes axisymétriques entaillées 'plots' et 'AE' testées en traction-compression et torsion (premiers cycles des essais de fatigue). La viscoélasticité intervient dans la loi par une intégrale héréditaire (approche fonctionnelle). Rappelons également que ces calculs ont permis de vérifier que les concentrations de déformation et de contrainte étaient situées en fond d'entaille, sur la surface de l'éprouvette, dans les deux cas de traction-compression sur plot et torsion sur AE (Fig. 3.56, 3.57, 3.63, 3.64).

La composante viscoélastique du comportement implique que la réponse du matériau dépend de son histoire mécanique. Les valeurs de contraintes et de déformations calculées dépendent donc du chargement subi par le matériau (vitesse, trajet, nombre de cycles). Théoriquement, il est donc nécessaire de faire un calcul par éléments finis par chargement pour connaître les variables mécaniques locales en fond d'entaille. Etant donné le nombre de sollicitations différentes imposées et la durée des calculs, nous avons décidé de mettre en place une relation permettant de relier les variables mécaniques normées (calculées à partir du déplacement maximal imposé et de son amplitude) aux variables mécaniques locales (déformation maximale en fond d'entaille et amplitude de déformation) calculées par éléments finis.

D'autre part, la déformation locale calculée numériquement étant stabilisée en quelques cycles - § 3.4.3 -, seuls les cinq premiers cycles sont calculés. Conventionnellement, les variables sont sélectionnées lors du troisième cycle.

#### Relations entre les variables mécaniques globales (chargement appliqué) et les variables mécaniques locales – Cas du plot

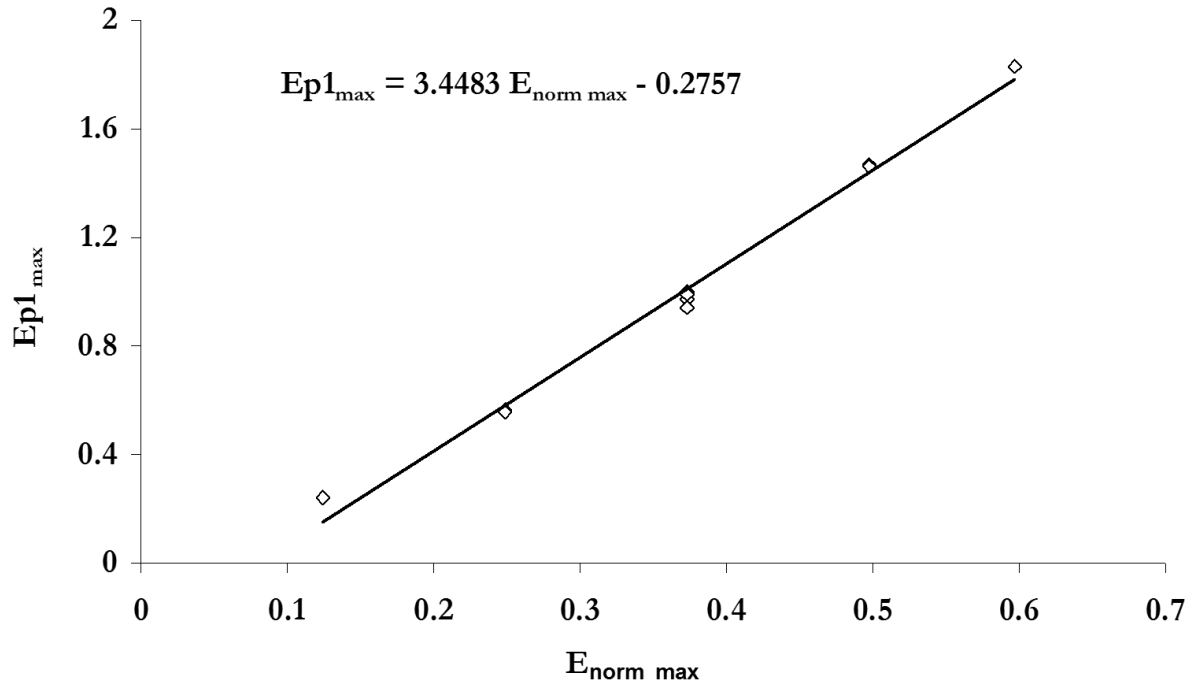
Considérons le nœud A situé en fond d'entaille. L'axe 1 correspond à la direction radiale de l'éprouvette et l'axe 2 à sa direction longitudinale - Fig. 4.49 -. Les déformations de Green-Lagrange non nulles sont alors  $E_{22}$ ,  $E_{11}$ ,  $E_{33}$ ,  $E_{12}$ .



**Figure 4.49** – Schéma de l'éprouvette plot et du repère d'explicitation des déformations.

Les variables locales, au nœud A, minimales et maximales  $E_{11}$ ,  $E_{33}$ ,  $E_{12}$ , ainsi que la déformation principale maximale  $E_{p1\max}$ , issues du calcul par éléments finis sont tracées en fonction des variables normées  $E_{\text{norm max}}$  et  $E_{\text{norm min}}$  (calculées au paragraphe 4.1.3). On constate qu'elles varient de façon quasi-linéaire avec cette variable. La Fig. 4.50 illustre la variation de la variable  $E_{p1\max}$  avec la déformation maximale normée.

Les équations des droites sont alors utilisées pour interpoler les évolutions des variables locales dans les éprouvettes qui n'ont pas été calculées par éléments finis.



**Figure 4.50** – Essais de traction-compression sur ‘plot’ - Expression de la déformation principale maximale  $E_{p1\max}$  calculée par éléments finis en fonction de la déformation normée maximale  $E_{\text{norm max}}$

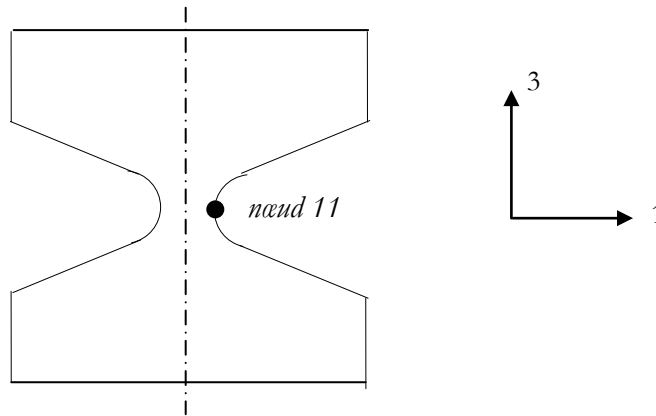
Les évolutions des variables mécaniques locales en fond d’entaille sont exprimées en fonction des déformations normées minimale et maximale. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 E_{p1\max} &= E_{22\max} = 3.4483 E_{\text{norm max}} - 0.2757 \\
 E_{11\max} &= -0.4095 E_{\text{norm max}} - 0.0693 \\
 E_{33\max} &= -0.3494 E_{\text{norm max}} - 0.0517 \\
 E_{12\max} &= 0.0185 E_{\text{norm max}} - 0.0004 \\
 E_{p1\min} &= E_{22\min} = 1.817 E_{\text{norm min}} + 0.0632 \\
 E_{11\min} &= -0.4612 E_{\text{norm min}} + 0.0393 \\
 E_{33\min} &= -0.8229 E_{\text{norm min}} + 0.0153 \\
 E_{12\min} &= 0.023 E_{\text{norm min}} + 0.0003
 \end{aligned}$$

### Relations entre les variables mécaniques globales (chargement appliqué) et les variables mécaniques locales – Cas de l’éprouvette axisymétrique entaillée AE

Considérons le nœud 11 situé en fond d’entaille. L’axe 1 correspond à la direction radiale de l’éprouvette et l’axe 3 à sa direction axiale - Fig. 4.51 -. Les déformations de Green-Lagrange sur ce nœud sont alors dépouillées.



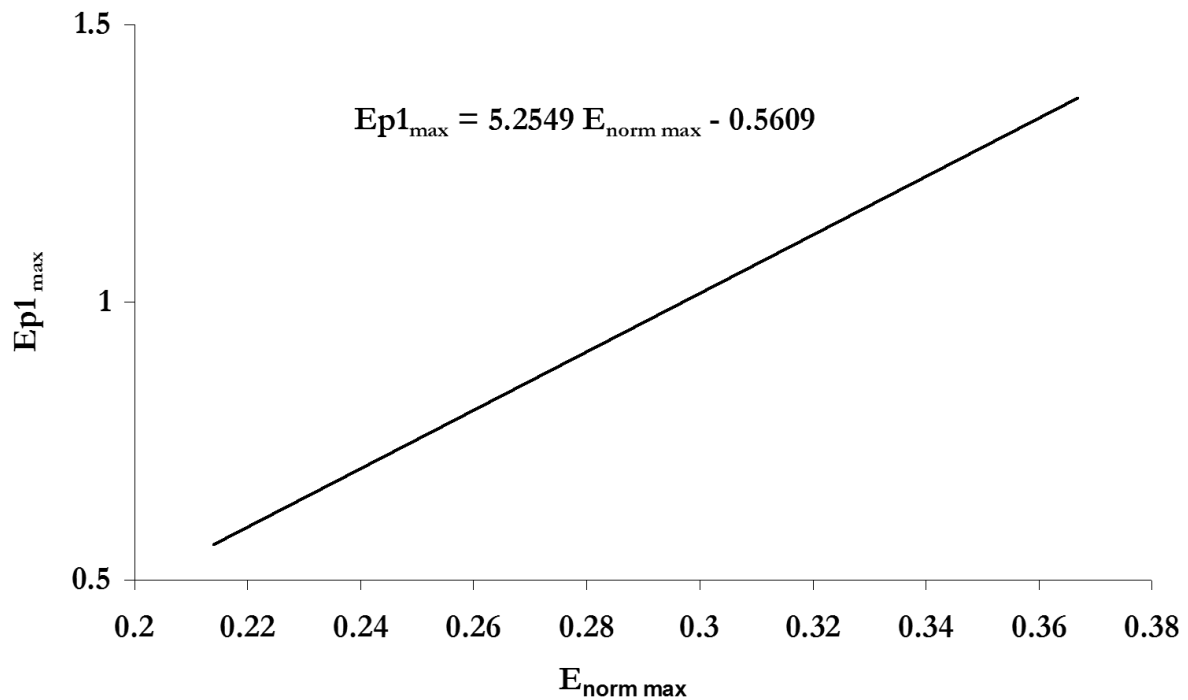


**Figure 4.51** – Schéma de l'éprouvette AE et du repère d'explicitation des déformations.

Les variables extraites du calcul de torsion sont la déformation principale maximale  $E_{p1_{\max}}$ , et les déformations 11, 22, 33, 12, 23 et 31.

La Fig 4.52 illustre la variation de la déformation principale maximale  $E_{p1_{\max}}$  avec la déformation normée maximale.

De même que précédemment, les relations qui relient les variables locales aux variables globales sont linéaires.



**Figure 4.52** – Essais de torsion sur 'AE' - Expression de la déformation principale maximale  $E_{p1}$ , calculée par éléments finis en fonction de la déformation normée maximale  $E_{norm \max}$

Les équations des droites tracées par régression linéaire sont alors :

$$\begin{aligned}E_{p1\max} &= 5.2549 E_{\text{norm max}} - 0.5609 \\E_{11\max} &= -0.0405 E_{\text{norm max}} - 0.003 \\E_{22\max} &= -0.1084 E_{\text{norm max}} + 0.0119 \\E_{33\max} &= 4.7394 E_{\text{norm max}} - 0.7098 \\E_{12\max} &= 0.0003 E_{\text{norm max}} + 5\text{E-}05 \\E_{23\max} &= 1.9379 E_{\text{norm max}} - 0.0244 \\E_{31\max} &= -0.0085 E_{\text{norm max}} + 0.0013 \\E_{11\min} &= E_{22\min} = 0 \\E_{33\min} &= 1.6668 - | E_{\text{norm min}} | - 0.0008 \\E_{23\min} &= 1.9502 E_{\text{norm min}} + 0.0126 \\E_{31\min} &= -0.0007 E_{\text{norm min}} - 0.0003 \\E_{12\min} &= 0.001 E_{\text{norm min}} + 3\text{E-}05\end{aligned}$$

Ces équations sont utilisées pour calculer les déformations en fond d'entaille dans le cas des éprouvettes qui n'ont pas été simulées par la méthode des éléments finis.

---

## ***Conclusion***

*Il existe une relation linéaire entre les déformations normées minimale et maximale, calculées à partir du chargement global, et les déformations locales maximales et minimales en fond d'entaille, calculées par éléments finis. La connaissance de chacune des variables locales de déformation pour tous les essais de fatigue effectués permettra de calculer les paramètres critiques d'endommagement en fatigue.*

---

## 4.4 – Synthèse des résultats

Le paragraphe 4.1 met en avant deux paramètres pertinents pour décrire la durée de vie du SBR A à l'amorçage d'une fissure : la déformation maximale et l'amplitude de déformation. Il s'agit désormais de généraliser ces paramètres en trois dimensions afin d'établir un critère de durée de vie valable sur une structure complexe.

Les paragraphes suivants s'attachent donc à la description des paramètres pertinents multiaxiaux pour décrire l'amorçage d'une fissure sur une structure. Ces paramètres vont déterminer le choix d'un diagramme de fatigue adapté à la description du comportement du matériau en endurance.

Finalement, et grâce à la synthèse des résultats sur le diagramme choisi, le critère de durée de vie peut être établi. Cette opération consiste à trouver une corrélation réaliste entre les paramètres mécaniques pertinents et le nombre de cycle à l'amorçage dans une structure. Le critère doit pouvoir être écrit sous la forme d'un post-processeur du code de calcul.

### 4.4.1 – Les paramètres mécaniques pertinents

La première synthèse des résultats, ainsi que l'observation de l'amorçage (orientation des fissures perpendiculaires à la déformation principale), nous a conduit à retenir deux paramètres mécaniques pertinents pour décrire l'amorçage d'une fissure en fatigue : la déformation maximale et l'amplitude de déformation. Ces tendances ont été établies à partir du calcul des déformations normées, fonctions linéaires du chargement global. Les éprouvettes sont assimilées à des cylindres en traction et en cisaillement. Dans le cas d'un chargement sur une structure complexe (éprouvettes entaillées), il faut généraliser ce critère unidimensionnel en un critère multiaxial.

#### Généralisation du critère de déformation maximale

La déformation maximale est descriptive de l'endommagement du matériau. Le critère unidimensionnel de déformation maximale peut être généralisé de façon naturelle, grâce à l'observation des mécanismes d'endommagement, en critère tridimensionnel de déformation principale maximale. Il correspond à la valeur principale maximale du tenseur de déformations de Green-Lagrange  $\mathbb{E}$  et est noté simplement  $E_{pmax}$ .

Dans le cas des plots, l'état de contrainte en fond d'entaille est uniaxial. La déformation principale maximale est donc égale à la déformation  $E_{22}$ .

Dans le cas des éprouvettes 'AE', la déformation principale maximale sur le nœud 11 – Fig. 4.51 - dépend essentiellement des deux composantes  $E_{33}$  et  $E_{23}$  du tenseur des déformations lagrangien  $\mathbb{E}$ .

#### Généralisation du critère d'amplitude de déformation

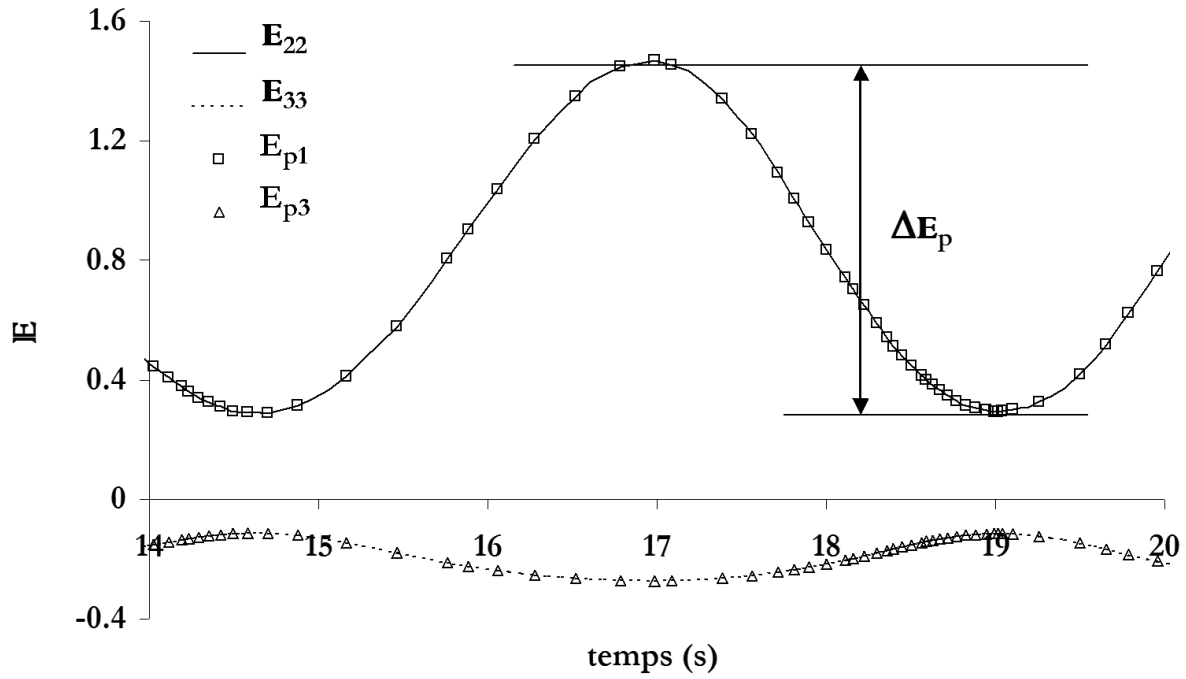
Le critère en amplitude de déformation est lié à la viscoélasticité du SBR. Ce critère généralisé en sollicitations multiaxiales peut alors être explicité en fonction de la différence des déformations principales.

Cependant, la norme utilisée pour l'expression des contraintes principales  $E_p$  est :

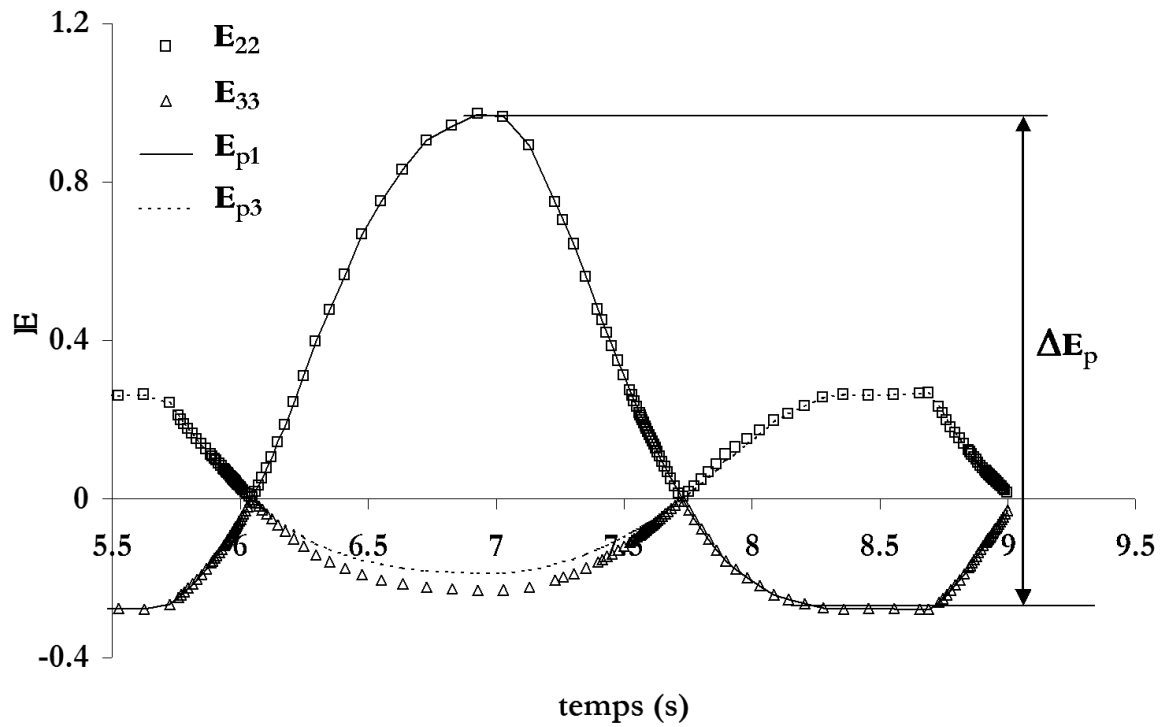
$$E_{p1} > E_{p2} > E_{p3}$$

Ainsi, une structure testée en traction/traction ou torsion positive/torsion positive verra son amplitude de déformation principale osciller entre  $E_{p1min}$  et  $E_{p1max}$ . La Fig. 4.53 illustre notre propos dans le cas d'un essai de traction sur plot. Notons que dans le cas de cet essai, la déformation principale  $E_{p1}$  est égale à la déformation  $E_{22}$ , et  $E_{p3}$  est égal à  $E_{33}$ .

Par contre, une structure testée en traction/compression, ou torsion positive/torsion négative verra son amplitude de déformation principale osciller entre  $E_{p1}$  et  $E_{p3}$ . - Fig. 4.54 -.



**Figure 4.53** – Essai de traction AP12 +5/+20 mm - Evolution des déformations de Green-Lagrange et des déformations principales au cours du 3<sup>ème</sup> cycle – Estimation de l'amplitude de déformation principale  $\Delta E_p = E_{p1max} - E_{p1min}$



**Figure 4.54** – Essai de traction/compression AP29 -10/+15 mm - Evolution des déformations de Green-Lagrange et des déformations principales au cours du 3<sup>ème</sup> cycle – Estimation de l'amplitude de déformation principale  $\Delta E_p = E_{p1max} - E_{p3min}$

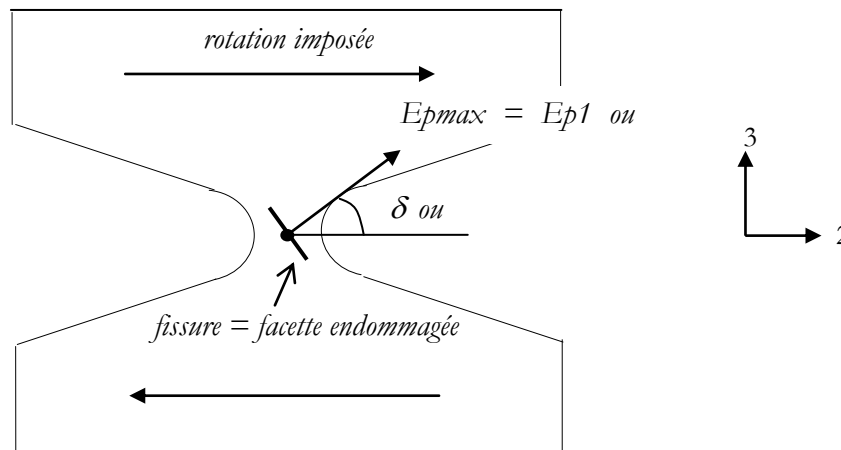
Il n'est donc pas aisé d'écrire un critère simple, utilisable dans un post-processeur, et permettant d'extraire du calcul par éléments finis l'amplitude de déformation principale, sans faire d'erreur sur la sélection de la déformation principale minimale réellement représentative du chargement.

Cette difficulté peut également être illustrée dans le cas d'un essai de torsion. La facette endommagée étant perpendiculaire au vecteur de déformation principale, on peut calculer les angles des vecteurs propres associés aux valeurs propres (valeurs principales) du tenseur des déformations – schéma de la Fig. 4.55 -. Appelons  $\delta$  l'angle du vecteur associé à la valeur principale maximale  $Ep_1$  par rapport à l'axe 2 et  $\delta'$  l'angle du vecteur associé à la valeur principale minimale  $Ep_3$ . Ces angles sont calculés à partir du dépouillement du calcul par éléments finis d'une 'AE' testée en torsion entre  $+35^\circ$  et  $-35^\circ$  - Fig. 4.56 -.

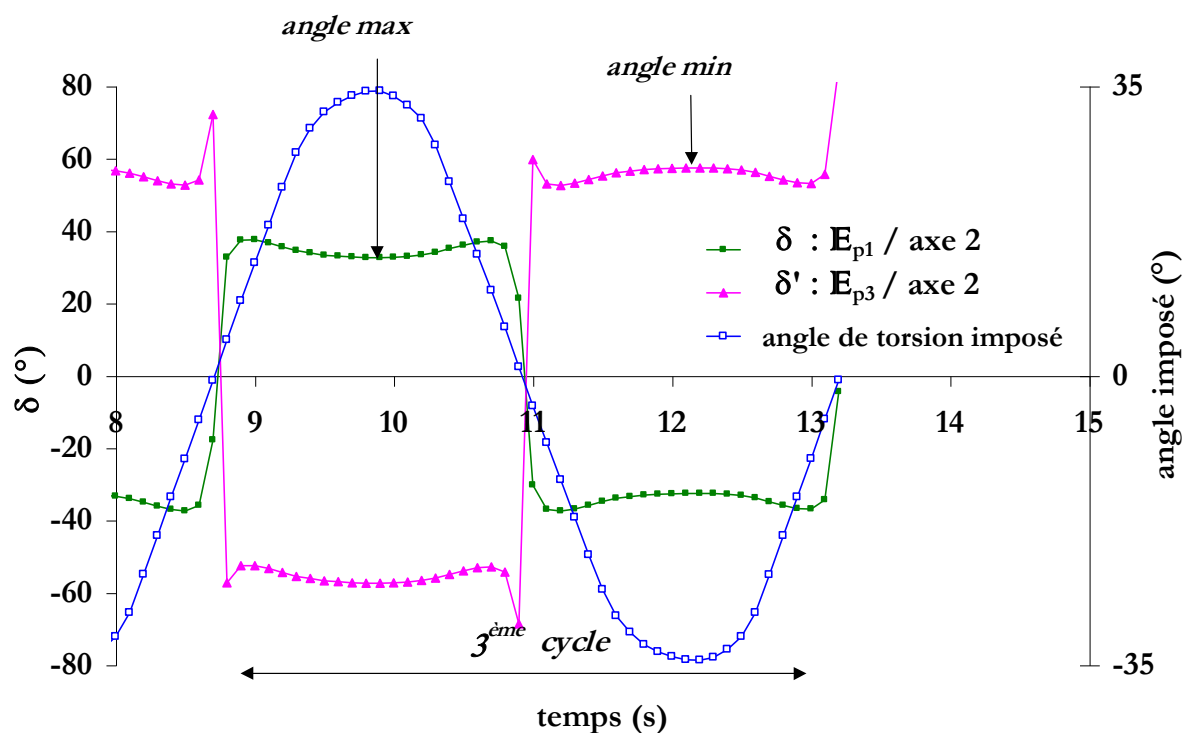
On constate que le maximum du cycle 'positif' (angle imposé  $= +35^\circ$ ) est correctement décrit par la valeur propre  $Ep_1$ . La facette du matériau la plus sollicitée, perpendiculaire au vecteur propre correspondant à  $Ep_1$ , apparaît alors orientée à  $45^\circ$  environ par rapport à l'axe 2. Lorsque l'angle de torsion imposé devient égal à  $-35^\circ$ , on constate que cette même facette est alors attachée à la valeur propre  $Ep_3$ . Ceci illustre le fait que la définition par classement des valeurs principales de déformation tend à annuler leur sens physique.

Si l'on assemble les courbes de  $Ep_1$  et  $Ep_3$  correspondant à la même facette de matériau et que l'on enlève les points de discontinuité, on constate que cette dernière oscille autour de  $45^\circ$  - Fig. 4.57 -.

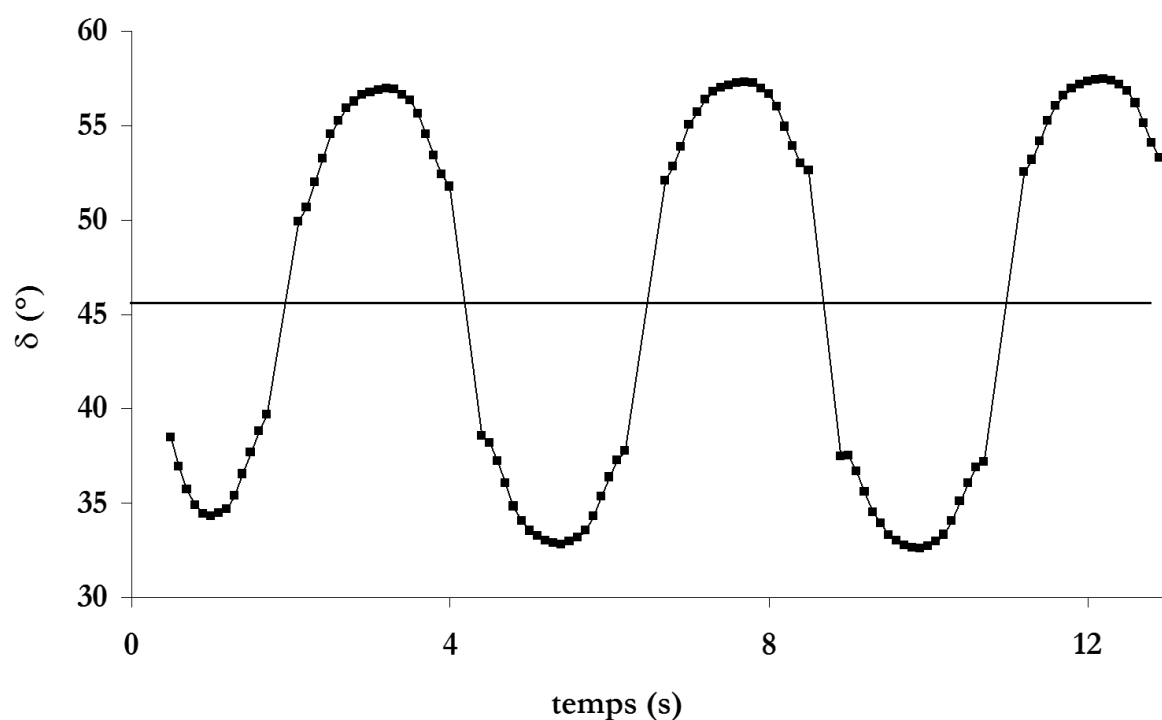
On peut noter que dans cet essai alterné symétrique, les mêmes remarques s'appliquent sur la facette orientée à  $-45^\circ$  par rapport à l'axe 2. D'ailleurs, expérimentalement, les fissures sont observées selon ces deux directions et se croisent.



**Figure 4.55** – Schéma de l'éprouvette AE testée en torsion - Orientation de la fissure qui correspond à la facette du matériau qui subit l'endommagement maximal - nœud 11



**Figure 4.56** – Essai de torsion AE14 -35/+35° - Evolution des angles  $\delta$  et  $\delta'$ , respectivement égaux aux angles entre les déformations principales  $E_{p1}$  et  $E_{p3}$  par rapport à l'axe 2 au cours du 3<sup>ème</sup> cycle



**Figure 4.57** – Essai de torsion AE14 -35/+35° - Evolution de l'angle entre la déformation principale attachée à la facette du matériau qui s'endommage, c'est à dire perpendiculaire à la fissure, et la direction n°2

En conclusion, il ne nous paraît pas satisfaisant de soustraire deux vecteurs qui n'ont pas la même direction. Le second invariant du tenseur des déformations  $\mathbb{E}$ , écrit  $\mathbb{E}_{II}$  a alors retenu notre attention. Sa définition mathématique est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{II} &= \frac{1}{2} ((\text{tr}(\mathbb{E}))^2 - \text{tr}(\mathbb{E}^2)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}_{ii}^2 - \mathbb{E}_{ij} \mathbb{E}_{ij}) \quad , \quad \text{en notation d'Einstein}\end{aligned}\quad (172)$$

$\text{tr}(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_I$  est la trace du tenseur  $\mathbb{E}$ .

Comme  $\text{tr}(\mathbb{E})$  est le premier invariant, la deuxième partie de l'égalité est également un invariant, noté  $\mathbb{E}_{II}$ .

$$\mathbb{E}_{II}'' = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{ij} \mathbb{E}_{ij} \quad (173)$$

Par comparaison avec la définition de la déformation inélastique au sens de Mises, nous décidons d'utiliser la racine de l'invariant  $\mathbb{E}_{II}$ .

$$\mathbb{E}_{II}' = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbb{E}_{ij} \mathbb{E}_{ij}} \quad (174)$$

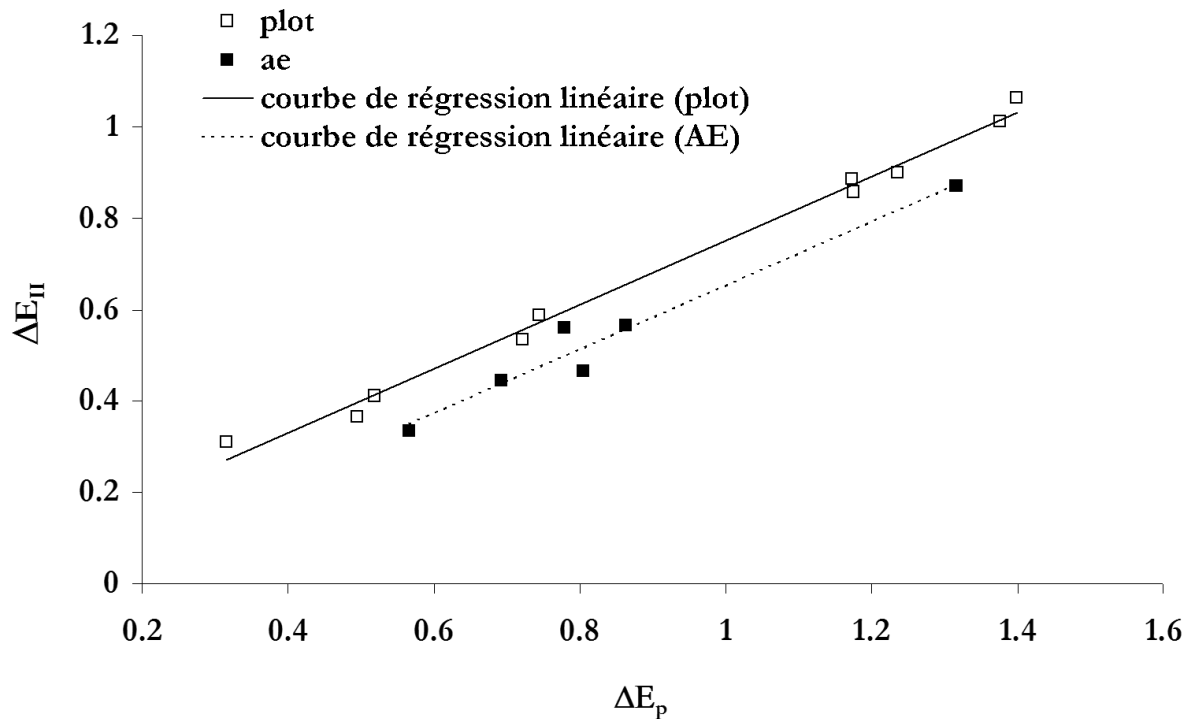
Afin de faire intervenir l'amplitude des déformations, le second invariant est calculé à partir de l'amplitude des déformations. Il est noté  $\Delta\mathbb{E}_{II}$  pour des raisons de commodité :

$$\Delta\mathbb{E}_{II} = \sqrt{\frac{1}{2} (\Delta\mathbb{E}_{11} \cdot \Delta\mathbb{E}_{11} + \Delta\mathbb{E}_{22} \cdot \Delta\mathbb{E}_{22} + \Delta\mathbb{E}_{33} \cdot \Delta\mathbb{E}_{33} + \Delta\mathbb{E}_{12} \cdot \Delta\mathbb{E}_{12} + \Delta\mathbb{E}_{23} \cdot \Delta\mathbb{E}_{23} + \Delta\mathbb{E}_{31} \cdot \Delta\mathbb{E}_{31})}$$

La valeur  $\Delta\mathbb{E}_{xx}$  est l'amplitude de la déformation  $\mathbb{E}_{xx}$  ayant lieu au cours du troisième cycle.

Cet invariant  $\Delta\mathbb{E}_{II}$  est tracé en fonction de l'amplitude de déformation principale calculée à partir de plusieurs calculs d'éprouvettes 'plots' testées en traction/traction ou traction/compression et d'éprouvettes 'AE' testées en torsion/torsion. Les amplitudes sont relevées manuellement (le choix de  $E_{p1}$  ou  $E_{p3}$  est donc fait par l'opérateur). On constate que, dans le cadre de nos essais, le second invariant de l'amplitude des déformations  $\Delta\mathbb{E}_{II}$  varie linéairement avec l'amplitude des déformations principales - Fig. 4.58 -.

Ceci nous conforte dans notre choix du second invariant. Cette grandeur peut alors être calculée directement sur un post-processeur, à la suite du calcul par éléments finis.



**Figure 4.58** – Essai de fatigue sur éprouvettes 'plot' et 'AE' testées en traction-compression et torsion - Evolution du second invariant du tenseur amplitude des déformations avec l'amplitude des déformations principales attachées à la même 'facette' du matériau

Les paramètres mécaniques généralisés au cas mutiaxial sont donc :

- ⎧ la déformation principale maximale notée  $E_{pmax}$
- ⎧ le second invariant du tenseur amplitude des déformations noté  $\Delta E_{II}$ .

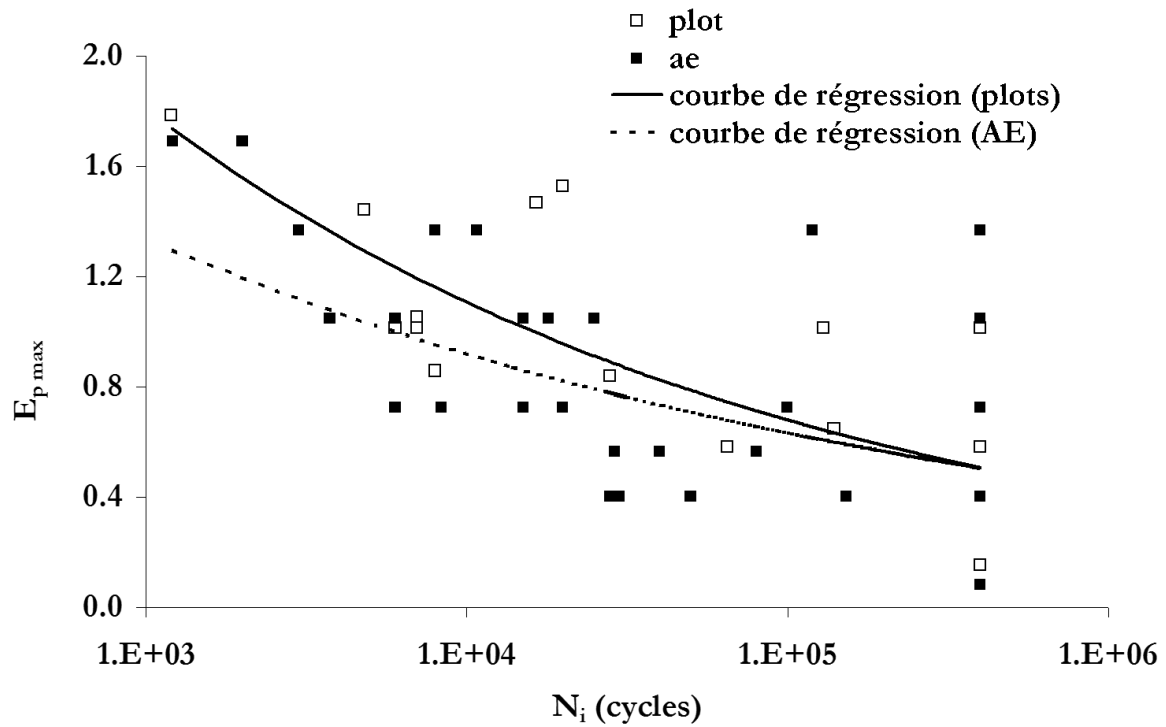
### Pertinence des paramètres généralisés en conditions multiaxiales

Les courbes exprimant le nombre de cycles à l'amorçage d'une fissure  $N_i$  en fonction de la déformation principale maximale et du second invariant du tenseur amplitude des déformations peuvent alors être tracées en considérant les variables locales issues du calcul par éléments finis - Fig. 4.59 et 4.60 -.

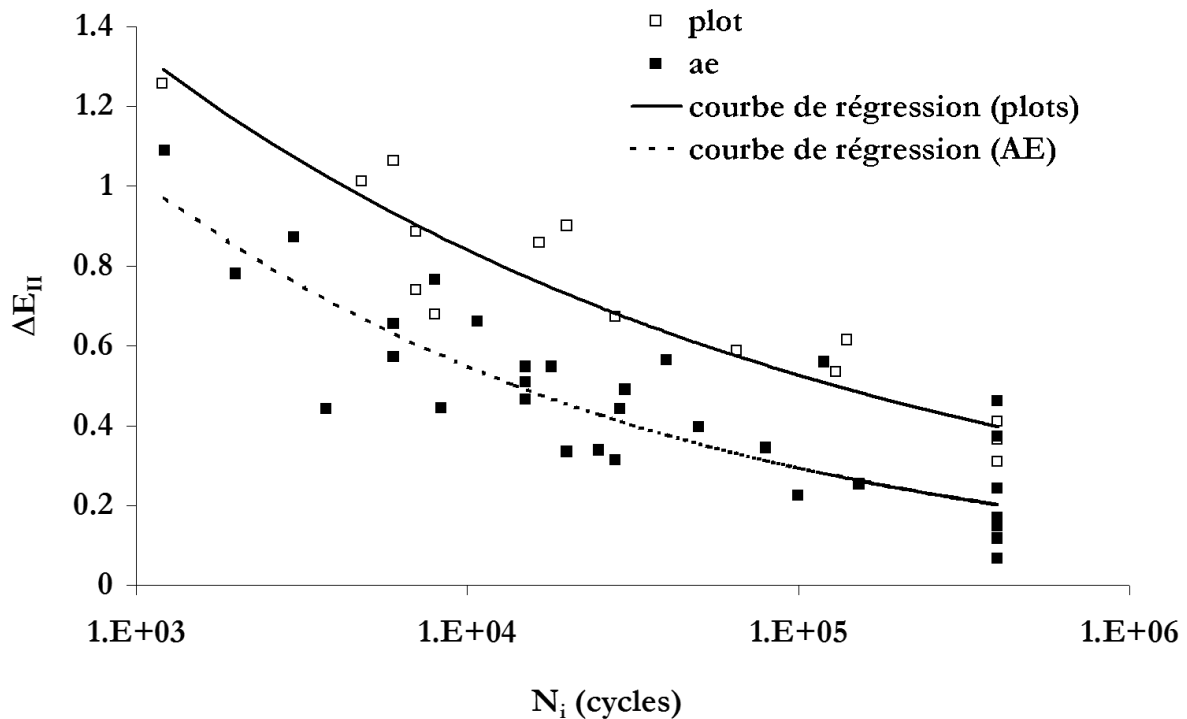
On constate que les courbes ne sont pas superposées, bien que ces variables locales soient représentatives du matériau uniquement et s'affranchissent de l'influence de la géométrie de la structure (contrairement au cas des Fig. 4.13 et 4.14, qui utilisait les déformations normées). On suppose alors que cette différence ne provient pas du mauvais choix des paramètres mais plutôt de la plus grande criticité des défauts de surface des éprouvettes 'AE' par rapport à ceux des plots. Nous avons en effet observé que les éprouvettes 'AE' amorçaient toujours sur le même joint 'protubérant'.

Le critère sera donc établi à partir des résultats obtenus sur ces éprouvettes 'AE' et sera sécurisant sur les éprouvettes 'plots'.





**Figure 4.59** – Synthèse des essais sur éprouvettes ‘plot’ et sur ‘AE’ – Mise en évidence de la déformation principale maximale comme paramètre pertinent pour décrire la durée de vie à l’amorçage d’une fissure



**Figure 4.60** – Synthèse des essais sur éprouvettes ‘plot’ et sur ‘AE’ – Mise en évidence du second invariant calculée à partir des amplitudes des déformations comme paramètre pertinent pour décrire la durée de vie à l’amorçage d’une fissure

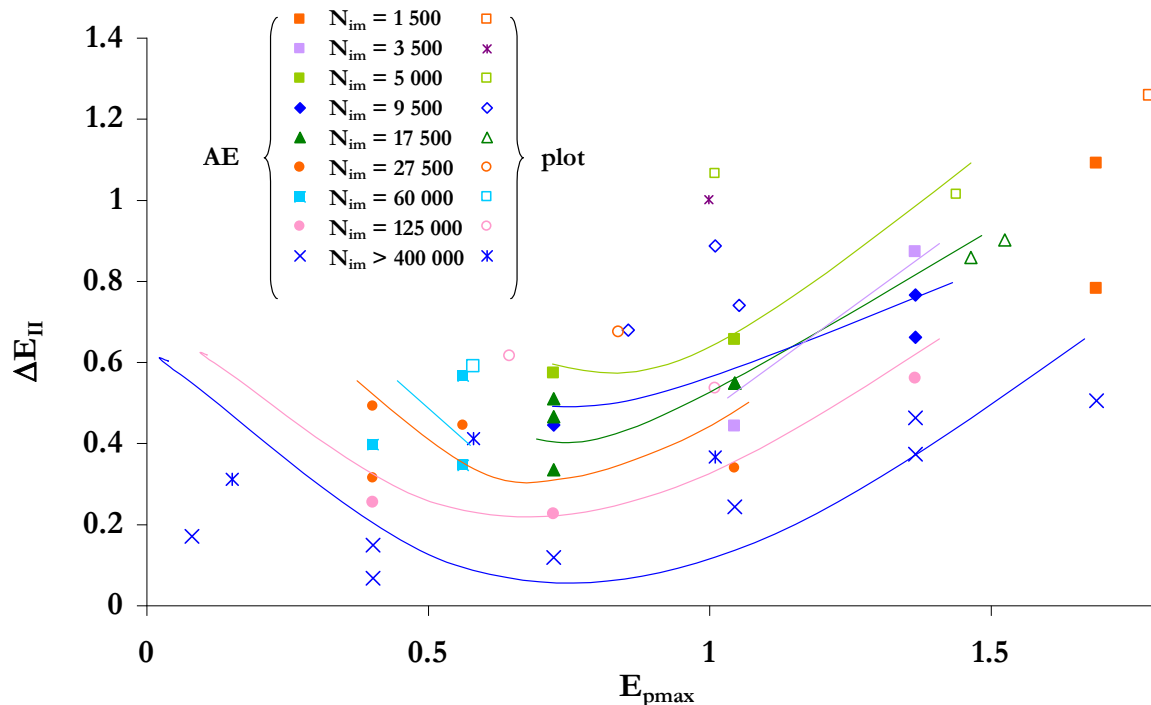
#### 4.4.2 –Diagramme de fatigue

Nous choisissons donc de construire un diagramme à partir des deux paramètres pertinents généralisés en conditions de sollicitation multiaxiale :  $E_{pmax}$ , déformation principale maximale et  $\Delta E_{II}$ , second invariant du tenseur amplitude des déformations.

Les essais de traction-compression sur éprouvettes 'plots' et de torsion sur éprouvettes 'AE' sont alors triés selon la fourchette de nombre de cycles à laquelle ils appartiennent. On choisit 9 fourchettes, et on détermine le nombre moyen de cycles à l'amorçage  $N_{imoyen}$  en leur milieu :

1 000/2 000	$N_{imoyen} = 1\,500$
3 000/4 000	$N_{imoyen} = 3\,500$
4 000 / 6 000	$N_{imoyen} = 5\,000$
8 000/11 000	$N_{imoyen} = 9\,500$
15 000/20 000	$N_{imoyen} = 17\,500$
25 000/30 000	$N_{imoyen} = 27\,500$
40 000/80 000	$N_{imoyen} = 60\,000$
100 000/150 000	$N_{imoyen} = 125\,000$
>400 000	$N_{imoyen} = 400\,000$

Chaque essai est alors placé sur le diagramme, selon le couple de paramètres ( $E_{pmax}$ ,  $\Delta E_{II}$ ) qui le caractérise. Les points de même durée de vie sont ensuite reliés. Les courbes ainsi obtenues sont appelées isodurées de vie - Fig. 4.61 -.



**Figure 4.61** – Synthèse des essais d'endurance sur éprouvettes 'plot' et 'AE' – Tracé 'manuel' des isodurées de vie dans un diagramme ( $\Delta E_{II}$ ,  $E_{pmax}$ )

On constate d'une part que les points relatifs aux plots sont au dessus de ceux des AE. Comme nous l'avons déjà dit, cette dispersion provient certainement des défauts de surface importants sur les 'AE' (dus au joint 'protubérant'). Les essais sur plots ne seront donc pas pris en compte pour établir le critère de durée de vie. Ce dernier, établi à partir des essais sur 'AE' sera considéré comme sécurisant sur les 'plots'.

On constate d'autre part que les courbes sont en forme de parabole. Nous pouvons en déduire l'influence de chacun des deux paramètres  $E_{pmax}$  et  $\Delta E_{II}$ .

### Influence du second invariant de l'amplitude des déformations $\Delta E_{II}$ .

Lorsque l'on se déplace sur le diagramme à déformation principale maximale constante, on constate que l'augmentation de l'amplitude conduit à une diminution de la durée de vie. Cet effet est couramment observé dans les matériaux en général [Rémy, 1996].

Ceci provient de la composante dissipative (viscoélastique, viscoplastique et plastique) du comportement du SBR. Plus l'amplitude de déformation est importante, plus la dissipation augmente et plus l'endommagement est 'nourri'. En effet, dans la cas d'un élastomère chargé, l'augmentation de l'amplitude de déformation conduit à une augmentation des mouvements de chaînes par rapport à elles-mêmes, par rapport aux charges et les mouvements entre charges. Ceci contribue à l'accumulation de l'endommagement au sein du matériau.

[Blanc, 1987] a montré que seule une partie de la puissance était dissipée en chaleur. L'autre partie serait absorbée par des transformations physico-chimiques, conduisant à des endommagements de fatigue [Berardi, 1995].

### Influence de la déformation principale maximale.

Lorsque l'on se déplace à amplitude constante en augmentant la déformation maximale, la durée de vie diminue puis augmente.

La tendance de la première partie de la courbe est donc :

$$E_{pmax} \nearrow \Longrightarrow Ni \searrow$$

Ce résultat est également couramment observé dans les matériaux en général.

Dans la cas de l'élastomère SBR chargé de silice, l'augmentation de la déformation principale maximale conduit à l'augmentation de l'endommagement au sein du matériau.

Le paragraphe 2.4.3 illustre les trois types d'endommagement dus aux charges de silice pour un chargement monotone :

- Cavitation par décohésion aux pôles des agrégats de silice ( $\varnothing \approx 1 \mu m$ ). Ce phénomène est lié à la mauvaise adhésion de la matrice sur les charges de silice.
- Cavitation au sein de l'agglomérat de silice ( $\varnothing \approx 30 \mu m$ ) et fissure initiée par rupture de l'agglomérat. Ce dernier est composé d'agrégats et de gomme occluse. Les agrégats étant rigides, la gomme occluse doit accommoder la déformation globale. Ces chaînes courtes et 'sur-sollicitées' rompent ou se désorbent de la surface des charges.

Notons que ces deux types d'endommagement se produisent dès les faibles elongations.

- Cavitation dans la matrice aux pôles des agglomérats de noir de carbone. Ces charges présentent une très bonne adhésion avec la matrice.

Ce dernier phénomène a lieu aux elongations importantes.

Dans les deux premiers cas, on imagine que l'endommagement est essentiellement lié à la plus grande déformation principale. Dans le troisième cas, la pression hydrostatique joue un effet [Ball, 1982].

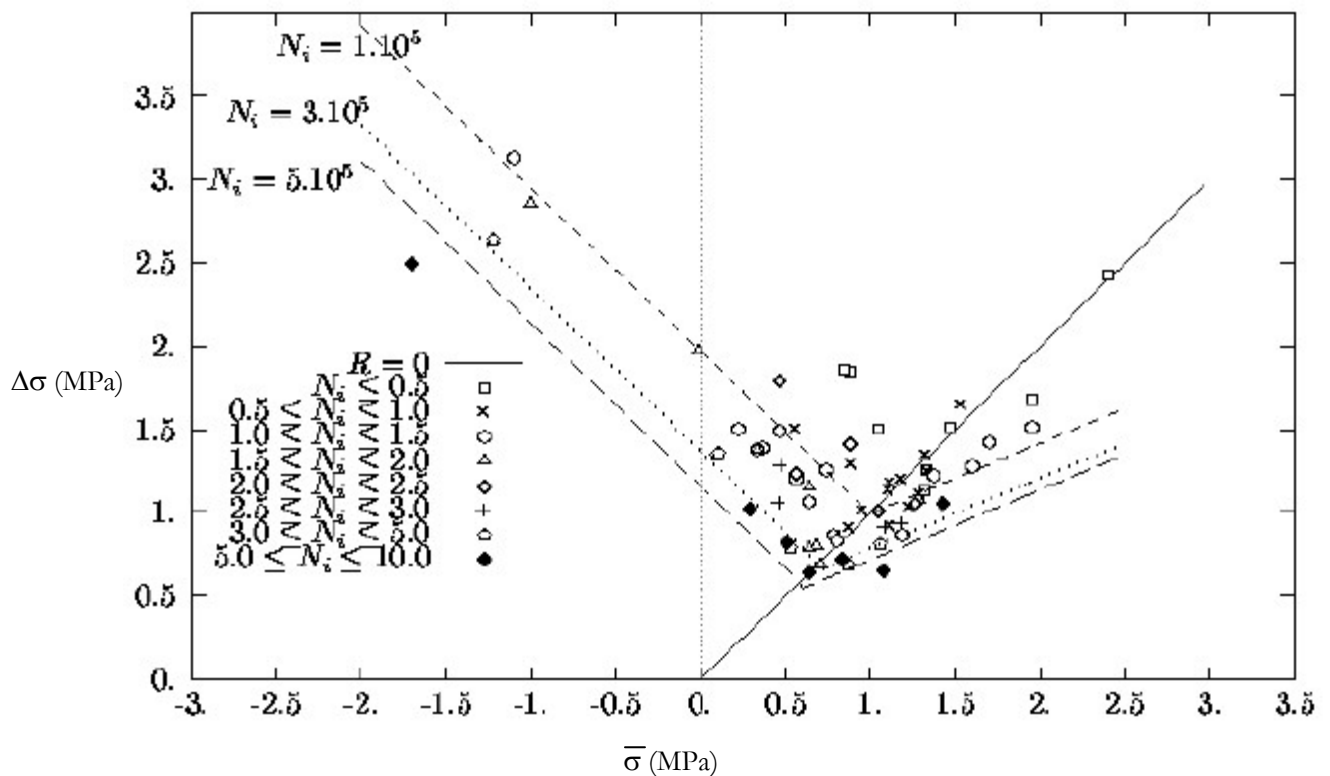
Cependant, aux elongations atteintes lors des essais de fatigue, seul l'endommagement autour des charges de silice est critique. Ainsi, le critère de déformation principale apparaît justifié.

Sur la deuxième partie de la courbe, la tendance est :

$$E_{p_{\max}} \nearrow \Rightarrow \text{Ni} \nearrow$$

Il se produit donc un renforcement (léger) dans le SBR chargé de silice.

[André, 1997], dans sa thèse sur l'amorçage de fissures en fatigue sur du caoutchouc naturel, présente des conclusions similaires. Il utilise un diagramme de Haigh, qui présente en abscisse la contrainte moyenne et en ordonnée l'amplitude de contrainte. Il note que l'augmentation de l'amplitude conduit toujours à la diminution de la durée de vie. L'influence de la contrainte moyenne dépend par contre du rapport de charge  $R$ . Si le rapport est négatif, l'effet de la contrainte moyenne est classique : son augmentation conduit à la diminution du nombre de cycles à l'amorçage. S'il est positif, la contrainte moyenne a un effet renforçant – figure 4.62 –



**Figure 4.62** – Caoutchouc NR – Diagramme de Haigh dans le cas d'un chargement uniaxial - Amplitude de contrainte et contrainte moyenne - [André, 1998], [Saintier, 1999]

Etant donné que ce caoutchouc présente un comportement hyperélastique peu dissipatif, il existe une relation bi-univoque entre la déformation et la contrainte. Les conclusions de N. André seraient donc identiques si ces paramètres avaient été exprimés en déformation. Cependant, dans le cas du caoutchouc

naturel, l'effet renforçant de la contrainte moyenne est lié à la cristallisation du caoutchouc sous contrainte. [Cadwell, 1940] a également mis en évidence cet effet.

Dans le cas du SBR, aucune cristallisation n'est possible. Toutefois, un renforcement dû à l'alignement des chaînes peut avoir lieu. Ceci est visible sur la courbe de traction uniaxiale (Fig. 2.14).

[Andrews, 1963] montre que la concentration de contrainte en pointe de fissure est moins importante dans un matériau dissipatif : le profil de contraintes est donc écrêté suite à la redistribution des contraintes et des déformations. La propagation de l'endommagement initié sur les charges de silice, à l'échelle du micron, est donc réduite dans le SBR (matériau viscoélastique et viscoplastique), suite à la relaxation des contraintes sur les bords de la cavité.

Enfin, des travaux effectués sur des matériaux dont la matrice a un comportement plastique et contenant des particules de seconde phase, montrent que l'allongement de la cavité diminue son rôle d'amorçage de fissure [Benzerga et al., 1999]. En effet, l'anisotropie de l'endommagement conduit à l'allongement des cavités dans la direction de sollicitation principale si le taux de triaxialité est suffisamment faible. Ceci a pour effet de diminuer leur 'criticité'.

### Autres pistes

Si le même raisonnement est tenu avec un critère utilisant le couple résultant sur les AE, on constate que lorsque le rapport de charge  $R$  est négatif, l'augmentation de la valeur maximale du chargement (angle imposé) conduit à la diminution de la durée de vie. Par contre, lorsque le rapport est positif, l'augmentation de la valeur maximale du chargement conduit à une augmentation de la durée de vie - Fig. 4.63 -. De ce fait, un critère utilisant les contraintes et mettant en avant le rôle du rapport  $R$  aurait pu être judicieux. Cependant, la contrainte n'est stabilisée, dans le meilleur des cas, qu'après 1 000 cycles, et ne se stabilise pas dans un grand nombre de cas. La difficulté consiste donc d'une part à choisir le numéro du cycle sur lequel on relève la contrainte et son amplitude, et d'autre part à calculer tous ces cycles avec une loi permettant de simuler la relaxation importante des contraintes sur un temps long.

Pour toutes ces raisons, les paramètres sont exprimés à partir du tenseur des déformations.

n°essai	$\alpha_{\min}$	$\alpha_{\max}$	$\Delta\alpha$	$N_i$	$E_{p\max}$	$\Delta E_{II}$	$C_{\min(N=1\,000)}$	$C_{\max(N=1\,000)}$	$\Delta C$	$R$	% $E_{\text{dissipée}}/E_{\text{fournie}}$
AE42	-20	30	50	50 000	0.403	0.396	-0.186	0.243	0.429	-0.765	28.5
AE11	10	40	30	20 000	0.724	0.334	-0.034	0.253	0.287	-0.134	34.5
AE20	30	50	20	25 000	1.046	0.338	0.053	0.26	0.207	0.2038	35.6
AE26	50	60	10	>300 000	1.367	0.372	0.143	0.3	0.157	0.4767	32.2

**Figure 4.63** –Essais d'endurance sur éprouvettes 'AE' – Expression des couples minimaux et maximaux, du rapport  $R$  et du pourcentage d'énergie dissipée par rapport à l'énergie fournie.

Le tableau de la Fig. 4.63 donne également les valeurs d'énergie dissipée au 1000<sup>ème</sup> cycle par rapport à l'énergie fournie lors de la montée en charge de ce cycle. On constate que le nombre de cycles à l'amorçage diminue lorsque le pourcentage d'énergie dissipée augmente. Un critère en énergie utilisant l'énergie dissipée pourrait alors être envisagé. Cependant, comme précédemment, il est nécessaire de choisir le numéro du cycle sur lequel est relevée cette dissipation. Une variable de cumul d'endommagement, liée à l'énergie dissipée, aurait également pu être utilisée. Cependant, la dissipation d'énergie évolue au cours des cycles. Son calcul incrémental devrait alors être fait sur des milliers de cycles. D'autre part, la dissipation, importante sous un chargement de compression, contribue peu à l'endommagement.

## Tracé du diagramme – Estimation des isodurées de vie

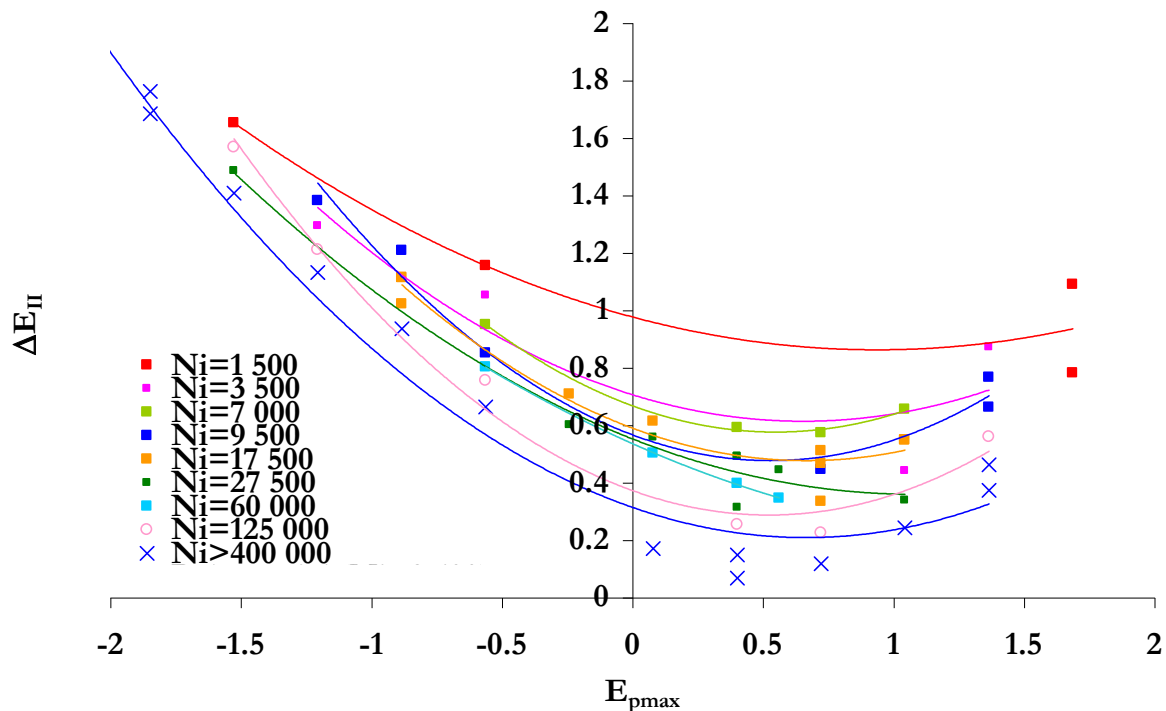
Le diagramme ( $E_{pmax}$ ,  $\Delta E_{II}$ ) est donc finalement retenu. Seul les essais de torsion y figurent. Nous avons vu en effet que les essais sur plot présentaient, aux mêmes déformations locales, des durées de vie supérieures à celles obtenues sur les 'AE'.

Les essais de torsion sont placés sur le diagramme et sont dédoublés : les éprouvettes 'AE' étant symétriques par rapport à l'axe de torsion, le chargement l'est également. Ainsi, les essais de conditions limites  $\alpha_{min}/\alpha_{max}$  sont dédoublés par les essais  $-\alpha_{max}/-\alpha_{min}$ .

Les essais qui présentent la même durée de vie moyenne servent alors à extrapoler une courbe polynomiale du second ordre, en utilisant la méthode des moindres carrés – Fig. 4.64 -. L'astuce qui consiste à doubler le nombre d'essais permet donc d'affiner les tracés des courbes.

Les équations obtenues sont, pour chacun des intervalles de nombre de cycles à l'amorçage:

1 000/2 000	$N_{imoyen} = 1\,500$	$\Delta E_{II} = 0.130 E_{pmax}^2 - 0.244 E_{pmax} + 0.976$
3 000/4 000	$N_{imoyen} = 3\,500$	$\Delta E_{II} = 0.215 E_{pmax}^2 - 0.282 E_{pmax} + 0.705$
4 000 / 6 000	$N_{imoyen} = 5\,000$	$\Delta E_{II} = 0.304 E_{pmax}^2 - 0.334 E_{pmax} + 0.667$
8 000/11 000	$N_{imoyen} = 9\,500$	$\Delta E_{II} = 0.321 E_{pmax}^2 - 0.341 E_{pmax} + 0.566$
15 000/20 000	$N_{imoyen} = 17\,500$	$\Delta E_{II} = 0.255 E_{pmax}^2 - 0.340 E_{pmax} + 0.589$
25 000/30 000	$N_{imoyen} = 27\,500$	$\Delta E_{II} = 0.165 E_{pmax}^2 - 0.357 E_{pmax} + 0.552$
40 000/80 000	$N_{imoyen} = 60\,000$	$\Delta E_{II} = 0.122 E_{pmax}^2 - 0.405 E_{pmax} + 0.535$
100 000/150 000	$N_{imoyen} = 125\,000$	$\Delta E_{II} = 0.312 E_{pmax}^2 - 0.327 E_{pmax} + 0.372$
>400 000	$N_{imoyen} = 400\,000$	$\Delta E_{II} = 0.238 E_{pmax}^2 - 0.317 E_{pmax} + 0.313$



**Figure 4.64** – Synthèse des essais d'endurance sur éprouvettes 'AE' – Tracé des isodurées de vie dans un diagramme ( $\Delta E_{II}$ ,  $E_{pmax}$ ) par régression d'une courbe polynomiale

### 4.4.3 – Modélisation du critère de durée de vie

Ce paragraphe présente la démarche que nous avons mise en place pour exprimer le critère de durée de vie, c'est à dire trouver une corrélation entre les deux paramètres mécaniques pertinents et la durée de vie à l'amorçage d'une fissure. La démarche consiste à :

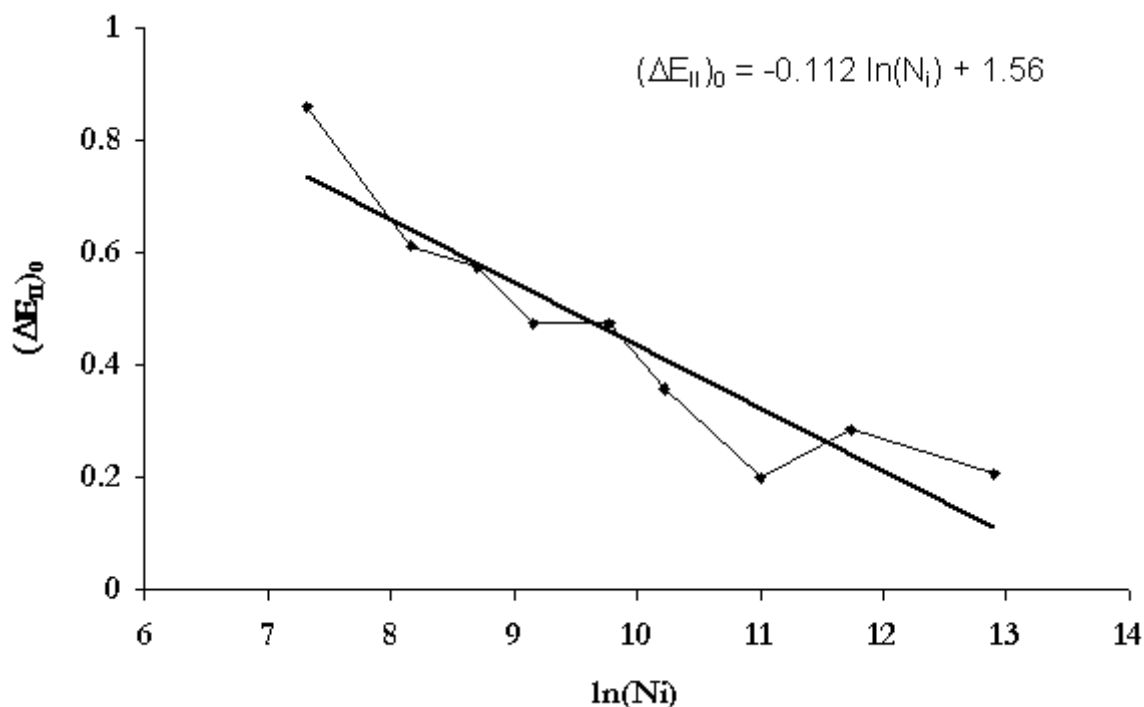
- établir une corrélation entre les paraboles d'isodurée de vie
- choisir une parabole de référence : équation reliant  $E_{p\max}$  et  $\Delta E_{II}$  pour  $N_i$  fixé
- établir en fonction des deux équations précédentes, la corrélation entre  $N_i$ ,  $E_{p\max}$  et  $\Delta E_{II}$

On constate sur la Fig. 4.64 que les isodurées de vie sont, aux erreurs et dispersion près, les mêmes courbes décalées selon l'ordonnée vers les amplitudes de déformation  $\Delta E_{II}$  croissantes lorsque la durée de vie diminue.

On calcule alors, d'après les équations des paraboles correspondant aux isodurées de vie, les valeurs des seconds invariants du tenseur amplitude de déformation  $(\Delta E_{II})_0$  pour lesquelles la dérivée des équations des isodurées de vie est nulle :

$$\Delta E_{II} = a E_{p\max}^2 + b E_{p\max} + c \implies \frac{\partial \Delta E_{II}}{\partial E_{p\max}} = 2a E_{p\max} + b = 0 \implies (\Delta E_{II})_0$$

On constate alors qu'il existe une relation linéaire entre la valeur du second invariant du tenseur amplitude de déformation  $(\Delta E_{II})_0$  sommet de la parabole et le logarithme du nombre moyen de cycles à l'amorçage  $N_{imoyen}$  – Fig. 4.65 –.



**Figure 4.65** – Evolution de la valeur  $(\Delta E_{II})_0$  au sommet de la parabole en fonction du nombre de cycles à l'amorçage

L'équation de la droite de régression est :

$$(\Delta E_{II})_0 = -0.112 \ln(N_{\text{imoyen}}) + 1.56$$

Les paraboles des isodurées de vie peuvent être déduites de l'une des équations de paraboles et de l'équation ci-dessus. Ceci ne prend pas en compte le décalage de la valeur de  $E_{p\max}$  aux sommets des paraboles avec le nombre de cycles à l'amorçage.

On choisit alors la parabole de référence correspondant au nombre de cycles moyen  $N_{\text{imoyen}} = 9\,500$  :

$$(\Delta E_{II})_{N_i=9\,500} = 0.321 E_{p\max}^2 - 0.341 E_{p\max} + 0.566$$

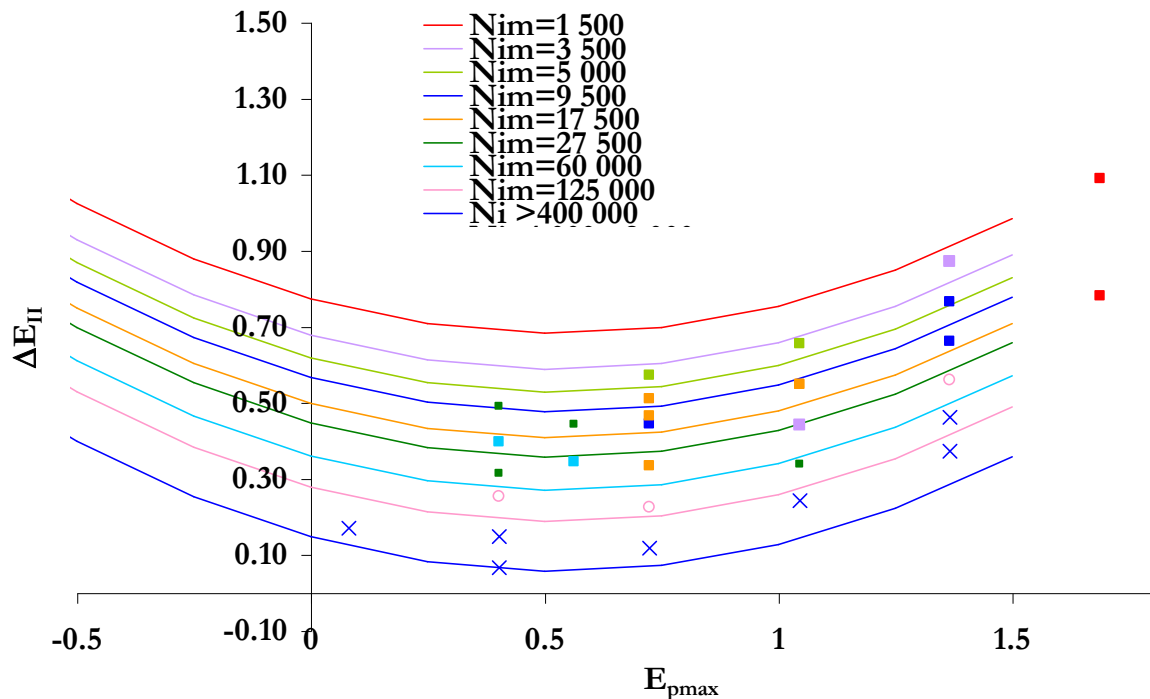
Par rapport à cette référence, le décalage (ou l'espacement) selon l'ordonnée entre une parabole quelconque et la parabole de référence  $(\Delta E_{II})_{N_i=9\,500}$  s'écrit en fonction du nombre de cycles à l'amorçage :

$$\begin{aligned} \Delta[\Delta E_{II}] &= (\Delta E_{II})_{N_i} - (\Delta E_{II})_{N_i=9\,500} \\ \Delta[\Delta E_{II}] &= -0.112 \ln(N_i) + 1.56 - [0.112 \ln(9\,500) + 1.56] \\ \Delta[\Delta E_{II}] &= -0.112 \ln(N_i/9\,500) \end{aligned}$$

L'équation de la parabole en fonction du nombre de cycles moyen à l'amorçage  $N_i$  et de la déformation maximale est alors :

$$\Delta E_{II} = 0.321 E_{p\max}^2 - 0.341 E_{p\max} + 0.566 - 0.112 \ln(N_i/9\,500)$$

La Fig. 4.66 trace les courbes résultantes de cette équation et superpose les points expérimentaux.



**Figure 4.66** – Essai d'endurance sur éprouvettes 'AE' en torsion – Tracés des isodurées de vie selon le critère établi et superposition des points expérimentaux

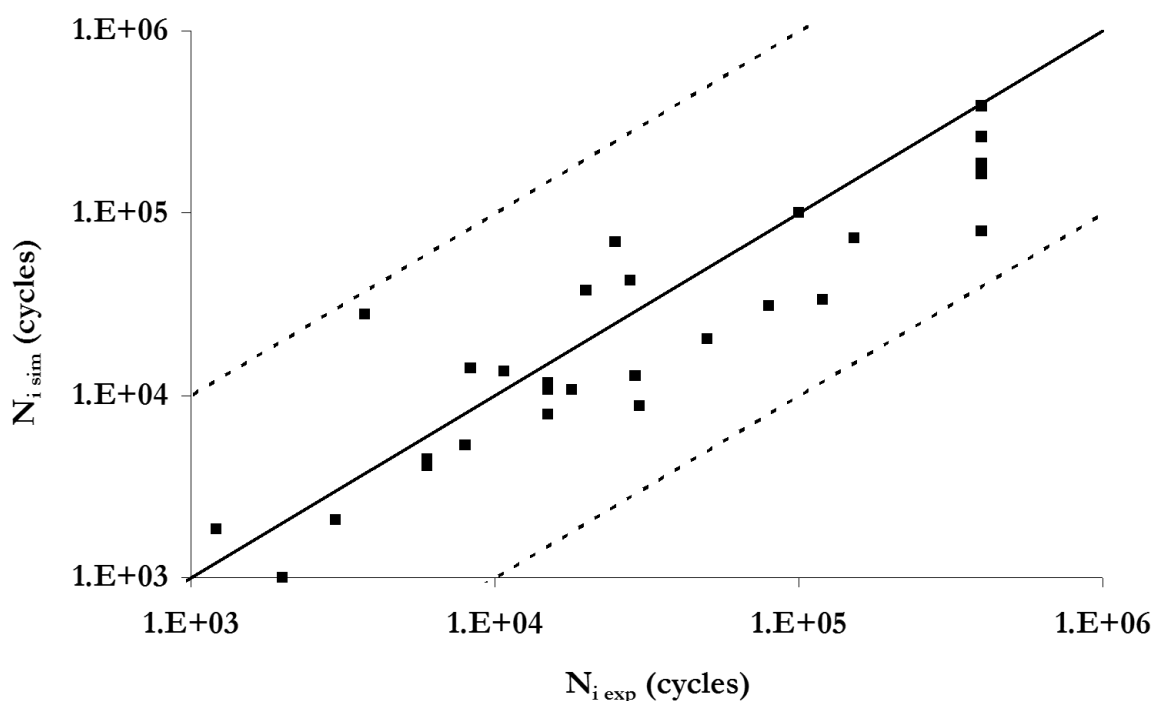


On déduit de cette équation le nombre de cycles à l'amorçage  $N_i$  en fonction du second invariant de l'amplitude des déformations et de la déformation maximale

$$N_i = 9\,500 \cdot \exp\left[\frac{-\Delta E_{II} + 0.321E_{p\max}^2 - 0.341E_{p\max} + 0.566}{0.112}\right]$$

On constate sur la Fig. 4.66 que les isodurées de vie représentent correctement les points expérimentaux.

Le graphe de la Fig. 4.67 compare les durées de vie simulées ( $N_{i\text{ sim}}$ ) aux durées de vie expérimentales ( $N_{i\text{ exp}}$ ). La courbe en trait plein, bissectrice, représente le cas idéal. Les deux courbes pointillées représentent l'enveloppe de la bande de dispersion, de largeur deux décades. On constate que le nuage de points se situe entre ces deux courbes limites, autour de la droite de pente 1.

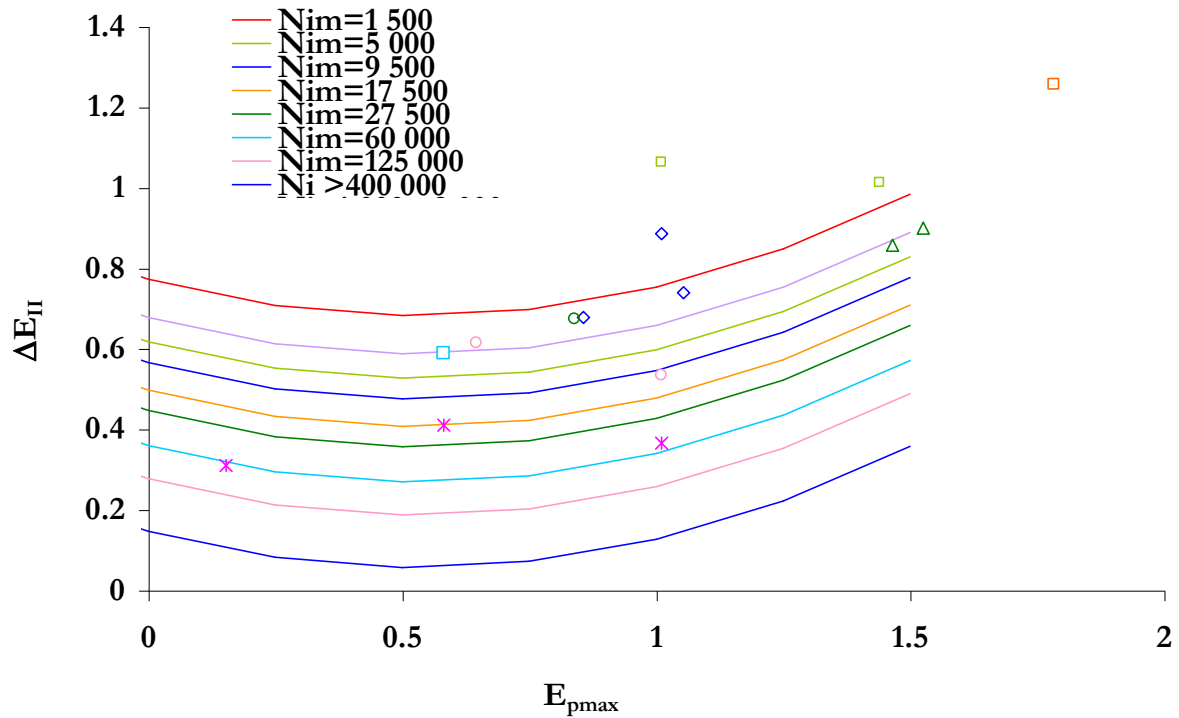


**Figure 4.67** – AE – Comparaison entre le nombre de cycles à l'amorçage simulé  $N_{i\text{ sim}}$  et le nombre de cycles expérimental  $N_{i\text{ exp}}$  - Enveloppe de la bande de dispersion

## Plots

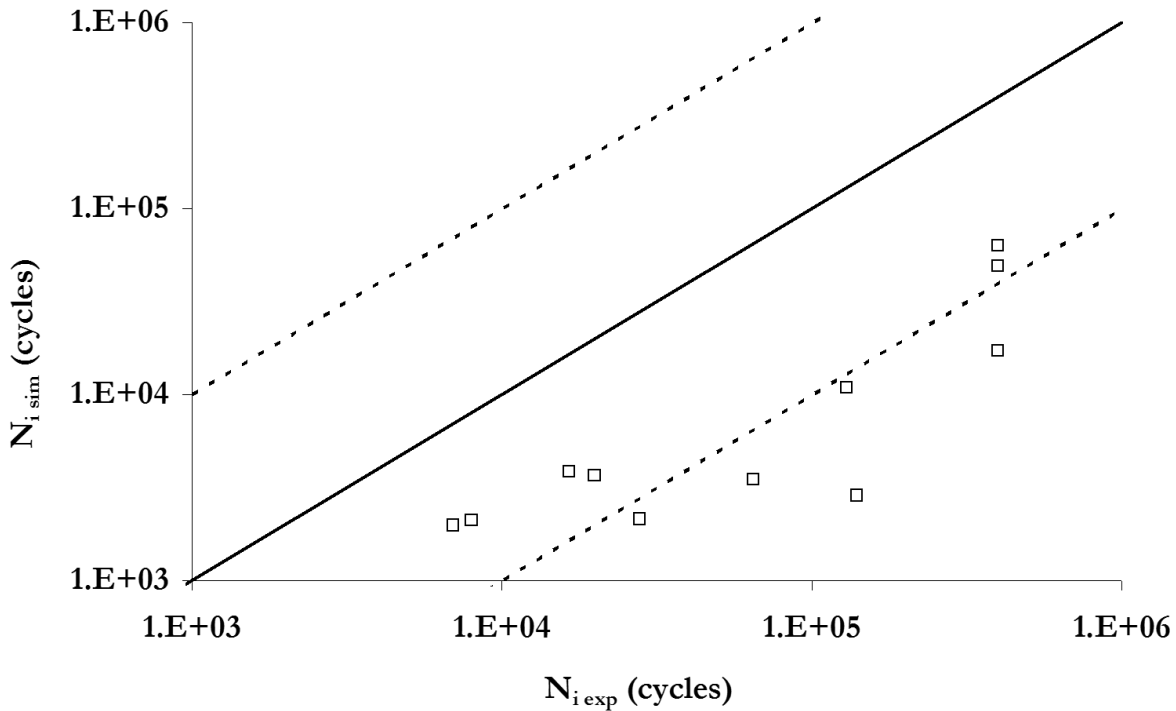
Le graphe de la Fig. 4.68 représente les tracés des isodurées de vie à partir du critère établi sur les éprouvettes AE en torsion et présente les essais expérimentaux d'endurance sur éprouvettes 'plot'.

On constate que les points expérimentaux sont au dessus des courbes modélisées. Le critère est donc, comme nous l'avions prévu, sécurisant.



**Figure 4.68** – Essai d'endurance sur éprouvettes 'plot' en traction-compression – Tracés des isodurées de vie selon le critère établi et superposition des points expérimentaux

Le graphe de la Fig. 4.69 illustre l'aspect 'sécurisant' du critère. Les points sont situés autour de la courbe d'équations  $N_{i\,sim} = 0.1 \cdot N_{i\,exp} \cdot 10$ . La durée de vie calculée est donc en moyenne surestimée d'un facteur 10.



**Figure 4.69** – Plot – Comparaison entre le nombre de cycles à l'amorçage simulé  $N_{i\,sim}$  et le nombre de cycles expérimental  $N_{i\,exp}$  - Enveloppe de la bande de dispersion

## 4.5 – Conclusion

Ce chapitre présente la synthèse des essais d'endurance sur les éprouvettes axisymétriques 'plot' et 'AE' testées respectivement en traction-compression et en torsion.

Il présente les conditions des essais mécaniques et les résultats bruts, exprimés à partir des variables globales de l'essai (déplacement ou rotation imposé à l'éprouvette et force ou couple mesuré). Une dispersion importante existe sur le nombre de cycles à l'amorçage. Une première synthèse permet de mettre en évidence deux paramètres influant sur l'endommagement en fatigue de ce matériau : le **chargement maximal et l'amplitude du chargement**.

L'observation des faciès de rupture des éprouvettes 'plots' testées en traction-compression permet de localiser l'amorçage des fissures. Ce dernier se situe essentiellement sur deux zones : les joints de moulage et les défauts internes. Les défauts internes correspondent soit à des **zones ségrégées en kaolin, souffre et zinc**, soit à **zones ségrégées en agrégats de silice**, soit à des **charges de silice** de taille importante. L'existence des zones ségrégées conduit à un amorçage prématuré. La concentration importante en charges rigides conduit à la localisation de la déformation sur les chaînes polymères. Dans les zones ségrégées en soufre et en zinc, la réticulation a certainement été plus importante que dans le reste de la gomme. Ces chaînes très courtes, et de plus 'sur-sollicitées', se rompent ou se désorbent de la surface de charges.

La localisation des zones d'hétérogénéités, ainsi que la taille des joints de l'éprouvette, conduisent à une dispersion importante des nombres de cycles à l'amorçage. La taille de ce joint influe sur le nombre de cycles à l'amorçage.

L'amorçage de fissures observé sur les éprouvettes AE sollicitées en torsion a lieu quasiment toujours sur le même joint de moulage. Ce dernier est 'protubérant', et est certainement dû à un défaut de fabrication.

Les contraintes et déformations locales sont ensuite calculées par la méthode des éléments finis, grâce à la loi de comportement établie dans le chapitre 3. Le comportement visco-hyperélastique endommageable implique que la réponse du matériau dépend de l'histoire des déformations vue par le matériau. Théoriquement, il conviendrait donc de faire un calcul par éléments finis pour chaque condition de chargement. Etant donné la durée des calculs et le nombre de chargements différents, nous avons mis en place, pour chaque type d'essais (traction-compression et torsion) une relation entre la déformation locale maximale et la déformation globale (calculée à partir du chargement global) et l'amplitude de déformation locale en fonction de l'amplitude de déformation globale. Ceci permet de mettre en évidence l'influence de la **déformation principale maximale** locale et du **second invariant du tenseur amplitude des déformations** vues par le matériau au cours du 3<sup>ème</sup> cycle. La synthèse des résultats en fonction de ces deux paramètres semble appropriée. Elle fait cependant apparaître un décalage du nombre de cycles à l'amorçage entre les plots et les AE à même condition de chargement. Nous avons en effet noté que l'amorçage des fissures sur les éprouvettes AE se situaient quasiment exclusivement sur l'un des deux joints de moulage, protubérant. La grande criticité de ce défaut diminue donc la durée de vie des AE par rapport à celle des plots.

La dernière étape consiste à établir un **critère de durée de vie**, c'est à dire à mettre en place une équation qui permet, à partir des paramètres mécaniques locaux, de calculer le nombre de cycle à l'amorçage sur une structure. Le critère dépend de la plus grande déformation principale et du second invariant du tenseur amplitude des déformations et prend la forme d'une loi exponentielle. Il est établi à partir des essais de torsion et est sécurisant sur les éprouvettes plots.

Notons que l'écriture du second invariant du tenseur amplitude des déformations peut s'avérer délicate dans le cas d'un chargement complexe, dans lequel les extrema locaux ne coïncident pas avec les extrema du chargement imposé à la structure étudiée.

Il est important de noter que le nombre de cycles à l'amorçage est très dépendant des défauts de surface (joint protubérant sur l'éprouvette 'AE') et des hétérogénéités de mélange (dans les plots par exemple). Le

critère ne tient pas compte de ces défauts. Il est donc probable que ce critère soit trop sévère pour des éprouvettes ne présentant pas de défauts aussi critiques. Il aurait été intéressant d'utiliser une approche probabiliste pour rendre compte de la taille et de la localisation des défauts.

De plus, il ne prend pas en compte les effets de température, qui peuvent avoir une influence sur l'endommagement et les propriétés viscoélastiques du SBR.

Ce critère devra être mis à l'épreuve sur d'autres structures testées en endurance.

## Bibliographie

**Andre** - *Critère local d'amorçage de fissures en fatigue dans un élastomère de type NR* – Thèse Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris – **1998**

**Andrews** – *Rupture propagation in hysterical materials : stress at a notch* – Journal of Mechanics and Physics of Solids, **1963**, vol.11, pp.231-242

**Akkerman** – *Flexcracking of polymers* – Journal of Applied Polymer Science – 1963, vol.7, pp.1425-1438

**Angioletti** – *Accidental factors involved in the fatigue breakdown of rubber articles* - Rubber Chemistry and Technology, **1956**, 29, pp. 753-769

**Ball** – *Discontinuous equilibrium solutions and cavitation in nonlinear elasticity* – Phil. Trans. R. Soc. Lond., A306, pp557-610, **1982**

**Beatty** - *Fatigue of rubber* – Rubber Chemistry and Technology, **1964**, 37(5), pp. 1341-1364

**Benzerga**, Besson, pineau – *Coalescence-Controlled anisotropic ductile fracture* – Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 121, pp.221-229 ; april **1999**

**Berardi** – *Modélisation numérique du comportement thermo-viscoélastique d'un élastomère en grandes déformations* – Thèse de l'Université de Provence, 4/1/**1995**

**Blanc** – *Thermoviscoelastic behavior of high polymers : an infra-red radiometry study, thermomechanical coupling in solids* – IUTAM, **1987**

**Bhowmick** – *Modelling of fracture surfaces of elastomer* - Kautschuk + Gummi Kunststoffe, **1984**, 37, Nr.3

**Cadwell**, Merril, Sloman, Yost – *Dynamic Fatigue Life of Rubber* – Industrial and Engineering Chemistry – **1940**, vol.12 (n°1), pp.19-23

**Lee**, Hiltner, Baer, I Kao – *Herringbone fracture of a polycarbonate/ABS blend* – Journal of materials Science, **1993**, 28, pp. 1491-1502

**Remy** – *Cours propriétés mécaniques des matériaux - Fatigue* – DEA Métallurgie spéciale des Matériaux - **1996**

**Saintier**, Cailletaud, Piques – *Fatigue life prediction of natural rubber components under uniaxial and multiaxial loading* - **1998**, ECF-12 Conference – Proceedings

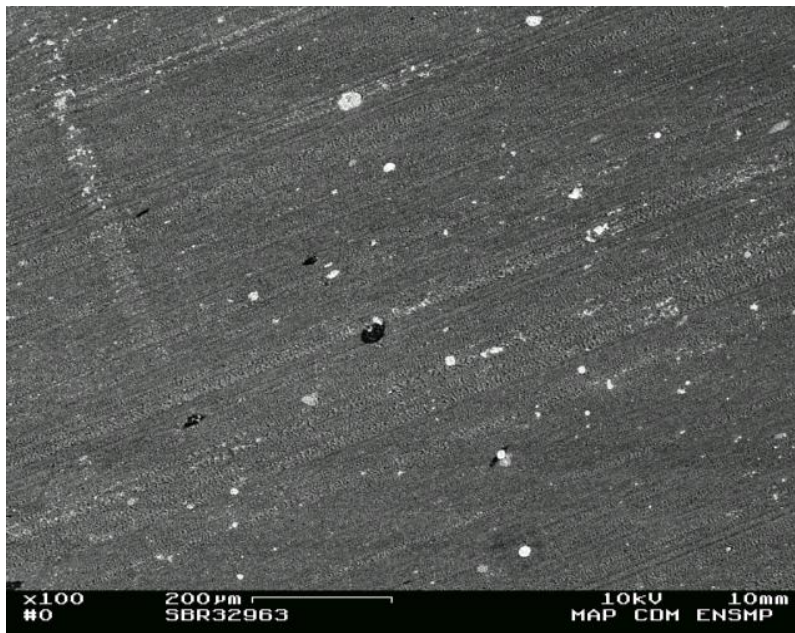
## Annexe 1A

### Microstructure et composition des SBR B et C

### Comparaison avec le SBR A

Les microstructures des SBR ont été observée au Microscope Electronique à Balayage (MEB). Les échantillons ont été découpés à l'aide d'un microtome à une température de -65°C, recouverts d'une couche de 200 Å d'Au-Pd. Les éléments ont été analysés par EDS (spectrométrie par dispersion d'énergie) dans la chambre du MEB.

Les Fig. 1A.1 et 1A.2 montrent les surfaces des SBR B et C à faible grossissement. Les tâches claires correspondent aux charges de silice. Leur taille varie de 1 micron à plusieurs dizaines de microns. Les tâches sombres correspondent à des agglomérats de particules de noir de carbone. Ils se trouvent en quantité beaucoup moins importante. Comme dans le cas du SBR A, les particules de silice et de noir de carbone sont mal dispersées dans la matrice.

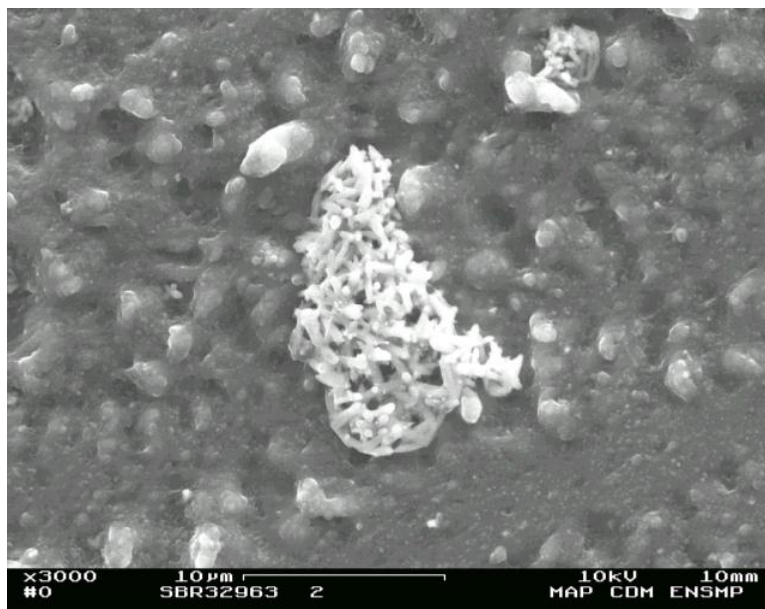


**Figure 1A.1** – SBR B – Surface plane observée au MEB : gomme, charges de silice (tâches claires) et de noir de carbone (tâches sombres)



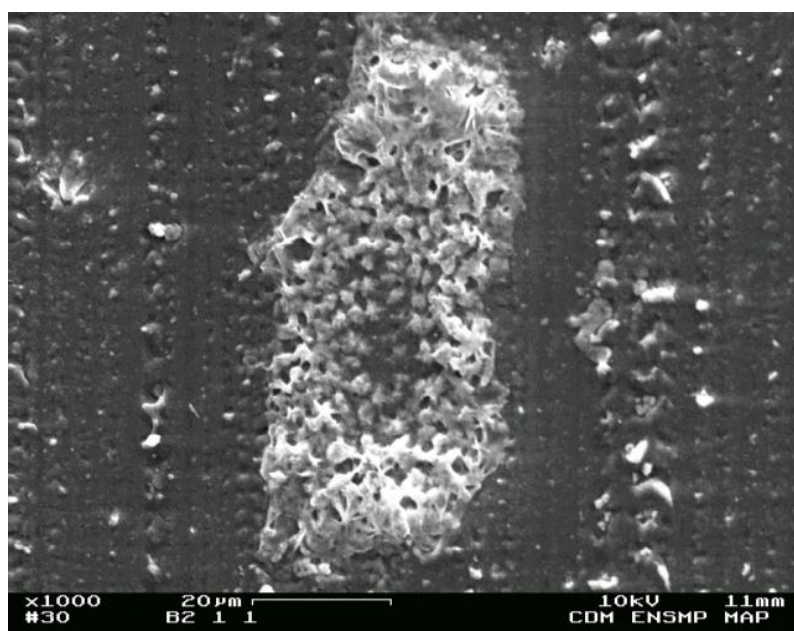
**Figure 1A.2** – SBR C – Surface plane observée au MEB : gomme, charges de silice (tâches claires) et de noir de carbone (tâches sombres)

Les agglomérats de silice du SBR B sont également recouverts de petites aiguilles – Fig. 1A.3 et 1A.4 -. L'analyse par EDS contient à l'identification des éléments C, O, Zn, Si, S, ainsi que des traces de Mg, Cl, Ca, .... On suppose qu'il s'agit d'un plastifiant qui a migré à la surface.



**Figure 1A.3** – SBR B – Agglomérat de silice observée au MEB – Formation d'aiguilles à la surface





**Figure 1A.4** – SBR B – Agglomérat de silice observée au MEB – Formation d’aiguilles à la surface

Les tableaux des Fig. 1A.5 et 1A.6 indiquent les résultats de dosage de différents éléments par WDS à l’aide de la microsonde de Castaing, sur des zones de 1 mm<sup>2</sup>, dans le premier cas et par calcination à 650°C dans le second cas.

SBR A global								
élément	C	O	Si	S	Zn	Al	Mg	Ca
% poids	64	21	12	1.6	1.3	0.6	0.03	0.03

SBR B global								
élément	C	O	Si	S	Zn	Al	Mg	Ca
% poids	67	20	12	1.7	0.6	0.2	0.02	0.04

SBR C global								
élément	C	O	Si	S	Zn	Al	Mg	Ca
% poids	66	21	11	1.5	0.4	0.1	0.01	0.04

**Figure 1A.5** : Résultats des analyses WDS sur les des zones de 1mm<sup>2</sup> SBR A, B et C

	SBR A	SBR B	SBR C
% silice	33.9	29.5	30.1
observations	blanches intenses	coloration brun rougeâtre	blanches

**Fig. 1A.6** : Résultats des analyses par calcination à 650°C sur les SBR A, B et C

Ces résultats indiquent que ces caoutchoucs contiennent environ 30% de silice. Le SBR A contient plus de zinc et d’aluminium. Les teneurs en soufre sont classées B>A>C et suivent l’appréciation du fournisseur aux niveau des qualités des 3 caoutchoucs. Expérimentalement, les raideurs suivent également cet ordre : B>A>C. Il existe des traces d’aluminium et de calcium dans les trois nuances. D’autre part, les cartographies obtenues grâce à la microsonde de Castaing met en évidence la présence d’amas de fer de diamètre 10 microns dans la nuance B. Ils semblent superposés à des zones riches en oxygène et en silice. Ceci est cohérent avec la coloration brun-rougeâtre observée lors des analyses par calcination.



Des analyses ont également été effectuées sur les charges. Les résultats sont synthétisés dans le tableau de la Fig. 1A.7.

SBR A silice							SBR A NC						
élément	C	O	Si	S	Ca	Zn	élément	C	O	Si	S	Ca	Zn
% poids	47.0	38.0	21.0	1.3	0.04	1.9	% poids	94.0	1.7	0.02	1.5	0.01	0.5
SBR B silice							SBR B NC						
élément	C	O	Si	S	Ca	Zn	élément	C	O	Si	S	Ca	Zn
% poids	44.5	34.0	20.5	1.5	0.1	0.8	% poids	96.0	1.8	0.1	2.0	0.01	0.14
SBR C silice							SBR C NC						
élément	C	O	Si	S	Ca	Zn	élément	C	O	Si	S	Ca	Zn
% poids	44.0	34.0	20.0	1.4	0.02	0.60	% poids	98.0	0.5	0.05	1.4	0	0.03

**Figure 1A.7** - Analyses WDS des charges de silice et de noir de carbone (NC) dans les SBR A, B et C

Comme dans la cas du SBR A, les charges de silice correspondent à des mélanges d'agrégats de silice et de gomme occluse.

## Annexe 2A

### Essais mécaniques

### Calculs d'erreur

#### Traction uniaxiale

Le calcul d'erreur de l'élongation inclut l'erreur attribuable à l'extensomètre.

$\lambda$  est l'élongation nominale,  $L$  est la longueur de l'éprouvette au temps  $t$ ,  $L_0$  est sa longueur initiale (déterminée par l'extensomètre).

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L_0}{L_0} = 2 \cdot \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.5}{20} = 0.025$$

$$\text{D'où } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} < 5\%$$

Le calcul d'erreur de la contrainte inclut l'erreur de mesures des dimensions de l'éprouvette et celle de la cellule de force.

$\sigma$  est la contrainte nominale,  $F$  est la force mesurée au temps  $t$ ,  $S_0$  est la section initiale de l'éprouvette ( $S_0 = l \cdot e$ ,  $l$  est la largeur et  $e$  l'épaisseur de l'éprouvette, mesurées au pied à coulisse).

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta S_0}{S_0} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta e}{e}$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = 0.01 + \frac{0.05}{20} + \frac{0.05}{3}$$

$$\text{D'où } \frac{\Delta\sigma}{\sigma} < 5\%$$

#### Compression uniaxiale et compression eudiométrique

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L_0}{L_0}$$

$\lambda$  est l'élongation nominale.  $L$  est la longueur de l'éprouvette au temps  $t$ , elle est mesurée par les capteurs LVDT.  $L_0$  est sa longueur initiale (hauteur du pion), elle est mesurée au pied à coulisse. L'erreur principale de la mesure de  $L$  est attribuée au mauvais parallélisme entre le capteur et l'éprouvette. L'angle entre le capteur et l'éprouvette est nommé  $\alpha$ . On l'estime inférieur à  $20^\circ$ . Ainsi,

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1 - \cos(20)}{\cos(20)} = 0.065$$

On a alors :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0.65 + \frac{0.05}{10} = 0.065$$

$$\text{D'où } \frac{\Delta\lambda}{\lambda} < 10\%$$

L'erreur de mesure sur la contrainte est la même que dans le cas de l'essai de traction uniaxiale.

### **Relaxation en traction uniaxiale**

La machine n'est pas équipée d'extensomètre. La mesure 'locale' de la déformation au centre de l'éprouvette est donc faite grâce à un cathétomètre par mesure de la distance entre deux traits dessinés sur l'éprouvette, avant l'essai puis au cours de l'essai.

Le calcul d'erreur sur la détermination de l'élongation prend en compte l'indétermination due à l'épaisseur du trait, à la précision du cathétomètre.

Le calcul d'erreur est donc

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L_0}{L_0} = 2 \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

Si  $e_{\text{trait}}=1\text{mm}$  et  $L=20\text{mm}$ , on obtient

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \leq 10 \%$$

## Annexe 2B

### Influence de la mise en forme

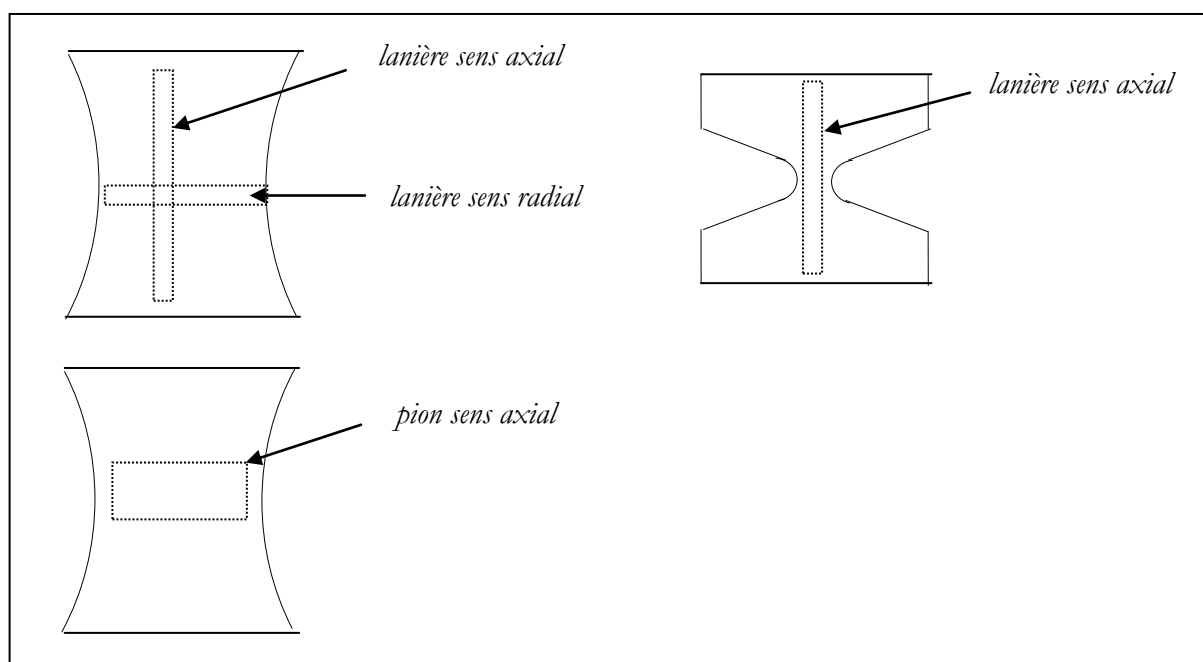
### Cas du SBR

Rappelons que la caractérisation du comportement mécanique du SBR doit servir d'une part à identifier une loi de comportement et d'autre part à calculer par éléments finis les contraintes et les elongations dans les éprouvettes de fatigue : les plots et les AE. Cette démarche suppose d'une part que le comportement est isotrope et d'autre part que le comportement du SBR est le même quel que soit son procédé de mise en forme. A priori, ces hypothèses sont 'fortes' puisque le calandrage des plaques de SBR induit une certaine anisotropie, due à l'alignement des chaînes polymères.

On a vérifié que les modules tangents à l'origine des plaques calandrées testées en traction et des pions moulés testés en compression étaient différents. On suppose de même qu'une plaque injectée n'aurait pas le même comportement qu'une plaque calandree. D'autre part, le temps et la température de cuisson diffèrent selon les éprouvettes. Bien qu'ils soient 'calculés' de telle sorte que le matériau final soit le même quelle que soit la masse de l'éprouvette – dixit le fournisseur –, on peut imaginer que les taux de réticulation dans les différentes éprouvettes ne sont pas rigoureusement les mêmes et que le matériau injecté n'est pas uniforme dans toute l'éprouvette.

Afin de vérifier les deux hypothèses de travail : isotropie et non influence de la mise en forme, ou plutôt de dire qu'elle ne sont pas complètement erronées, différents essais ont été menés. Pour ce faire, des éprouvettes lanières 'courtes' ont été découpées dans les plots, dans le sens long et dans le sens transverse, dans les AE (sens long uniquement) ainsi que dans les plaques, parallèlement et perpendiculairement à la direction de calandrage. Des pions ont été prélevés dans les plaques et dans les plots (sens long) afin de comparer leur comportement à celui des plots moulés. La Fig. 2B.1 récapitule ces découpes.

Les éprouvettes sont prélevées dans un premier temps par découpe jet d'eau à l'Ecole des Mines de Douai puis dans un deuxième temps au cutter et à la 'râpe' au CTC.



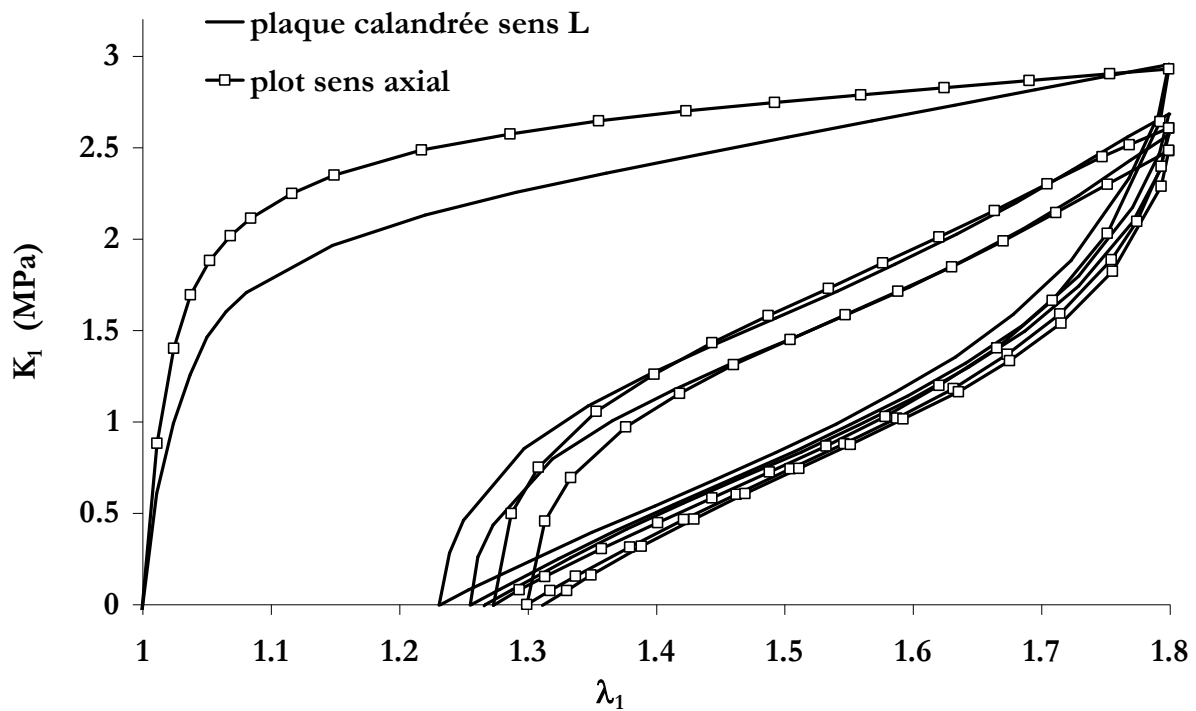
**Figure 2B.1** – Schéma des éprouvettes découpées et testées

### Dispersion du comportement selon la mise en forme de l'éprouvette

La Fig. 2B.2 compare deux éprouvettes de géométrie identique (lanières) prélevée dans une plaque et dans un plot. La Fig. 2B.3 compare des éprouvettes prélevées dans une plaque et dans une AE.

Il apparaît que les comportements présentent des différences, tant au niveau de la contrainte que de l'élongation progressive. Toutefois, ces 5 à 10 % d'erreur ne sont pas rédhibitoires pour l'étude.

La Fig. 2B.4 présente les comportements des pions issus des plaques calandrées (4 pions sont empilés pour constituer une éprouvette), d'un plot avec le pion moulé. Le comportement de la plaque est intermédiaire entre celui du pion moulé et celui du pion issu du plot (le plus raide).



**Figure 2B.2**– Traction uniaxiale cyclique – Comparaison plaque / plot -  $\dot{\lambda} = 0.02s^{-1}$

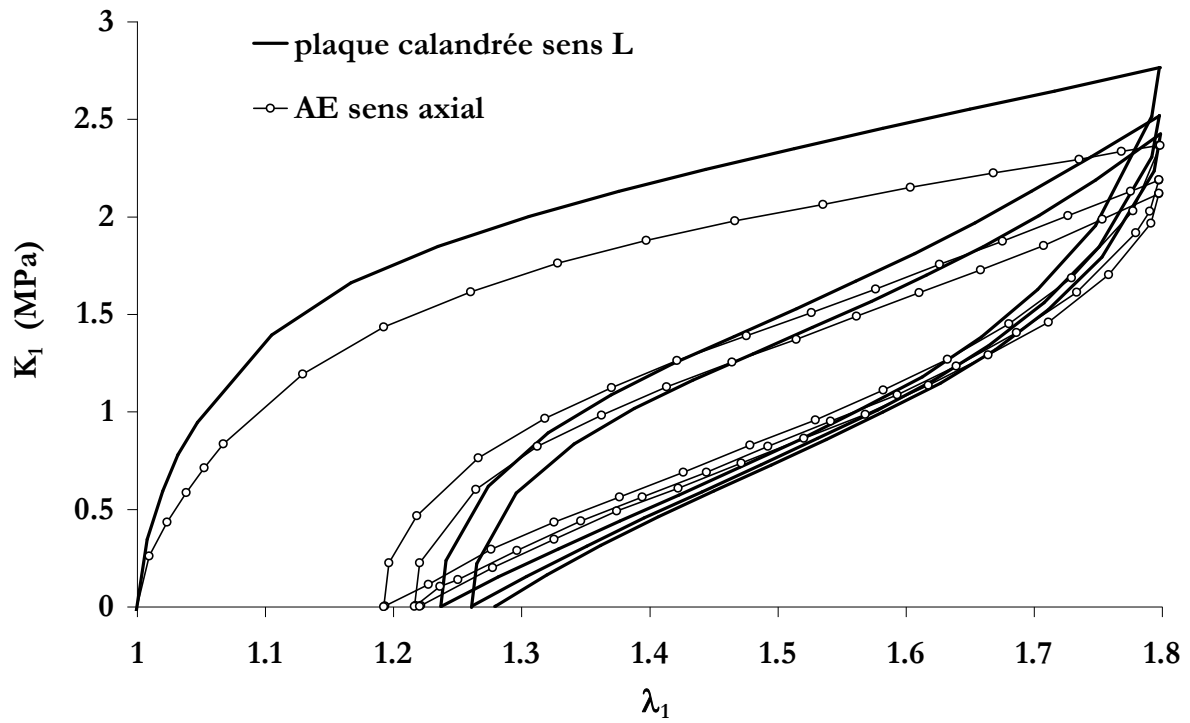


Figure 2B.3 – Traction uniaxiale cyclique – Comparaison plaque / AE -  $\dot{\epsilon} = 0.02s^{-1}$

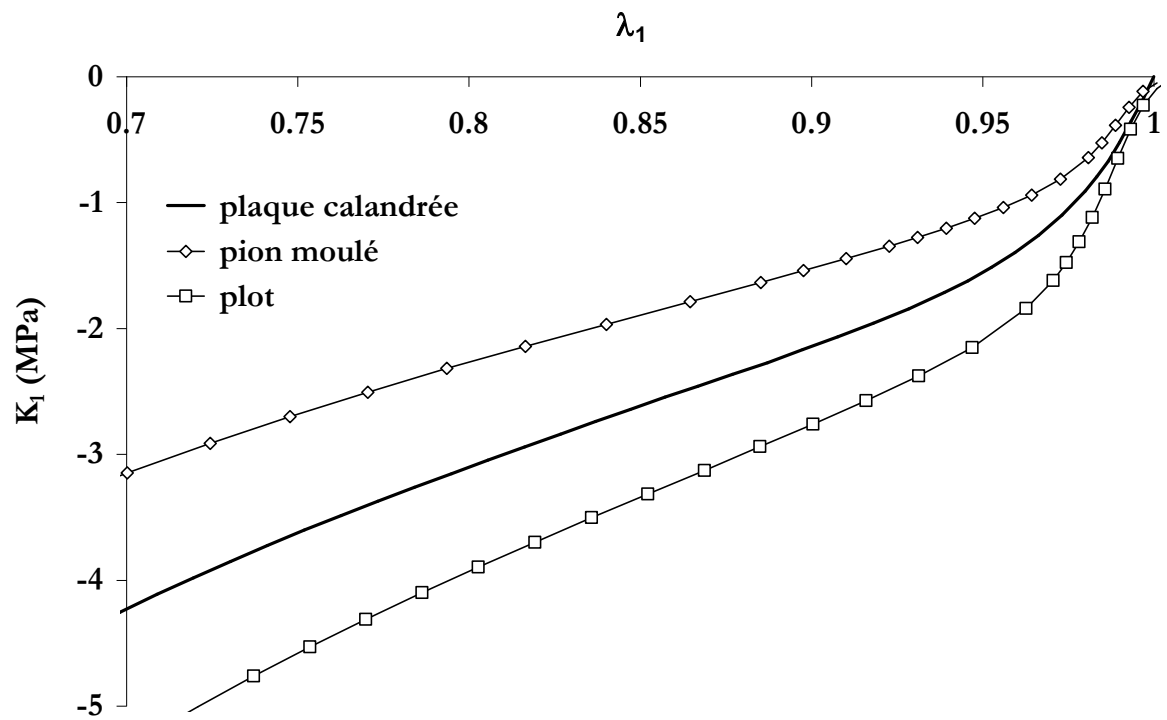


Figure 2B.4 – Compression uniaxiale – Comparaison plaque / pion moule / AE -  $\dot{\epsilon} = 0.004s^{-1}$

### Dispersion du comportement selon la direction de prélèvement de l'éprouvette dans le matériau

La Fig. 2B.5 présente les courbes de traction uniaxiale jusqu'à rupture obtenues à partir d'altère poinçonnées parallèlement au calandrage de la plaque et perpendiculairement, à la même vitesse de chargement. Ces essais montrent que le matériau est moins raide dans le sens perpendiculaire au calandrage. Le comportement du SBR est donc anisotrope dans la plaque. Cette différence traduit certainement la différence l'orientation des chaînes dans le sens de calandrage.

La Fig. 2B.6 suggère que le calandrage a également une influence sur la déformation rémanente lors d'une sollicitation cyclique.

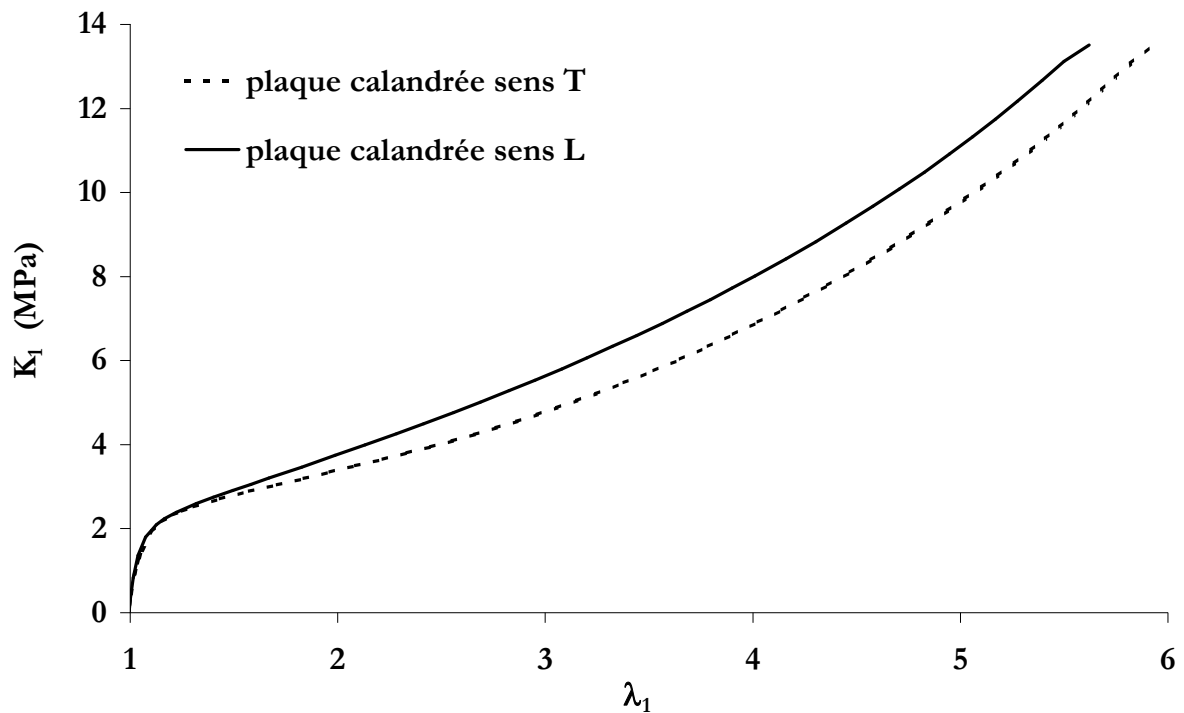
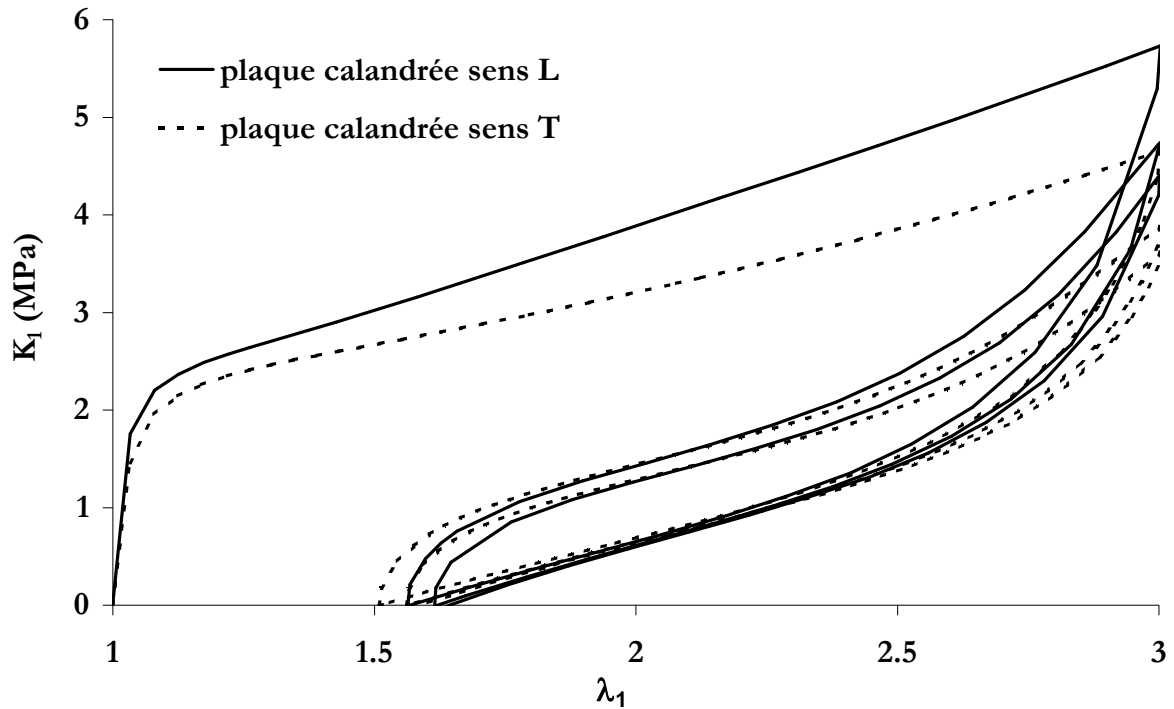


Figure 2B.5 – Traction uniaxiale– Comparaison plaque sens L / T -  $\dot{\epsilon} = 0.1 s^{-1}$



**Figure 2B.6–** Traction uniaxiale cyclique – Comparaison plaque sens L / T -  $\dot{\epsilon} = 0.1 s^{-1}$

La Fig. 2B.7 compare les comportements en traction uniaxiale cyclique des lanières découpées dans des plots selon leur longueur (sens axial) et selon leur section (sens radial). On constate que les comportements diffèrent. Le plot semble moins raide et présente une élongation rémanente moins importante dans le sens transverse. On constate d'autre part que le comportement de la plaque est intermédiaire.



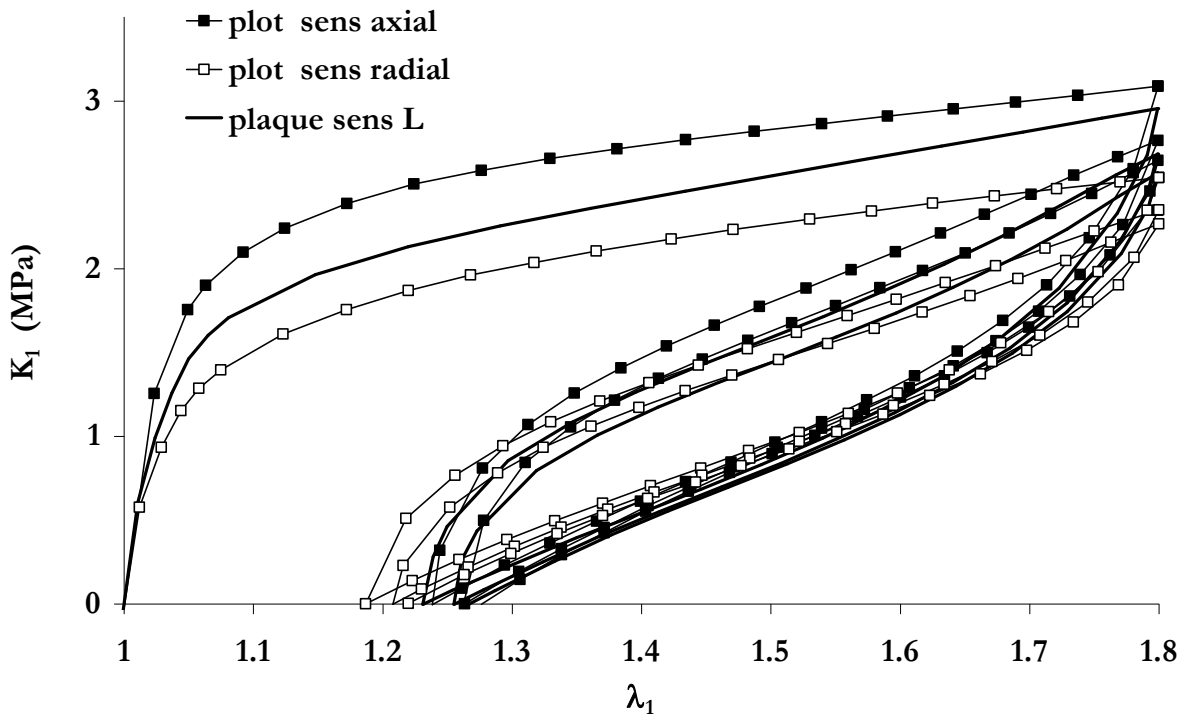
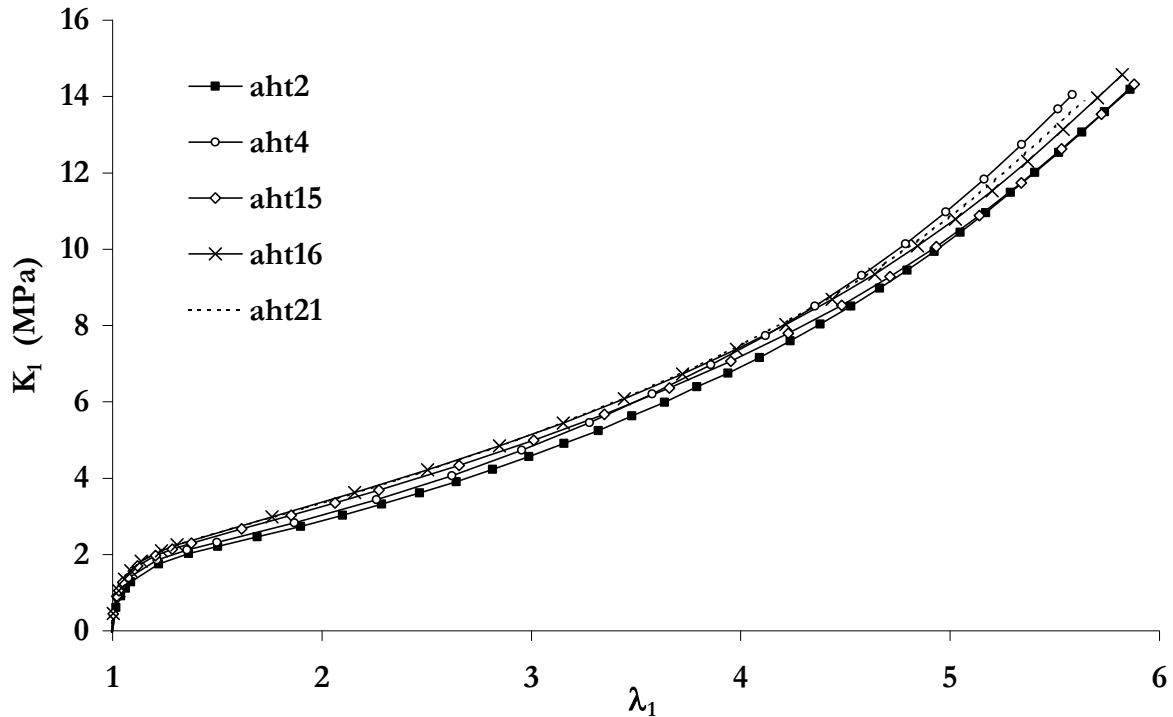


Figure 2B.7 – Traction uniaxiale cyclique – Comparaison plot sens L /  $T - \dot{\lambda} = 0.02s^{-1}$

### Dispersion du comportement selon l'éprouvette

La Fig. 2B.8 illustre la dispersion du comportement observé sur les éprouvettes issues des plaques de SBR, prélevées dans la direction du calandrage et sollicitées en traction. L'erreur est inférieure à 10%.



**Figure 2B.8** – Traction uniaxiale monotone - Dispersion au sein des éprouvettes issues des plaques - Sollicitation dans la direction du calandrage -  $\dot{\epsilon} = 0.01 s^{-1}$

Les Fig. 2B.9 et Fig. 2B.10 montrent les résultats obtenus sur des éprouvettes prélevées dans les plots dans les mêmes conditions. On note une dispersion importante selon le numéro du plot testé. On suppose que la dispersion provient à la fois de la dispersion des paramètres de mise en forme (température, temps de cuisson, ..) mais aussi de la zone de prélèvement de l'éprouvette dans le plot. Cette dispersion est beaucoup plus faible dans les plaques et dans les pions. La Fig. 2B.11 illustre le même phénomène sur des pions découpés dans des plots et testés en compression uniaxiale.

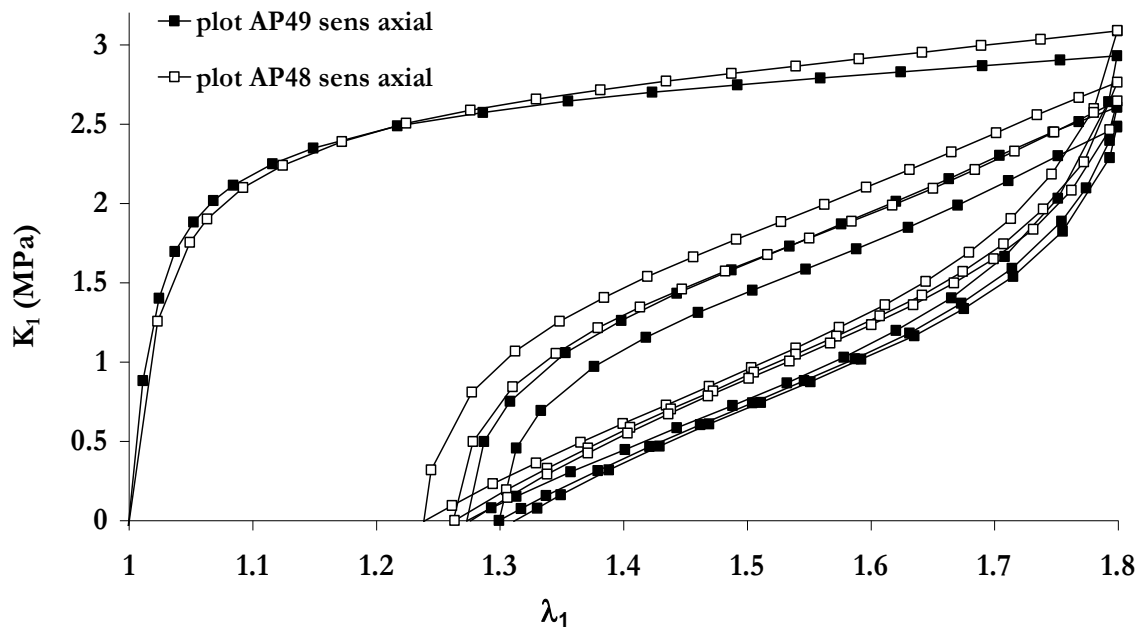


Figure 2B.8 – Traction uniaxiale cyclique – Dispersion selon le plot sens axial-  $\dot{\epsilon} = 0.02s^{-1}$

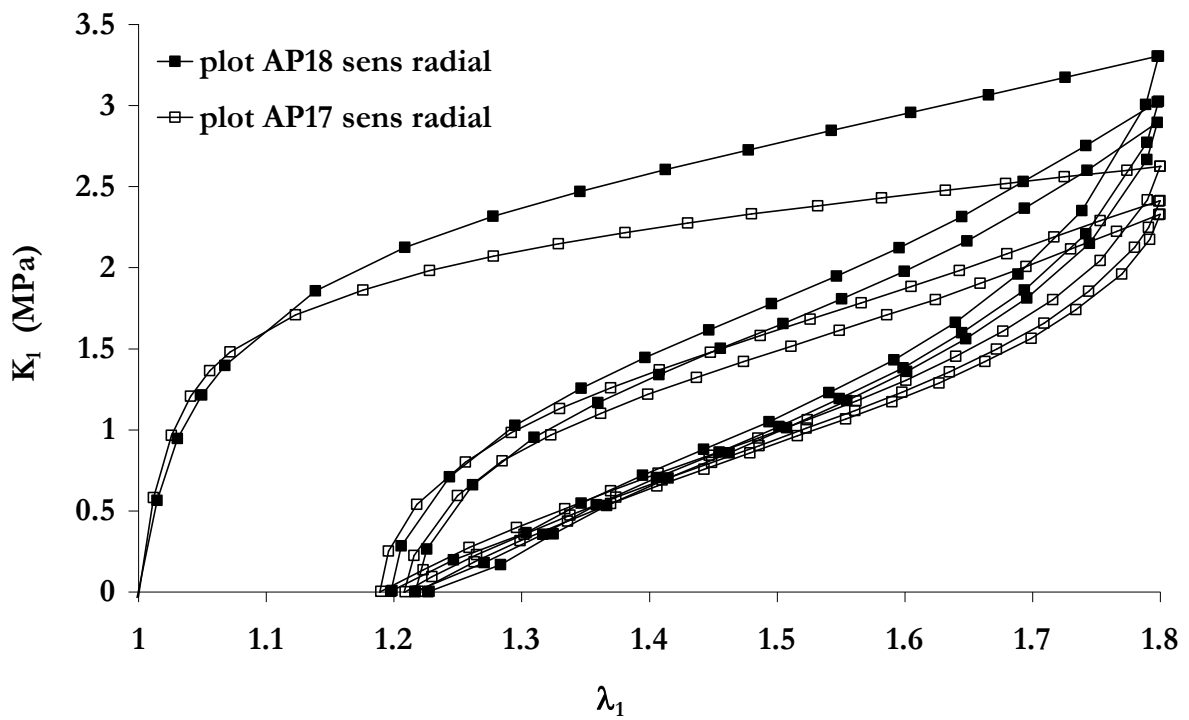


Figure 2B.9 – Traction uniaxiale cyclique – Dispersion selon le plot sens T -  $\dot{\epsilon} = 0.02s^{-1}$

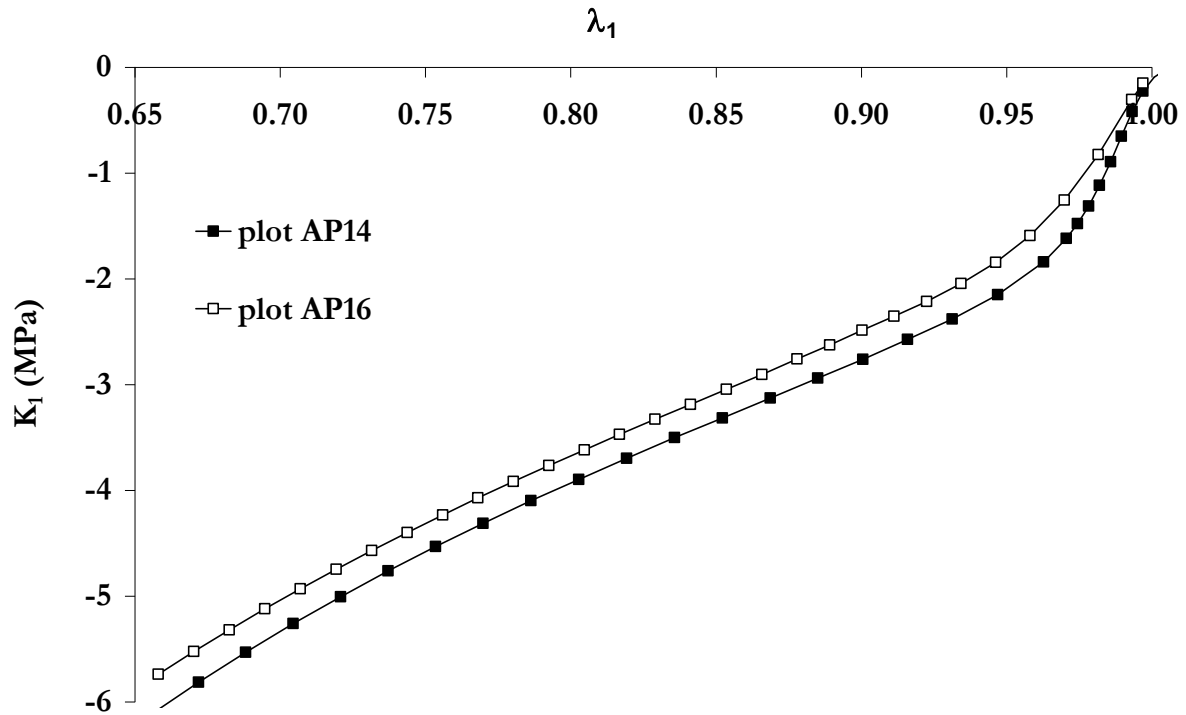


Figure 2B.10 – Compression uniaxiale – Dispersion selon le plot sens  $L$  -  $\dot{\epsilon} = 0.004 \text{ s}^{-1}$

## Conclusion

Les plaques, pions, plots, et AE présentent un comportement mécanique semblable mais notablement dispersé. Si on suppose que la semelle de chaussure injectée avec ce même matériau présente un comportement intermédiaire entre tous ces comportements de plaques calandrées, pions moulés, plots injectés et AE mises en forme par compression transfert, on peut considérer qu'une loi de comportement unique permettra de simuler, à 10% d'erreur près en traction et 20 à 30% en compression (si l'on ne considère pas les pions moulés).

## Annexe 2C

### Indexation des essais

#### SBRA - Essais uniaxiaux

Chaque essai est indexé : la première lettre, **a**, désigne la nuance A du SBR, la lettre suivante **h**, **l**, ou **c** désigne l'éprouvette utilisée : haltère, lanière et pion ou plaques empilées (c comme compression), la lettre suivante le type d'essai **t** comme traction et **l** comme libre (compression), r comme relaxation, le numéro final est le numéro de l'essai.

n° ep	géométrie	SBR	Test pratiqué	vitesse traverse	nom essai	lieu essai
ah20	haltère	A	TU jusqu'à rupture	v=5 mm/min	aht20	CTC
ah21	haltère	A	TU jusqu'à rupture	v=50 mm/min	aht21	CTC
ah22	haltère	A	TU jusqu'à rupture	- v=500 mm/min	aht22	CTC
al 117	lanière	A	relaxation TU - $\lambda_1=2.3$	rapide	alr117	CdM
al 118	lanière	A	relaxation TU - $\lambda_1= 2.0$	rapide	alr118	CdM
al 119	lanière	A	relaxation TU - $\lambda_1=1.8$	rapide	alr119	CdM
al 120	lanière	A	relaxation TU - $\lambda_1=1.6$	rapide	alr120	CdM
al 121	lanière	A	relaxation TU - $\lambda_1=1.4$	rapide	alr121	CdM
al 122	lanière	A	relaxation TU - $\lambda_1=1.3$	rapide	alr122	CdM
al 60	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=1.3$	v=50 mm/min	alt60	CdM
al 61	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=1.1$	v=50 mm/min	alt61	CdM
al 62	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=1.2$	v=50 mm/min	alt62	CdM
al 63	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=1.4$	v=50 mm/min	alt63	CdM
al 64	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=1.5$	v=50 mm/min	alt64	CdM
al 65	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=2.0$	v=50 mm/min	alt65	CdM
al 66	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=2.5$	v=50 mm/min	alt66	CdM
al 96	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=3.0$	v=50 mm/min	alt96	CdM
al 92	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=1.5$	v=500 mm/min	alt92	CdM
aatl 2	lanière	A	TU	v=30 mm/min	aatl2	Alès
aatl 3	lanière	A	TU 10 cycles - $\lambda_1=2.75$	v=30 mm/min	aatl3	Alès
aatlr 1		A	relaxation TU - $\lambda_1=1.1$	v=30 mm/min	aatlr1	Alès
ac 62	pion moulé	A	CU	v=3 mm/min	acl62	CdM
ac 64	pion moulé	A	CU	rapide	acl64	CdM
ac 71	pions-plaques	A	relaxation CU - $\lambda_1=0.65$	rapide	acl71	CdM
ac 73	pions-plaques	A	relaxation CU - $\lambda_1=0.56$	rapide	acl73	CdM

**Figure 2C.1** – SBR A – Indexation des essais mécaniques uniaxiaux

**SBRA - Essais multiaxiaux**

Les essais, comme précédemment, sont indexés : la première lettre, a, désigne la nuance A du SBR, la lettre suivante désigne l'éprouvette utilisée : l comme lanière et c comme compression (pion ou plaques empilées), p comme 'plot' et ae comme 'AE', la lettre suivante le type d'essai t comme traction, tp comme traction plane, ce comme compression eudiométrique, r comme relaxation, TC comme Traction-Compression et S comme torSion.

n° ep	géométrie	SBR	Test pratiqué	vitesse traverse	nom essai	lieu essai
aatp99b	lanière large	A	traction plane	15 mm/min	aatp99b	Alès
AC22	pion	A	CE	v=3mm/min	acc22	CdM
AC31	pion	A	relaxation CE	v=3mm/min	accr31	CdM
ap28	plot	A	TC - 0/20 mm	T = 3s	ap28	CdM
ap31	plot	A	TC - 5/15 mm	T = 3s	ap31	CdM
ap29	plot	A	TC - -10/15 mm	T = 3s	ap29	CdM
ae16	AE	A	S - 0/60 °	T = 4s	ae16	CdM
ae11	AE	A	S - 10/40 °	T = 2.9 s	ae11	CdM
ae14	AE	A	S - -35/35 °	T = 4.5 s	ae14	CdM

**Figure 2C.2** – SBR A – Indexation des essais mécaniques multiaxiaux

**PUA - Essais uniaxiaux**

Chaque essai est indexé : les deux premières lettres, **ua**, désignent la nuance A du PU, la lettre suivante **h**, **l**, ou **c** désigne l'éprouvette utilisée : haltère, lanière et plaques empilées (c comme compression), la lettre suivante le type d'essai **t** comme traction et **l** comme libre (compression), **r** comme relaxation, le nombre final correspond au numéro de l'essai.

ep. (PU A)	geometrie	type test	vitesse traverse	nom essai	lieu essai
uah8	haltère	TU jusqu'à rupture	50 mm/min	uaht8	CTC
ual94b	poinçon halt L=150	TU	5 mm/min	ualt94	CTC
ual95b	poinçon halt L=150	TU	50 mm/min	ualt95	CTC
ual96b	poinçon halt L=150	TU	500 mm/min	ualt96	CTC
a ualt02	lanière	TU jusqu'à rupture	15 mm/min	aualt02	Alès
uac81	pions-plaques	ether	3 mm/min	uac81	CdM
ual46	lanière	relaxation TU - $\lambda_1=1.16$	rapide	ualr46	CTC
ual49	lanière	relaxation TU - $\lambda_1=1.3$	rapide	ualr49	CTC
ual51	lanière	relaxation TU - $\lambda_1=1.56$	rapide	ualr51	CTC
ual52	lanière	relaxation TU - $\lambda_1=2.2$	rapide	ualr52	CTC
ual58	lanière	relaxation TU - $\lambda_1=2.0$	rapide	ualr58	CTC
ual22b	lanière	TU - 10 cycles $\lambda_1=2,5$	50 mm/min	ualt22b	CTC
ual30	lanière	TU - 10 cycles $\lambda_1=1.2$	50 mm/min	ualt30	CTC
ual35	lanière	TU - 10 cycles $\lambda_1=1.5$	50 mm/min	ualt35	CTC
ual36	lanière	TU - 10 cycles $\lambda_1=1.5$	500 mm/min	ualt36	CTC

**Figure 2C.3** – PU A – Indexation des essais mécaniques uniaxiaux

## PUA - Essais multiaxiaux

L'essai mutiaxial est l'essai de compression eudiométrique

ep (PU ether)	geometrie	type test	vitesse traverse	Nom essai	Lieu essai
uac 105		relaxation CE - $\lambda_1=0.62$	$v=3\text{mm/min}$	uace105	CdM
uac 113		relaxation CE - $\lambda_1=0.82$	$v=3\text{mm/min}$	uace113	CdM

**Figure 2C.4** – PU A – Indexation des essais mécaniques mutiaxiaux

## Annexe 2D

### Comportement mécanique des SBR B et C

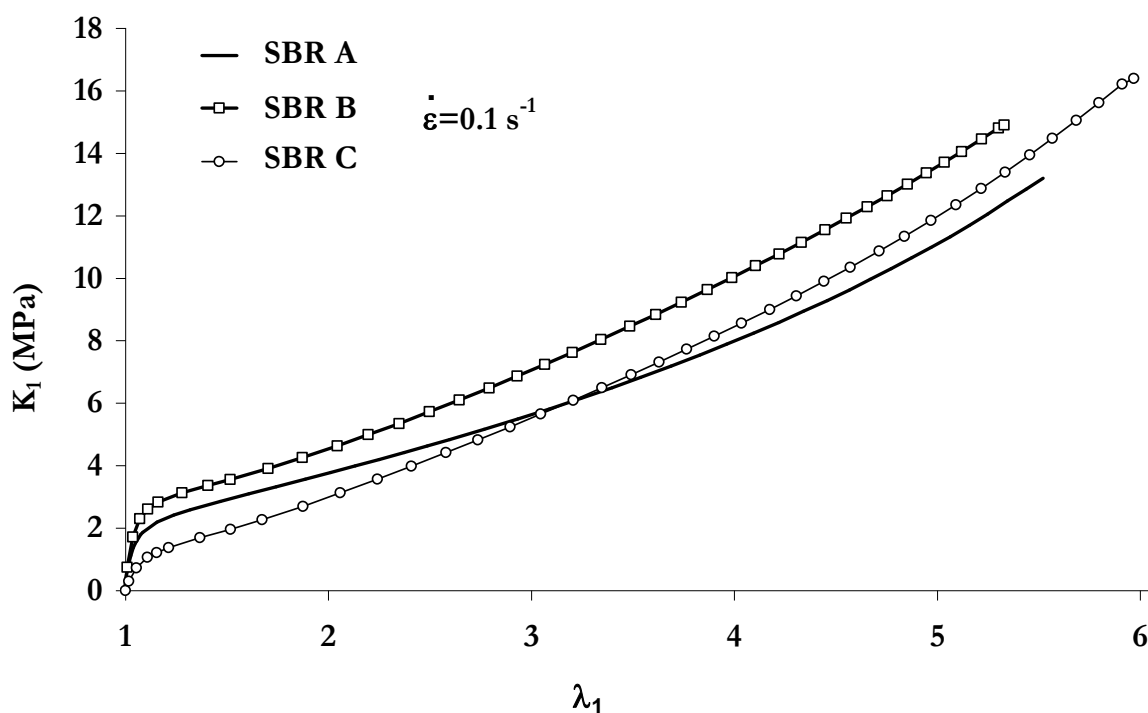
#### Résultats expérimentaux

#### Comparaison avec le SBR A

Les deux autres nuances de SBR sont les qualités extrêmes. La nuance B est la nuance de la meilleure qualité et la nuance C, la nuance de la moins bonne qualité. Les comportements des trois matériaux sont comparés.

##### 1.1.1. Essais uniaxiaux

##### Traction uniaxiale monotone



**Figure 2D.1** – SBR A, B, C – Comparaison entre les nuances de SBR

Les modules tangents et sécants sont tels que  $\text{SBR B} > \text{SBR A} > \text{SBR C}$  jusqu'à une elongation de 2. La SBR C, la nuance la moins raide, présente une elongation à rupture supérieure à celle des deux autres nuances.



### Compression uniaxiale monotone

Les éprouvettes sont constituées d'un empilement de pions découpés dans des plaques. Ils sont comprimés entre deux plateaux d'acier poli et sur lesquels une goutte de vaseline est déposée afin de diminuer le frottement et d'éviter l'effet 'tonneau'

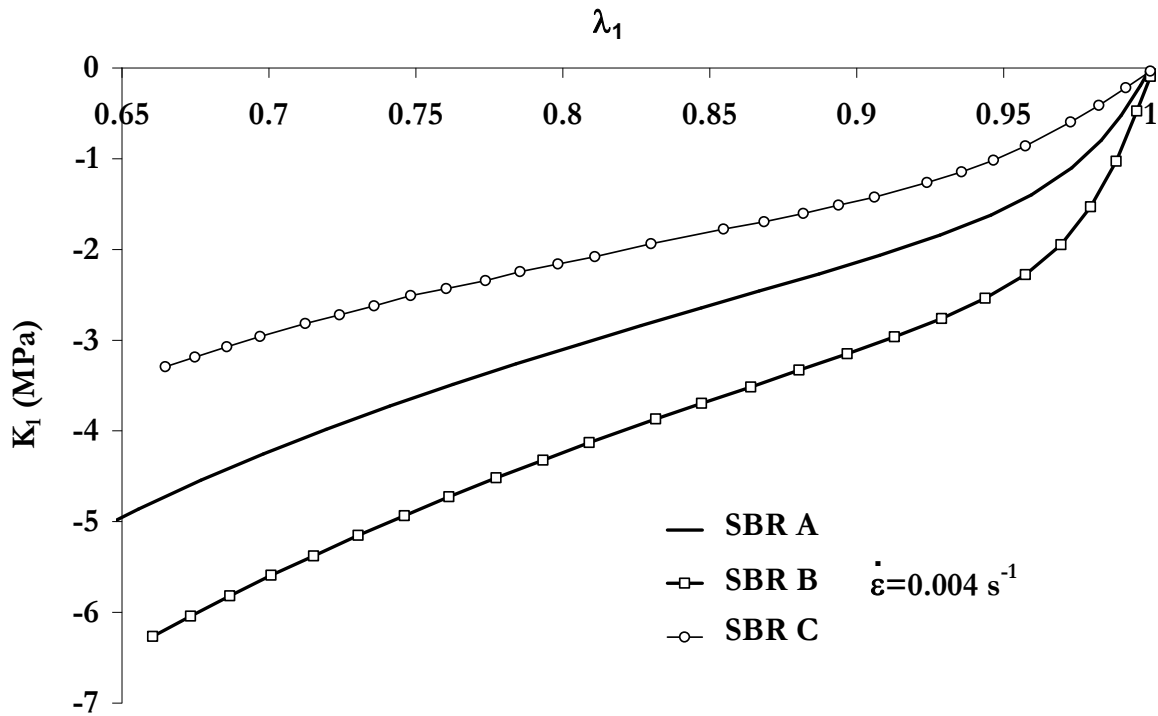


Figure 2D.2 – SBR A, B, C – Comparaison entre les nuances de SBR

### Relaxation en traction uniaxiale monotone

Le graphe de la Fig. 2D.3 présente les résultats obtenus sur le SBR B, à des élongations de relaxation de 1.3, 1.5, 1.7 et 1.9. Les contraintes sont normalisées par la plus grande contrainte obtenue lors de la montée en charges. Le graphe de la Fig. 2D.4 présente les mêmes résultats dans la cas du SBR C.

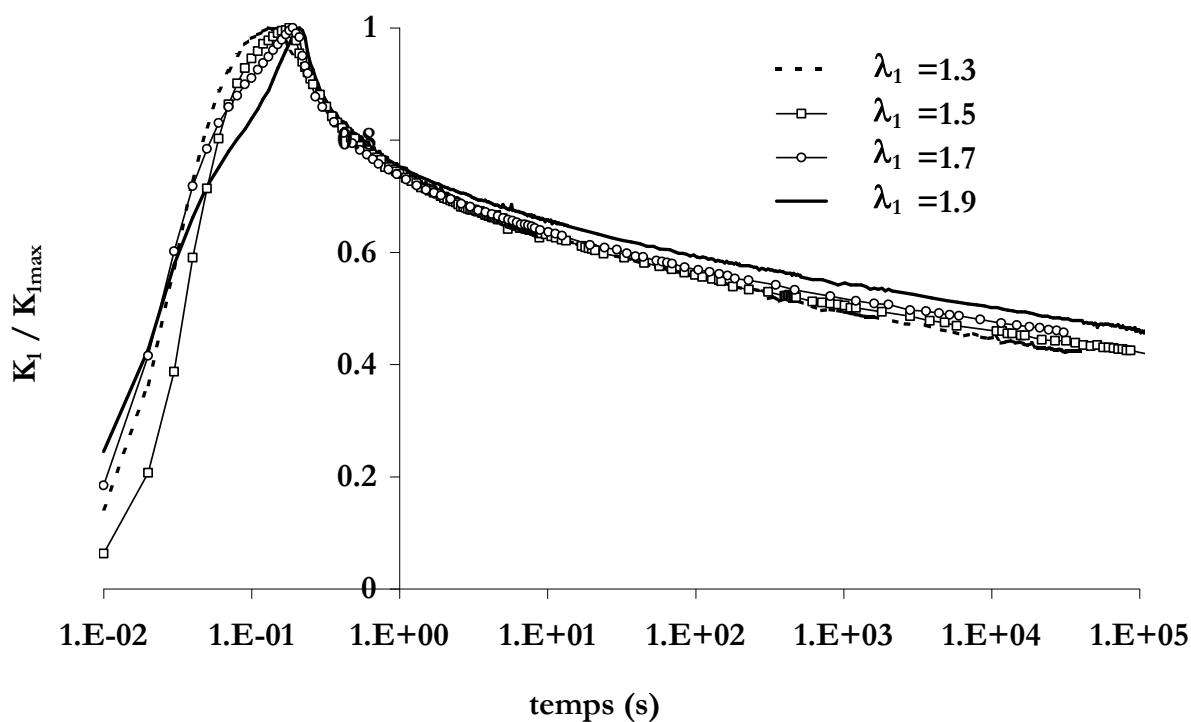


Figure 2D.3 – SBR B – Relaxation en traction uniaxiale

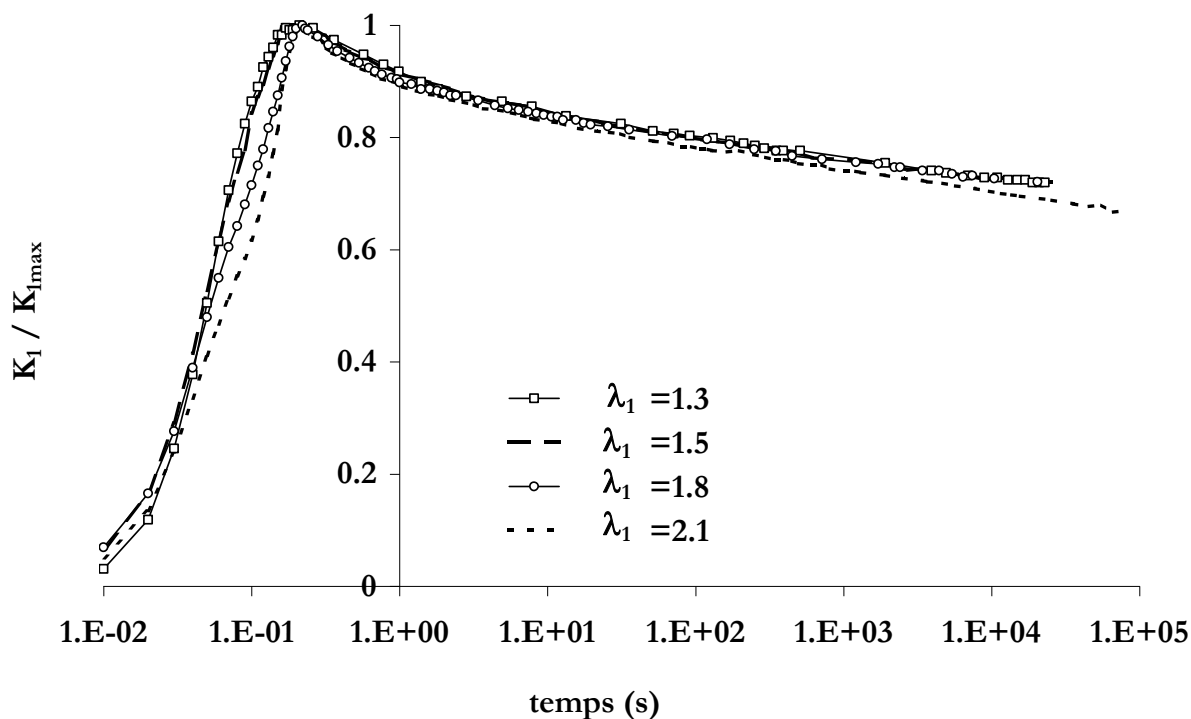
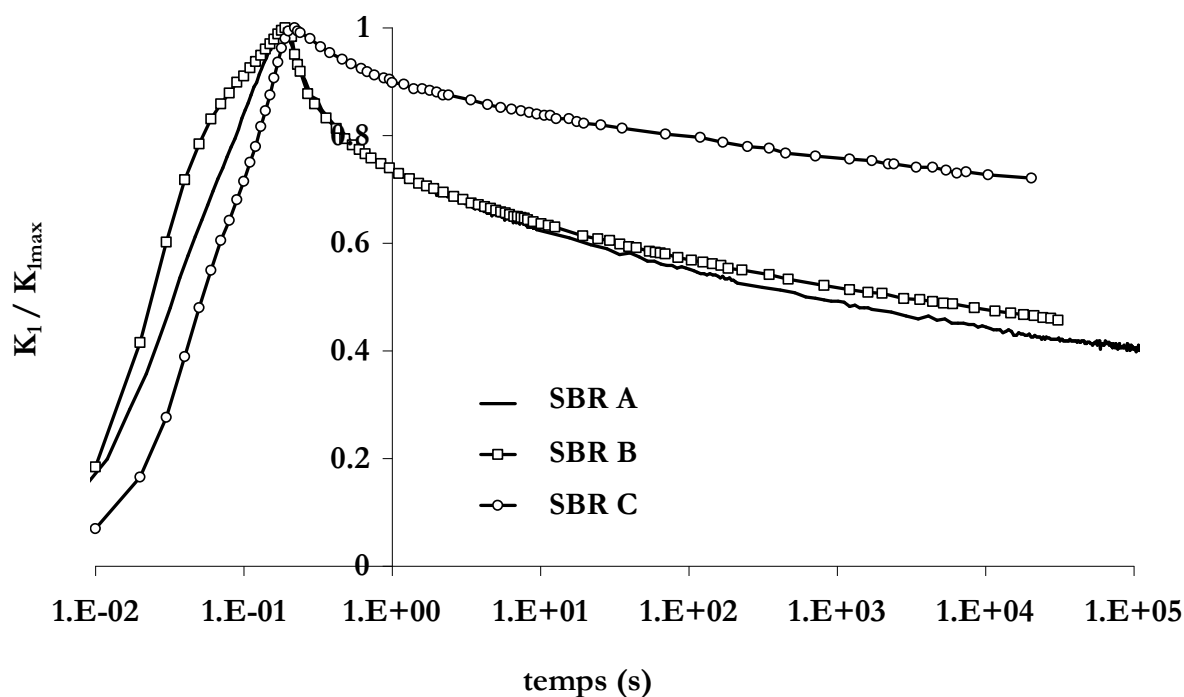


Figure 2D.4 – SBR C – Relaxation en traction uniaxiale

Comme dans le cas du SBR A, la relaxation de la contrainte normalisée ne dépend pas de l'élongation subie par la matière.

La Fig. 2D.5 présente trois essais de relaxation effectués à la même élongation pour les 3 nuances de SBR égale à 1.8. On constate que les nuances A et B présentent des relaxations similaires. La relaxation du SBR C est très inférieure.



**Figure 2D.5** – SBR A, B, C – Relaxation en traction uniaxiale – Comparaison entre les 3 nuances

### Traction uniaxiale cyclique

Les Fig. 2D.6 et 2D.7 permettent de comparer les 1<sup>ers</sup> et 5<sup>èmes</sup> cycles d'essais effectués avec une élongation maximale de 1.5 et à la même vitesse. On retrouve le classement des modules tangents SBR B > SBR A > SBR C. L'élongation rémanente et le pourcentage d'énergie dissipée lors du 1<sup>er</sup> et du 5<sup>ème</sup> cycle par rapport à l'énergie fournie lors de la montée en charge correspondante – tableau de la Fig. 2D.8 – sont classés de la même façon.

La différence de composition des trois nuances en éléments C, O, Si, S, Zn, Al, Mg et Ca ne nous permet pas d'expliquer la différence de comportement mécanique.

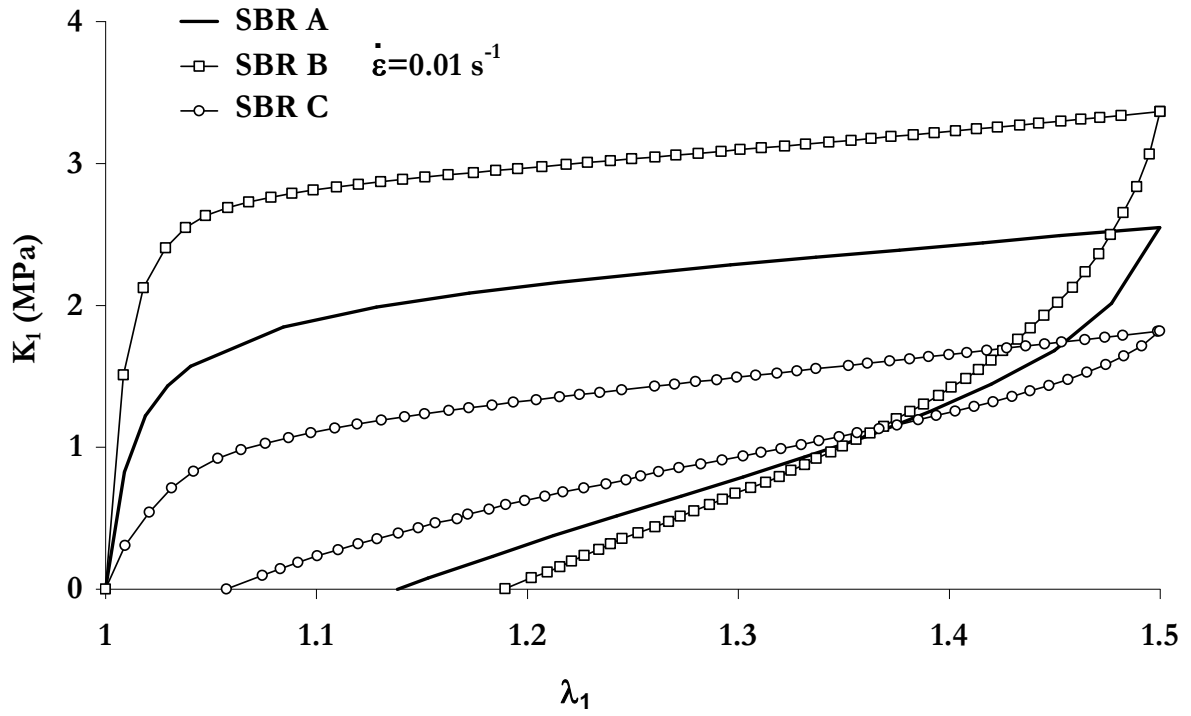


Figure 2D.6 – SBR A, B, C – Traction uniaxiale cyclique – 1<sup>ers</sup> cycles - Comparaison entre les 3 nuances

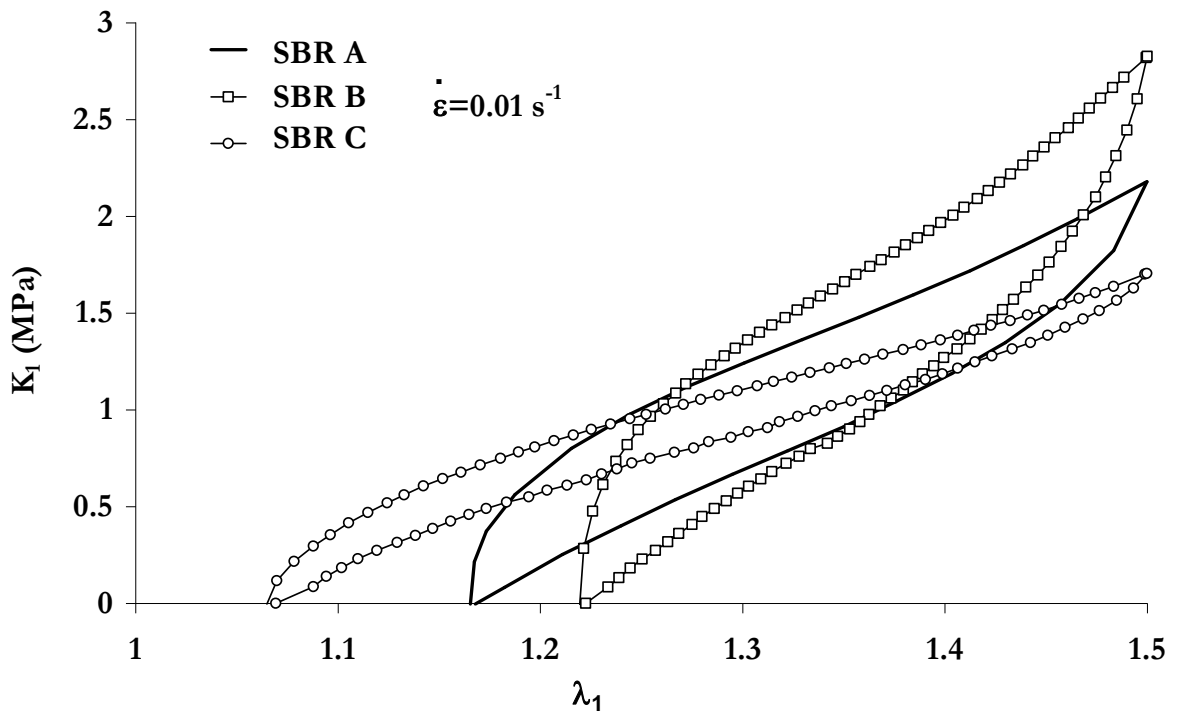


Figure 2D.7 – SBR A, B, C – Traction uniaxiale cyclique – 5<sup>emes</sup> cycles - Comparaison entre les 3 nuances

1 <sup>er</sup> cycle	E dissipée (J/mm3)	% E dissipée
SBR A	710	67
SBR B	1120	76
SBR C	290	43
5 <sup>ème</sup> cycle		
SBR A	160	35
SBR B	180	38
SBR C	90	19

**Figure 2D.8** – SBR A, B, C –Tableau récapitulatif des énergies dissipées sous chargement de traction uniaxiale cyclique - Comparaison entre les 3 nuances

## Annexe 2E

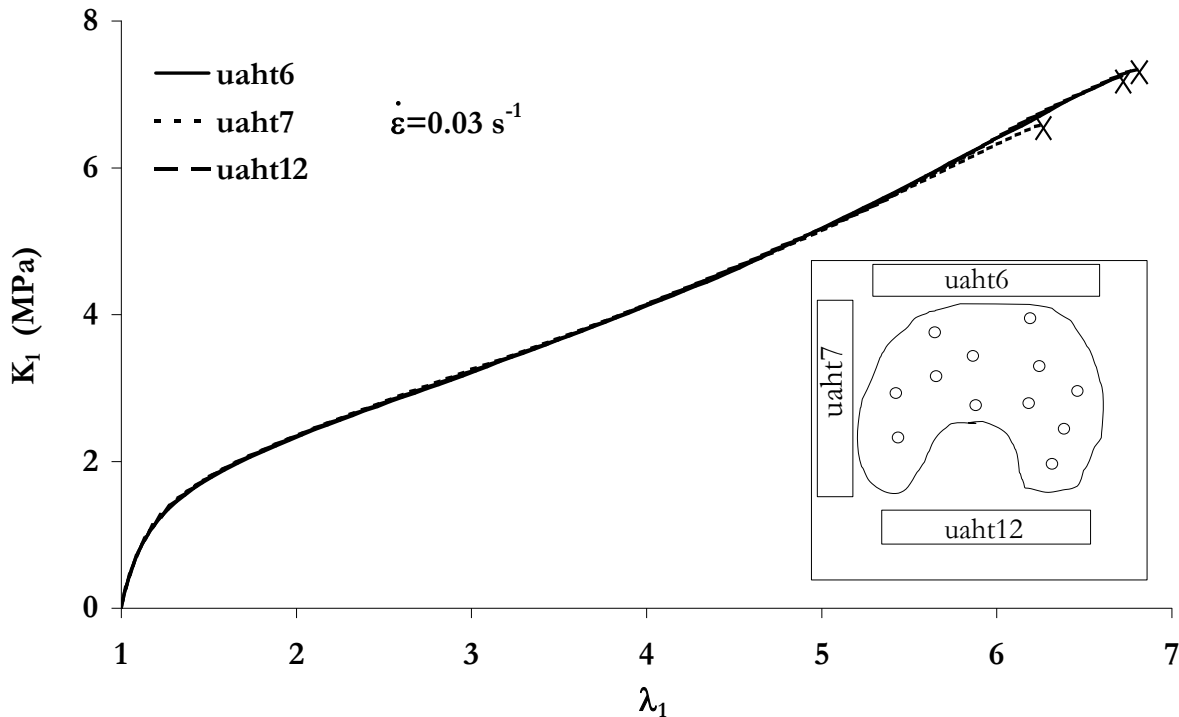
### Influence de la mise en forme

### Cas du PU

Seules des plaques injectées 200x200 mm<sup>2</sup> ont été fournies dans le cas du PU. Cependant, comme explicité dans le 1<sup>er</sup> chapitre, la taille des pores n'est pas constante dans ces plaques. Les essais décrits ci-dessous décrivent la dispersion du comportement mécanique selon le prélèvement dans une même plaque, et selon les plaques.

#### Dispersion du comportement d'éprouvettes prélevées dans une même plaque

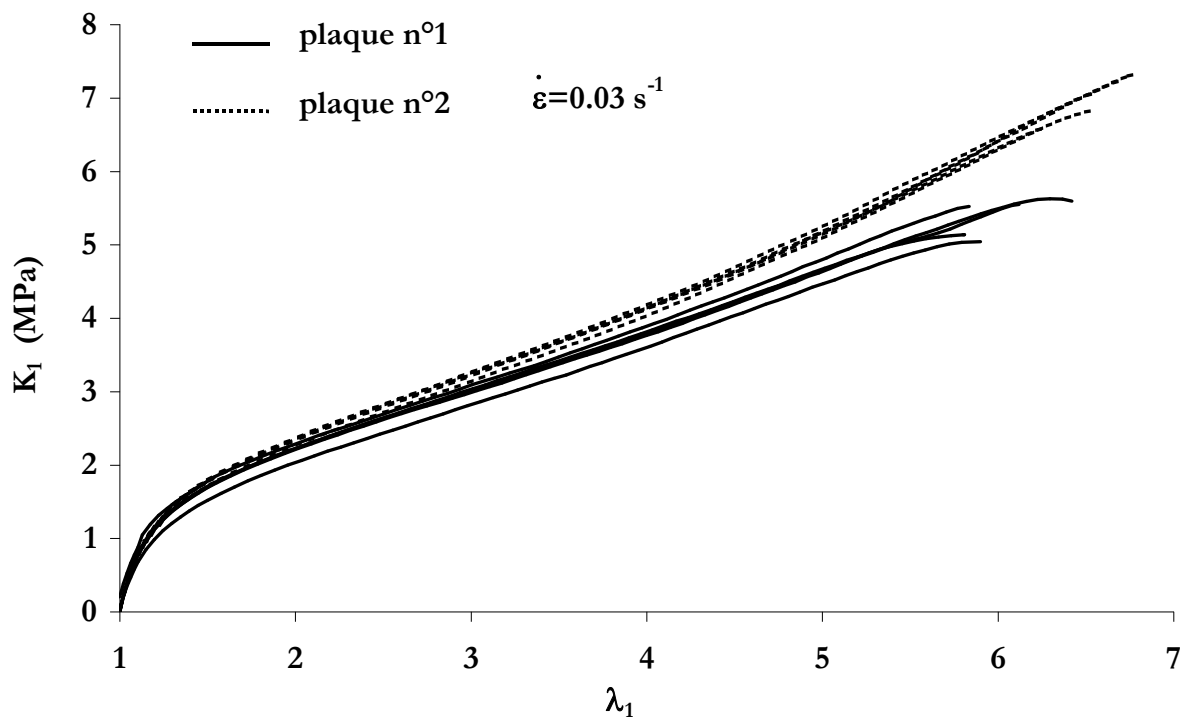
La Fig. 2E.1 illustre la dispersion observée sur 3 éprouvettes prélevées autour du 'croissant' de grosses porosités. La dispersion se situe au niveau des contraintes et elongations à rupture.



**Figure 2E.1** – Traction uniaxiale– Dispersion du comportement d'éprouvettes prélevées dans la même plaque

#### Dispersion du comportement d'éprouvettes prélevées dans des plaques différentes

La Fig. 2E.2 montre deux familles de courbes qui représentent des populations d'éprouvettes issues de deux plaques différentes. Une faible dispersion est mise en évidence sur les comportements d'éprouvettes issues de la même plaque. Une dispersion importante apparaît entre les deux populations d'éprouvettes. Les contraintes moyennes et elongation moyennes à la rupture passent de 5.5 MPa et 6 à 7 MPa et 6.5. Les raideurs varient également légèrement.



**Figure 2E.2** – Traction uniaxiale– Dispersion du comportement d'éprouvettes prélevées dans deux plaques

---

### Conclusion

Les dispersions sont notables mais ne paraissent pas rédhibitoires pour l'étude. Il faudrait bien évidemment comparer ce comportement des plaques au comportement d'autres types d'éprouvettes, et aussi des semelles.

---

## Annexe 3A

### Expression de la contrainte dans le cas d'un essai de traction uniaxiale à partir du potentiel de Rivlin généralisé

Considérons un matériau homogène, isotrope et incompressible.

Dans la cas d'un chargement de traction uniaxiale, le tenseur  $\mathbb{C}$  est exprimé dans le repère principal :

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

La direction 1 est la direction de traction.

Les elongations, qui correspondent à la racine carrée des valeurs propres de  $\mathbb{C}$ , sont donc  $(\lambda, 1/\sqrt{\lambda}, 1/\sqrt{\lambda})$ .

Les invariants du tenseur  $\mathbb{C}$  sont :

$$I_1 = \lambda^2 + 2/\lambda \quad I_2 = 2\lambda + 1/\lambda^2$$

L'expression de la contrainte peut s'obtenir de plusieurs façons différentes selon les hypothèses utilisées.

Dans le **cas général**, la loi de comportement exprimée dans la configuration lagrangienne revient à écrire la contrainte de Piola-Kirchoff 2 en fonction des invariants du tenseur  $\mathbb{C}$  (voir § 3.2.1):

$$\mathbb{S} = 2 \cdot \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \right) \right) \mathbb{I} - 2 \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbb{C} + (p + p_0) \mathbb{C}^{-1} \right]$$

Le terme  $p_0$  correspond au décalage de l'origine des pressions. Il permet de vérifier que lorsque  $\mathbb{F} = \mathbb{I}$ ,

$\mathbb{S} = \mathbb{O}$ . Le terme  $p$  est le multiplicateur de Lagrange.

On a alors :

$$S_1 = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{2}{\lambda} + \frac{(p + p_0)}{\lambda^2} \right) \right]$$

$$S_2 = S_3 = 2 \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \left( \lambda^2 + \frac{1}{\lambda} \right) + (p + p_0) \cdot \lambda \right) \right]$$

$(S_1, S_2, S_3)$  sont les contraintes principales.

Lorsque  $\lambda=1$ ,  $S_1=0$ . Le terme  $p$  est nul et le terme  $p_0$  peu alors être identifié. En effet,

$$\frac{\partial W}{\partial I_1}(\lambda=1) = c_{10} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial I_2}(\lambda=1) = c_{01}$$

$$\text{Ainsi,} \quad S_1(\lambda=1) = 2[c_{10} + 2 \cdot c_{01} + p_0]$$

$$\text{D'où} \quad p_0 = -c_{10} - 2 c_{01}$$



La condition d'incompressibilité est déjà prise en compte puisqu'elle permet d'écrire le tenseur  $\mathbb{C}$ . Les conditions limites, qui n'ont pas encore été prises en compte, imposent  $S_2 = S_3 = 0 \forall \lambda$ . On obtient alors:

$$p = -2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{1}{\lambda} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right)$$

En remplaçant l'expression de  $p$  dans celle de  $S_1$ , on obtient :

$$S_1 = 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{1}{\lambda} \right).$$

Donc,

$$S_1 = 2 \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left[ C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda} + 3 C_{11} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) + 2 C_{20} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 2 C_{02} \left( 2 + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda} \right) + C_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right]$$

En utilisant les relations de passage entre la contrainte de Piola-Kirchoff n°2 ( $\mathbb{S}$  tenseur lagrangien) et la contrainte de Piola-Kirchoff n°1 ( $\mathbb{K}$  tenseur mixte), on obtient :

$$K_1 = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[ C_{10} + C_{01} \frac{1}{\lambda} + 3 C_{11} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) + 2 C_{20} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 2 C_{02} \left( 2 + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda} \right) + C_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right]$$

Notons que le coefficient  $C_{10}$  peut être identifié au coefficient de la loi de Flory :  $C_{10} = \frac{\rho_0 R \theta}{M_c}$  si on ne considère pas la suite du développement.

Le **raisonnement simplifié** consiste à mener les calculs en prenant en compte les hypothèses d'incompressibilité et les conditions limites dès le début du calcul. Considérons un état de contrainte uniaxiale. Dans le repère principal,  $k_2 = k_3 = 0$

La densité d'énergie s'écrit alors :

$$W = \int K_1 d\lambda_1 = K d\lambda$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda^2 + 2/\lambda$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 2\lambda + 1/\lambda^2$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$$

$$\frac{dI_1}{d\lambda} = 2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{et} \quad \frac{dI_2}{d\lambda} = 2 - \frac{2}{\lambda^3}$$

$$K_1 = \frac{dW}{d\lambda} = \frac{\partial W}{\partial I_1} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \cdot \frac{\partial I_2}{\partial \lambda}$$

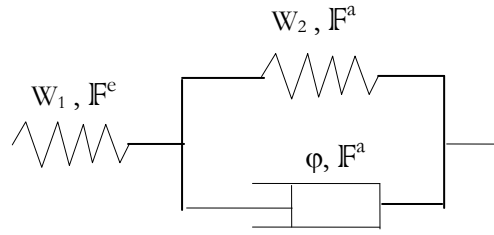
$$K_1 = 2 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left[ c_{10} + c_{01} \cdot \frac{1}{\lambda} + c_{11} \cdot 3 \left( \lambda - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right) + c_{20} \cdot 2 \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + c_{02} \cdot 2 \left( 2 + \frac{1}{\lambda^3} - \frac{3}{\lambda} \right) + c_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right]$$

Les conditions limites sont respectées puisqu'elles ont été faites dès le début du calcul. On retrouve l'expression déterminée plus haut dans le cas général.

## Annexe 3B

### Le modèle de Poynting-Thomson généralisé aux grandes transformations - Détermination des équations d'état et complémentaire

Le schéma rhéologique du modèle de Poynting-Thomson est le suivant :



**Figure 3.16** – Schéma du modèle rhéologique de Poynting-Thomson

$W_1$  et  $W_2$  sont les potentiels hyperélastiques représentés par les ressorts. Ils sont représentés par des fonctions polynomiales des invariants de leurs tenseurs des dilatations de Cauchy-Green droits respectifs (approche de Rivlin). Le potentiel  $W_1$  est développé au second ordre dans le code. Le potentiel  $W_2$  est développé au premier ordre seulement afin de réduire la taille des équations.

$$W_1 = C_{10}^e (I_1^e - 3) + C_{01}^e (I_2^e - 3) + C_{20}^e (I_1^e - 3)^2$$

$$W_2 = C_{10}^a (I_1^a - 3) + C_{01}^a (I_2^a - 3)$$

Les coefficients  $C_{ij}^e$  représentent la partie hyperélastique du comportement. Les coefficients  $C_{ij}^a$  attachés au ressort en parallèle avec l'amortisseur représentent la partie viscoélastique (ou anélastique) du modèle. Ces coefficients sont les paramètres à optimiser.

$\phi$  est le pseudo-potentiel de dissipation représenté par le patin. Il est choisi de la forme [Boukamel et al., 1997]:

$$\phi = \frac{1}{2} f_v \dot{\mathbb{C}}^a : \dot{\mathbb{C}}^a$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbb{C}}^a} = f_v \dot{\mathbb{C}}^a$$

Dans le paragraphe précédent, les variables d'état sont choisies :  $(\mathbb{C}, \theta, \mathbb{C}^a)$ . Les variables forces thermodynamiques associées sont alors  $(\mathbb{S}, \eta, \mathbb{S}^a)$ . Ce choix implique que les deux variables  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^a$  sont indépendantes. On peut donc écrire

$$\frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \mathbb{C}^a} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial W_2}{\partial \mathbb{C}} = 0$$

Les équations d'état et équation complémentaire sont alors :

$$\mathbb{S} = 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{C}} = 2 \rho_0 \frac{\partial W_1}{\partial \mathbb{C}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbb{C}}^a} + \frac{\partial W_1}{\partial \mathbb{C}^a} + \frac{\partial W_2}{\partial \mathbb{C}^a} = 0$$

L'hypothèse d'incompressibilité impose que les contraintes de Cauchy sont connues à une pression hydrostatique près. Les termes  $p\mathbb{C}^{-1}$  et  $q\mathbb{C}^{a-1}$  sont alors ajoutés aux contraintes  $\mathbb{S}$  et  $\mathbb{S}^a$  respectivement.

Les lois de comportement et complémentaire peuvent s'écrire alors :

$$\begin{cases} \mathbb{S} = 2 \frac{\partial W_1}{\partial \mathbb{C}} - p\mathbb{C}^{-1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbb{C}}^a} + \frac{\partial W_1}{\partial \mathbb{C}^a} + \frac{\partial W_2}{\partial \mathbb{C}^a} - q\mathbb{C}^{a-1} = 0 \end{cases}$$

Dans toute la suite, il s'agit de calculer chaque terme provenant de la dérivation de l'énergie par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit. Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques définitions et résultats préalables.

- $(I_1^e, I_2^e)$  resp.  $(I_1^v, I_2^v)$  sont les premier et second invariants des tenseurs de Cauchy-Green droit "élastique" resp. "viscoélastique". Par définition, pour un tenseur
- $\mathbb{C} : I_1 = \text{trace}(\mathbb{C})$  et  $I_2 = \frac{1}{2}(\text{trace}(\mathbb{C})^2 - \text{trace}(\mathbb{C} \cdot \mathbb{C}))$ .
- $\mathbb{F} = \mathbb{F}^e \cdot \mathbb{F}^a \Rightarrow \mathbb{F}^e = \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^{a-1}$   
 $\mathbb{C}^e = \mathbb{F}^{eT} \cdot \mathbb{F}^e = \mathbb{F}^{a-T} \cdot \mathbb{F}^T \cdot \mathbb{F} \cdot \mathbb{F}^{a-1} = \mathbb{F}^{a-T} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{F}^{a-1}$
- $\mathbb{C}^a = \mathbb{F}^{aT} \cdot \mathbb{F}^a \Rightarrow \mathbb{C}^{a-1} = \mathbb{F}^{a-1} \cdot \mathbb{F}^{a-T}$
- $\frac{\partial I_1}{\partial \mathbb{C}} = \mathbb{I} \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbb{C}} = I_1 \mathbb{I} - \mathbb{C}$

En écrivant les équations ci-dessus en fonction des invariants des tenseurs des déformations de Cauchy-Green droit :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbb{S}} = 2 \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}} + 2 \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbb{C}} - p\mathbb{C}^{-1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\mathbb{C}}^a} + \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}^a} + \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} \frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbb{C}^a} + \frac{\partial W_2}{\partial I_1^a} \frac{\partial I_1^a}{\partial \mathbb{C}^a} + \frac{\partial W_2}{\partial I_2^a} \frac{\partial I_2^a}{\partial \mathbb{C}^a} - q\mathbb{C}^{a-1} = 0 \end{cases}$$

On utilise les notations d'Einstein ainsi que le symbole de Kronecker  $\delta_{ij}$ , pour simplifier les écritures.

## ETABLISSEMENT DE LA LOI D'ETAT

- Calcul de  $\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}}$

$$I_1^e = \mathbb{C}_{ii}^e = \mathbb{F}_{ik}^{a^{-T}} \cdot \mathbb{C}_{kl} \cdot \mathbb{F}_{li}^{a^{-1}} = \mathbb{F}_{li}^{a^{-1}} \cdot \mathbb{F}_{ik}^{a^{-T}} \cdot \mathbb{C}_{kl} = \mathbb{C}_{lk}^{a^{-1}} \cdot \mathbb{C}_{kl}$$

D'où :  $I_1^e = \mathbb{C}^{a^{-1}} : \mathbb{C}$

$$\left( \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}} \right)_{mn} = \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}_{mn}} = \mathbb{C}_{lk}^{a^{-1}} \frac{\partial \mathbb{C}_{kl}}{\partial \mathbb{C}_{mn}} = \mathbb{C}_{lk}^{a^{-1}} \delta_{km} \delta_{ln} = \mathbb{C}_{nm}^{a^{-1}}$$

Et comme  $\mathbb{C}^{a^{-1}}$  est symétrique ( $\mathbb{C}_{nm}^{a^{-1}} = \mathbb{C}_{mn}^{a^{-1}}$ ), on en conclut que :

$$\left( \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}} \right) = \mathbb{C}^{a^{-1}}$$

- Calcul de  $\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbb{C}}$

$$I_2^e = \frac{1}{2} \left( I_1^{e^2} - \mathbb{C}_{ij}^e \mathbb{C}_{ji}^e \right)$$

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbb{C}} = I_1^e \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbb{C}_{ij}^e \mathbb{C}_{ji}^e)}{\partial \mathbb{C}} = I_1^e \mathbb{C}^{v^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbb{C}_{ij}^e \mathbb{C}_{ji}^e)}{\partial \mathbb{C}}$$

Calculons  $\mathbb{C}_{ij}^e \mathbb{C}_{ji}^e$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{ij}^e \mathbb{C}_{ji}^e &= \mathbb{F}_{ik}^{a^{-T}} \mathbb{C}_{kl} \mathbb{F}_{lj}^{a^{-1}} \mathbb{F}_{jr}^{a^{-T}} \mathbb{C}_{rs} \mathbb{F}_{si}^{a^{-1}} = (\mathbb{F}_{si}^{a^{-1}} \mathbb{F}_{ik}^{a^{-T}}) (\mathbb{F}_{lj}^{a^{-1}} \mathbb{F}_{jr}^{a^{-T}}) \mathbb{C}_{kl} \mathbb{C}_{rs} \\ &= \mathbb{C}_{sk}^{v^{-1}} \mathbb{C}_{kl} \mathbb{C}_{lr}^{v^{-1}} \mathbb{C}_{rs} = (\mathbb{C}^{v^{-1}} \mathbb{C})_{sl} (\mathbb{C}^{v^{-1}} \mathbb{C})_{ls} = (\mathbb{C}^{v^{-1}} \mathbb{C}) : (\mathbb{C} \mathbb{C}^{v^{-1}}) \end{aligned}$$

Dérivons cette dernière expression par rapport à  $\mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial (\mathbb{C}^{a^{-1}} : \mathbb{C} : \mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^{a^{-1}})}{\partial \mathbb{C}} \right)_{mn} &= \frac{\partial (\mathbb{C}^{a^{-1}} : \mathbb{C} : \mathbb{C} \cdot \mathbb{C}^{a^{-1}})}{\partial \mathbb{C}_{mn}} = \frac{\partial (\mathbb{C}_{il}^{a^{-1}} \cdot \mathbb{C}_{lk} \cdot \mathbb{C}_{ij} \cdot \mathbb{C}_{jk}^{a^{-1}})}{\partial \mathbb{C}_{mn}} \\ &= \mathbb{C}_{il}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{jk}^{a^{-1}} \frac{\partial (\mathbb{C}_{lk})}{\partial \mathbb{C}_{mn}} \mathbb{C}_{ij} + \mathbb{C}_{il}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{jk}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{lk} \frac{\partial (\mathbb{C}_{ij})}{\partial \mathbb{C}_{mn}} \\ &= \mathbb{C}_{il}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{jk}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{ij} \delta_{lm} \delta_{kn} + \mathbb{C}_{il}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{jk}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{lk} \delta_{im} \delta_{jn} \\ &= \mathbb{C}_{im}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{jn}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{ij} + \mathbb{C}_{ml}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{nk}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{lk} \\ &= \mathbb{C}_{mi}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{ij} \mathbb{C}_{jn}^{a^{-1}} + \mathbb{C}_{ml}^{a^{-1}} \mathbb{C}_{lk} \mathbb{C}_{kn}^{a^{-1}} \quad (\text{car } \mathbb{C}^{a^{-1}} \text{ symétrique}) \\ &= 2 \mathbb{C}^{a^{-1}} \mathbb{C} \mathbb{C}^{a^{-1}} \end{aligned}$$

Ainsi : 
$$\frac{\partial I_2^e}{\partial \mathbb{C}} = I_1^e \mathbb{C}^{a-1} - \mathbb{C}^{a-1} \mathbb{C} \mathbb{C}^{a-1}$$

La loi de comportement pour le modèle de Poynting-Thomson s'écrit finalement :

$$\mathbb{S} = 2 \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} + \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \mathbb{I} - \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} \mathbb{C}^{a-1} \mathbb{C} \right] \mathbb{C}^{a-1} - p \mathbb{C}^{-1}$$

## ETABLISSEMENT DE LA LOI COMPLEMENTAIRE

- Calcul de  $\frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}^a}$

Rappelons que  $I_1^e = \mathbb{C}^{a-1} : \mathbb{C}$

Donc, 
$$\left( \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}^a} \right)_{mn} = \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = \frac{\partial \mathbb{C}_{lk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} \mathbb{C}_{kl}$$

En partant de :  $\mathbb{C}^{a-1} \mathbb{C}^a = \mathbb{I}$  ou  $\mathbb{C}_{il}^{a-1} \mathbb{C}_{ln}^a = \delta_{in}$

On peut écrire que :

$$\frac{\partial (\mathbb{C}_{ij}^a \mathbb{C}_{jk}^{a-1})}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = \delta_{im} \delta_{jn} \mathbb{C}_{jk}^{a-1} + \mathbb{C}_{ij}^a \frac{\partial \mathbb{C}_{jk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = 0$$

Multiplions la dernière équation par  $\mathbb{C}_{li}^{a-1}$

$$\delta_{im} \delta_{jn} \mathbb{C}_{li}^{a-1} \mathbb{C}_{jk}^{a-1} + \mathbb{C}_{li}^{a-1} \mathbb{C}_{ij}^a \frac{\partial \mathbb{C}_{jk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = 0$$

$$\mathbb{C}_{lm}^{a-1} \mathbb{C}_{nk}^{a-1} + \delta_{lj} \frac{\partial \mathbb{C}_{jk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = 0$$

$$\mathbb{C}_{lm}^{a-1} \mathbb{C}_{nk}^{a-1} + \frac{\partial \mathbb{C}_{lk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = 0$$

On en déduit que : 
$$\frac{\partial \mathbb{C}_{lk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} = -\mathbb{C}_{lm}^{a-1} \mathbb{C}_{nk}^{a-1}$$

Ainsi, 
$$\left( \frac{\partial I_1^e}{\partial \mathbb{C}^a} \right)_{mn} = \frac{\partial \mathbb{C}_{lk}^{a-1}}{\partial \mathbb{C}_{mn}^a} \mathbb{C}_{kl} = -\mathbb{C}_{lm}^{a-1} \mathbb{C}_{nk}^{a-1} \mathbb{C}_{kl}$$

Comme  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^{a-1}$  sont symétriques :  $\mathbb{C}_{lm}^{a-1} \mathbb{C}_{nk}^{a-1} \mathbb{C}_{kl} = \mathbb{C}_{ml}^{a-1} \mathbb{C}_{lk} \mathbb{C}_{nk}^{a-1}$

En définitive :  $\left( \frac{\partial I_1^e}{\partial C^a} \right) = -C^{a-1} C C^{a-1}$

- Calculs de  $\frac{\partial I_2^e}{\partial C^a}$

$$I_2^e = \frac{1}{2} (I_1^{e^2} - C_{ij}^e C_{ji}^e)$$

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial C^a} = I_1^e \frac{\partial I_1^e}{\partial C^a} - \frac{1}{2} \frac{\partial (C_{ij}^e C_{ji}^e)}{\partial C^a} = -I_1^e C^{a-1} C C^{a-1} - \frac{1}{2} \frac{\partial (C_{ij}^e C_{ji}^e)}{\partial C^a}$$

Nous avons vu que  $C_{ij}^e C_{ji}^e = (C^{a-1} C) : (C C^{a-1})$  et que :

$$\frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C} = 2 C^{a-1} C C^{a-1}$$

La démonstration de cette dernière égalité permet d'écrire que :

$$\frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C^{a-1}} = 2 C C^{a-1} C$$

On a donc :

$$\frac{\partial (C_{ij}^e C_{ji}^e)}{\partial C^a} = \frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C^a}$$

$$\left( \frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C^a} \right)_{mn} = \frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C_{mn}^a} = \frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C_{kl}^{a-1}} \frac{\partial C_{kl}^{a-1}}{\partial C_{mn}^a}$$

Or, on a :  $\frac{\partial C_{kl}^{a-1}}{\partial C_{mn}^a} = -C_{km}^{a-1} C_{ln}^{a-1}$

On obtient donc :

$$\left( \frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C^a} \right)_{mn} = (2 C C^{a-1} C)_{kl} (-C_{km}^{a-1} C_{ln}^{a-1}) = -2 C_{mk}^{a-1} (C C^{a-1} C)_{kl} C_{ln}^{a-1}$$

Soit :

$$\frac{\partial (C^{a-1} C : C C^{a-1})}{\partial C^a} = -2 C^{a-1} (C C^{a-1} C) C^{a-1}$$

En conclusion :  $\frac{\partial I_2^e}{\partial C^a} = -I_1^e C^{a-1} C C^{a-1} + C^{a-1} (C C^{a-1} C) C^{a-1}$

- Calculs de  $\frac{\partial I_1^a}{\partial C^a}$

$$\frac{\partial I_1^a}{\partial C^a} = \mathbb{I}$$

- Calculs de  $\frac{\partial I_2^a}{\partial C^a}$

$$\frac{\partial I_2^a}{\partial C^a} = I_1^a \mathbb{I} - C^a$$

L'équation de la loi complémentaire est donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial C^a} - C^{a-1} C \left[ \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} \mathbb{I} + \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} (I_1^e \mathbb{I} - C^{a-1} C) \right] C^{a-1} + \frac{\partial W_2}{\partial I_1^a} \mathbb{I} + \frac{\partial W_2}{\partial I_2^a} (I_1^a \mathbb{I} - C^a) - q C^{a-1} = 0$$

Soit :

$$f_a \dot{C}^a - C^{a-1} C \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial I_1^e} + \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} I_1^e \right) \mathbb{I} - \frac{\partial W_1}{\partial I_2^e} C^{a-1} C \right] C^{a-1} + \left( \frac{\partial W_2}{\partial I_1^a} + \frac{\partial W_2}{\partial I_2^a} I_1^a \right) \mathbb{I} - \frac{\partial W_2}{\partial I_2^a} C^a - q C^{a-1} = 0$$

## Annexe 3C

### Identification du SBR de nuance A

### Construction du cycle d'endommagement

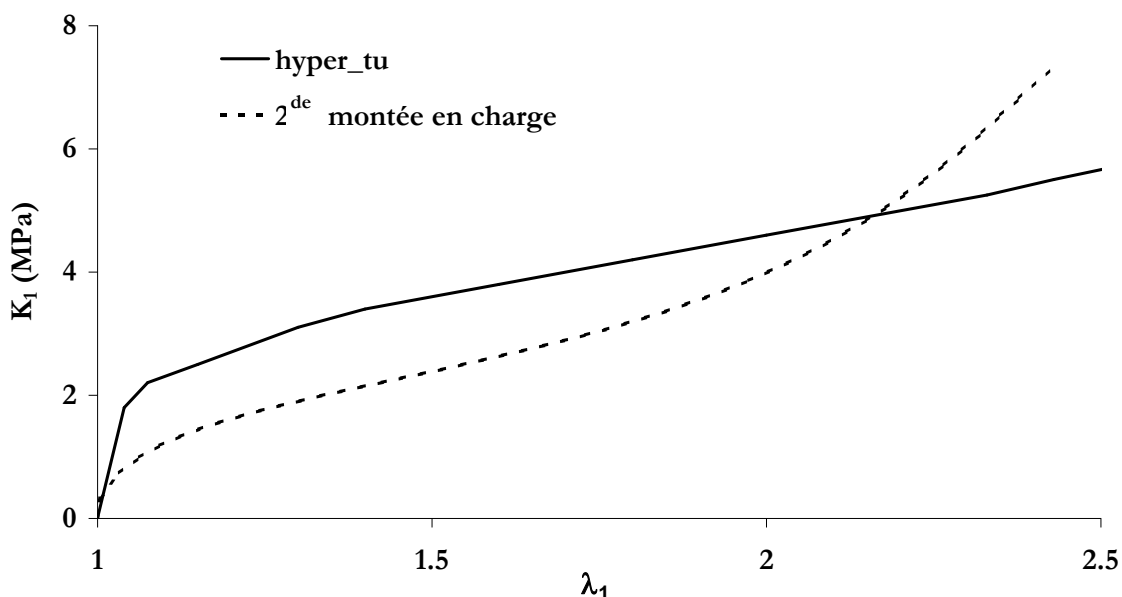
Le premier cycle des essais de traction uniaxiale lents fait apparaître à la fois l'hystérésis d'endommagement, indépendante de la vitesse de sollicitation, et l'hystérésis viscoélastique, liée à la vitesse de sollicitation. Afin de découpler les effets de ces deux composantes du comportement et simplifier l'optimisation, il est apparu nécessaire de construire une «*courbe idéale d'endommagement*».

Une telle courbe n'a pu être obtenue expérimentalement. En effet, le pilotage et l'acquisition sont impossibles à des vitesses élevées sur les machines dont nous disposons. Cette courbe est donc reconstituée à partir d'essais de traction uniaxiale cycliques lents. Nous allons alors essayer d'isoler la dissipation due à l'endommagement de la dissipation viscoélastique. Deux étapes nous ont conduit à la construction d'une «*courbe idéale d'endommagement*».

#### Etape 1

L'essai de traction uniaxiale cyclique effectué avec une élongation maximale égale à 3 est choisi. La seconde montée en charge de l'essai est sélectionnée. Lors de cette seconde montée en charge, le dommage est constant puisqu'il a atteint sa valeur maximale à la fin de la première montée en charge - hypothèse du dommage discontinu -. Les variables mécaniques, élongation et contrainte, sont alors «réinitialisées» : la montée en charge est tracée en fonction de  $F/S_i$  et de  $\lambda - \lambda_{\text{rém}}$ .  $\lambda_{\text{rém}}$  est l'élongation rémanente mesurée à la fin du premier cycle et  $S_i$  la section de l'éprouvette au début du second cycle calculée d'après l'hypothèse de déformation isovolume ( $S_0 = S_i \cdot \lambda_{\text{rém}}$ ). L'élongation maximale devient alors 2.45. On suppose que cette «réinitialisation» annule les effets viscoélastiques.

La courbe de premier chargement rapide nommée hyper\_tu, tronquée à l'élongation 2.45 lui est superposée – Fig. 3C.1 –.



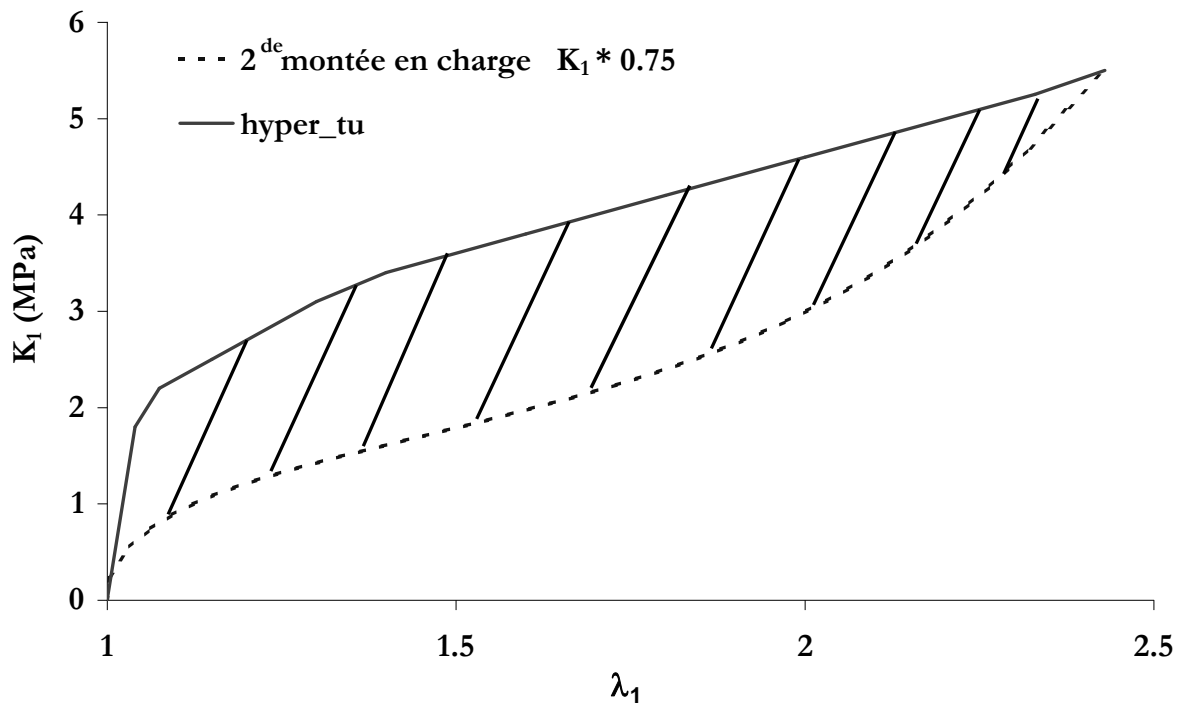


**Figure 3C.1** – Construction de la ‘courbe idéale d’endommagement’ – 1<sup>ère</sup> étape – 1<sup>ère</sup> montée en charge rapide et 2<sup>ème</sup> montée en charge ‘réinitialisée’

## Etape2

On note sur la Fig. 3C.1 que la courbe de second chargement réinitialisée atteint des contraintes supérieures à la courbe de premier chargement. Ceci est certainement dû à la diminution de section de l'éprouvette à la fin du premier cycle. Afin de faire coïncider les sommets de ces deux courbes, les contraintes de la deuxième montée en charge sont simplement multipliées par le facteur 0.75 – Fig. 3C.2- La seconde montée en charge peut alors être considérée comme le retour à charge nulle de la première montée en charge.

Le cycle reconstitué à partir de ces deux courbes (1<sup>ère</sup> montée en charge et 2<sup>ème</sup> montée en charge réinitialisée ( $\lambda - \lambda_{\text{rem}}, F/S_i * 0.75$ )) est appelé  $a_{\text{endo}}$ . Il fait apparaître une hystérèse (zone hachurée) que l'on considère représentative de l'endommagement du matériau.



**Figure 3C.2** – Construction de la ‘courbe idéale d’endommagement’ – 2<sup>ème</sup> étape – 1<sup>ère</sup> montée en charge rapide et 2<sup>ème</sup> montée en charge ‘réinitialisée’ avec  $F/S_i \cdot 0.75$  – Hystérésis d’endommagement

Remarque : La modélisation hyperélastique-viscoélastique-endommaegable que nous avons choisie d’appliquer au comportement du SBR chargé attribue l’ensemble de la déformation progressive à la viscoélasticité. Nous avons cependant observé que cette déformation était en partie recouvrable (viscoélastique) et en partie permanente (plastique). Ainsi, notre ‘ré-initialisation’ est quelque peu abusive puisqu’elle annule également la déformation permanente. La plus grande raideur du matériau lors de la seconde montée en charge découle de cette ‘ré-initialisation’.

## Annexe 3D

### Identification du SBR de nuance A

### Détail de la procédure

La procédure nécessite trois étapes pour un résultat acceptable :

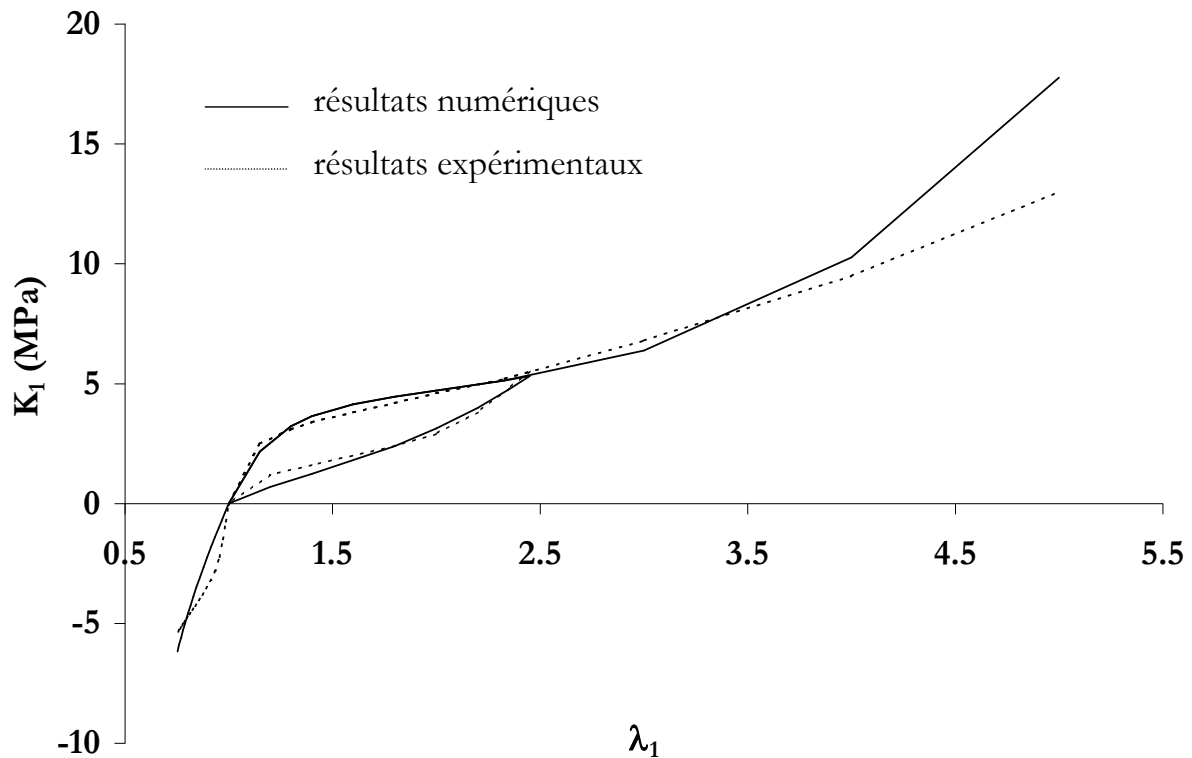
- optimisation de  $(C_{10}, C_{01}, C_{20}, d_{\infty}, \eta)$  avec les courbes rapides de traction uniaxiale, compression uniaxiale et endommagement
  - optimisation des poids de relaxation  $(g_1, g_2, g_3, g_4, g_5)$  avec les essais de relaxation
  - re-optimisation des coefficients  $(C_{10}, C_{01}, C_{20})$  avec les essais cycliques
- Les étapes sont décrites ci-dessous en détail.

#### Optimisation de $C_{10}, C_{01}, C_{20}, d_{\infty}, \eta$ - 1<sup>ère</sup> itération – jeu n°1

Les courbes sélectionnées pour l'identification sont:

- hyper\_cu : compression uniaxiale rapide sur pion issu d'un plot  $\dot{\epsilon} \approx 1.3 \text{ s}^{-1}$
- hyper\_tu : traction uniaxiale rapide  $\dot{\epsilon} \approx 6 \text{ s}^{-1}$
- a\_endo : courbe 'idéale d'endommagement'  $\dot{\epsilon} \approx 6 \text{ s}^{-1}$

Les 5 coefficients  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, d_{\infty}, \eta$  sont optimisés simultanément à partir de ces trois courbes. La Fig. 3D.1 illustre le résultat, en présentant les courbes-modèles et leur simulation.



**Figure 3D.1** – identification des coefficients  $(C_{10}, C_{01}, C_{20}, d_{\infty}, \eta)$  sur les courbes 'rapides' - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°1

Les valeurs du jeu n°1 sont :

$$\begin{pmatrix} C_{10} = 1.941 \\ C_{01} = 1.535 \\ C_{20} = 0.396 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} d_{\infty} = 0.914 \\ \eta = 0.719 \end{pmatrix}$$

Les valeurs élevées des coefficients  $C_{10}$  et  $C_{01}$  sont dues à la forte pente initiale.

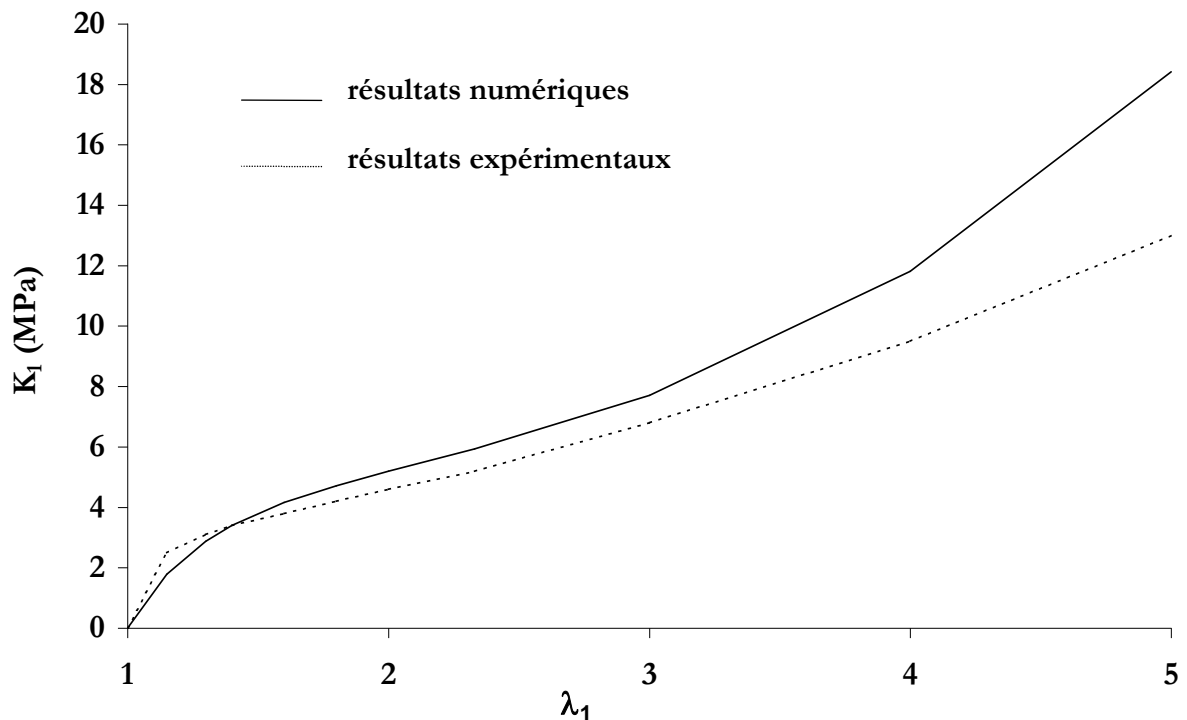
### Optimisation de $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ – jeu n°2

Les temps sont choisis au nombre de cinq et sont fixés égaux à 0.2, 2, 20, 200 et 2000 s. Il reste à identifier les poids correspondants.

La première étape consiste à optimiser un jeu de paramètres hyperélastiques permettant de simuler les valeurs de contraintes maximales atteintes lors des essais.

Le jeu  $(C_{10}, C_{01}, C_{20})$  est identifié sur l'essai hyper\_a :  $\begin{pmatrix} C_{10} = 0.182 \\ C_{01} = 2.389 \\ C_{20} = 0.027 \end{pmatrix} \text{ MPa}$

La Fig. 3D.2 illustre le résultat de l'identification hyperélastique. On constate que les contraintes simulées sont supérieures aux contraintes expérimentales. Ce décalage permet en fait une meilleure optimisation des poids de relaxation puisque la courbe 'réellement hyperélastique' ( $\dot{\epsilon} \approx \infty$ ) ferait intervenir des contraintes supérieures à celle mesurées lors des essais ( $\dot{\epsilon} \approx 6 \text{ s}^{-1}$ ). Il est donc plus judicieux de simuler une courbe légèrement plus raide. C'est pour cette raison que nous n'avons pas utilisé le jeu identifié dans le paragraphe précédent.



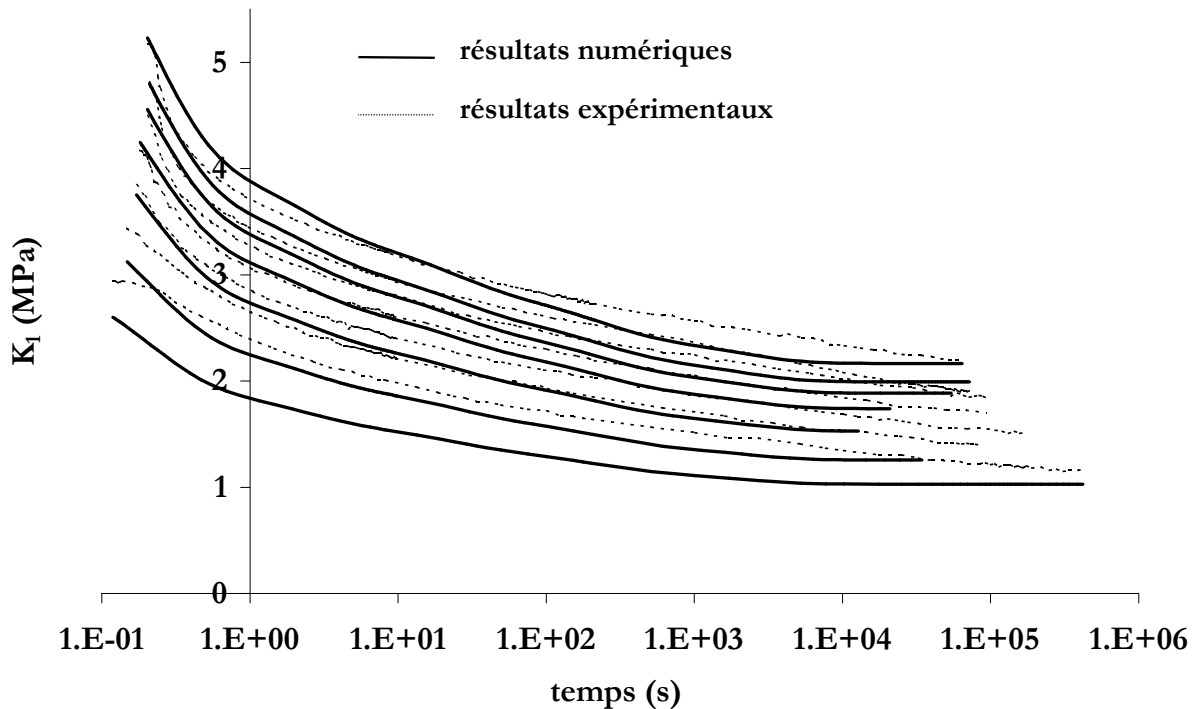
**Figure 3D.2** – Identification des coefficients  $(C_{10}, C_{01}, C_{20})$  sur la courbe d'essai 'rapide' de traction uniaxiale - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°2

Les poids de relaxation  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  sont alors identifiés à partir des essais de relaxation. Dans un premier temps, les poids  $g_1, g_2$  et  $g_3$  sont optimisés sur les 50 premières secondes des essais. Les valeurs des coefficients  $g_4$  et  $g_5$  sont imposées nulles. Dans un deuxième temps, les deux coefficients  $g_1$  et  $g_2$  sont fixés aux valeurs précédemment définies et  $g_3, g_4, g_5$  sont optimisés sur le temps total des essais. Cette identification en deux temps conduit à un bien meilleur résultat que celui obtenu par l'identification simultanée des 5 poids.

Le jeu n°2 déterminé est alors:

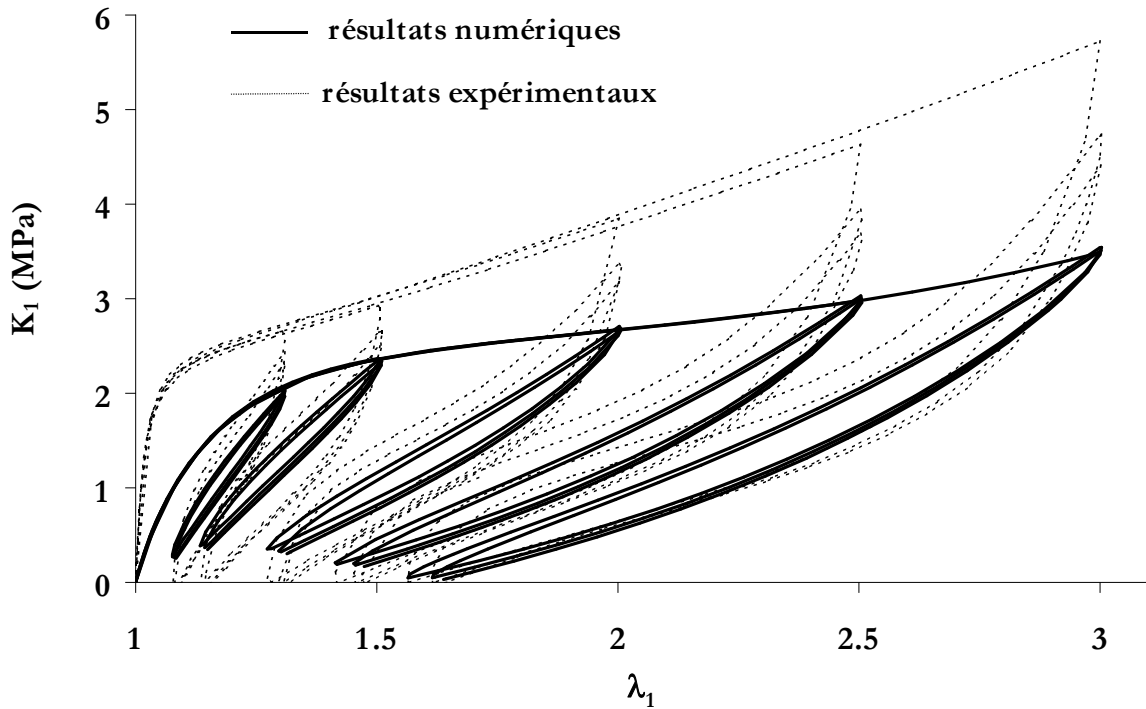
$$\begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2\text{s} & g_1 = 0.302 \\ \tau_2 = 2\text{s} & g_2 = 0.122 \\ \tau_3 = 20\text{s} & g_3 = 0.088 \\ \tau_4 = 200\text{s} & g_4 = 0.078 \\ \tau_5 = 2000\text{s} & g_5 = 0.046 \end{pmatrix}$$

La Fig. 3D.3 illustre le résultat de l'optimisation .



**Figure 3D.3** – Identification des coefficients ( $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ ) sur les courbes de relaxation en traction uniaxiale - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°2

Les essais cycliques de traction ( $\dot{\epsilon} = 0.1\text{s}^{-1}$ ) sont alors simulés avec le jeu optimisé à partir des essais monotones rapides et de relaxation – Fig. 3D.4 -. A la vue de ces résultats, nous décidons de ré-optimiser les coefficients hyperélastiques  $C_{10}, C_{01}, C_{20}$  afin de mieux simuler la raideur du matériau, à la fois en traction et en compression. En effet, les coefficients  $C_{ij}$  ont été optimisés sur les courbes considérés comme indépendantes de la vitesse de sollicitation. La raideur du matériau est ainsi naturellement sous-estimée ici.



**Figure 3D.4** – Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.1s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°2

#### Optimisation de $C_{10}$ , $C_{01}$ , $C_{20}$ – 2<sup>ème</sup> itération – Jeu n°3

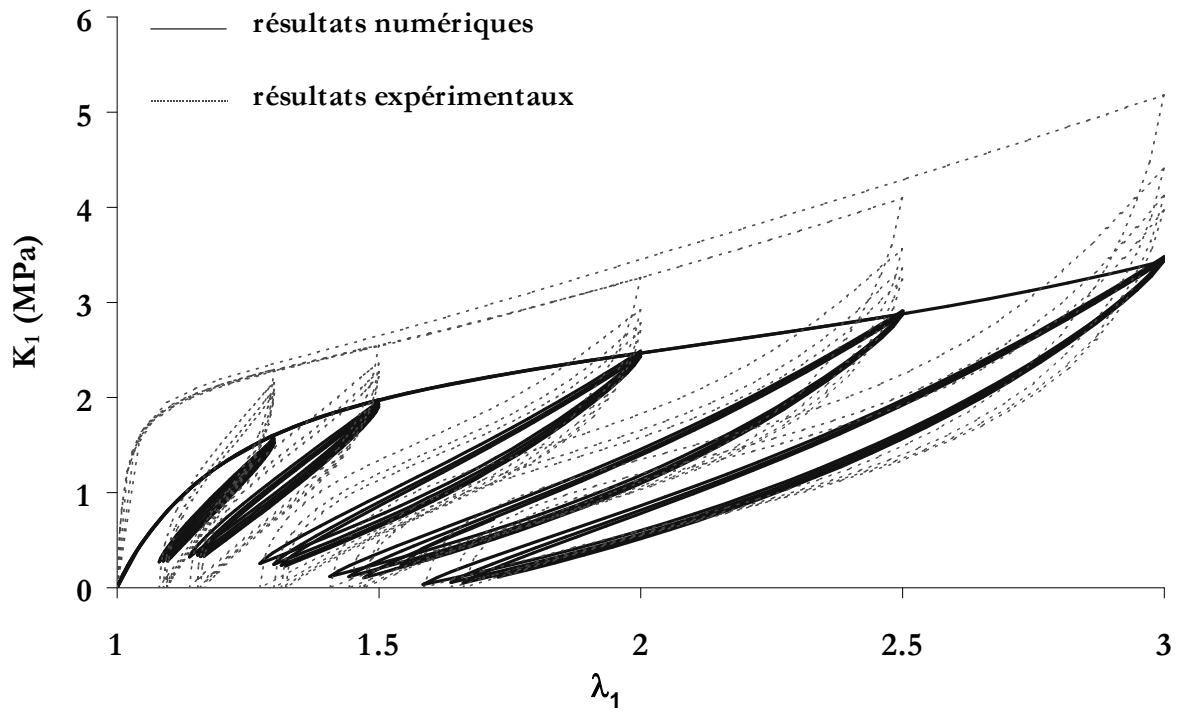
Les coefficients sont donc ré-optimisés sur les deux séries d'essais cycliques ( $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$  et  $0.1s^{-1}$ ) et sur l'essai de compression uniaxiale.

Les coefficients de dommage sont ceux du jeu n°1, les coefficients viscoélastiques sont ceux du jeu n°2.

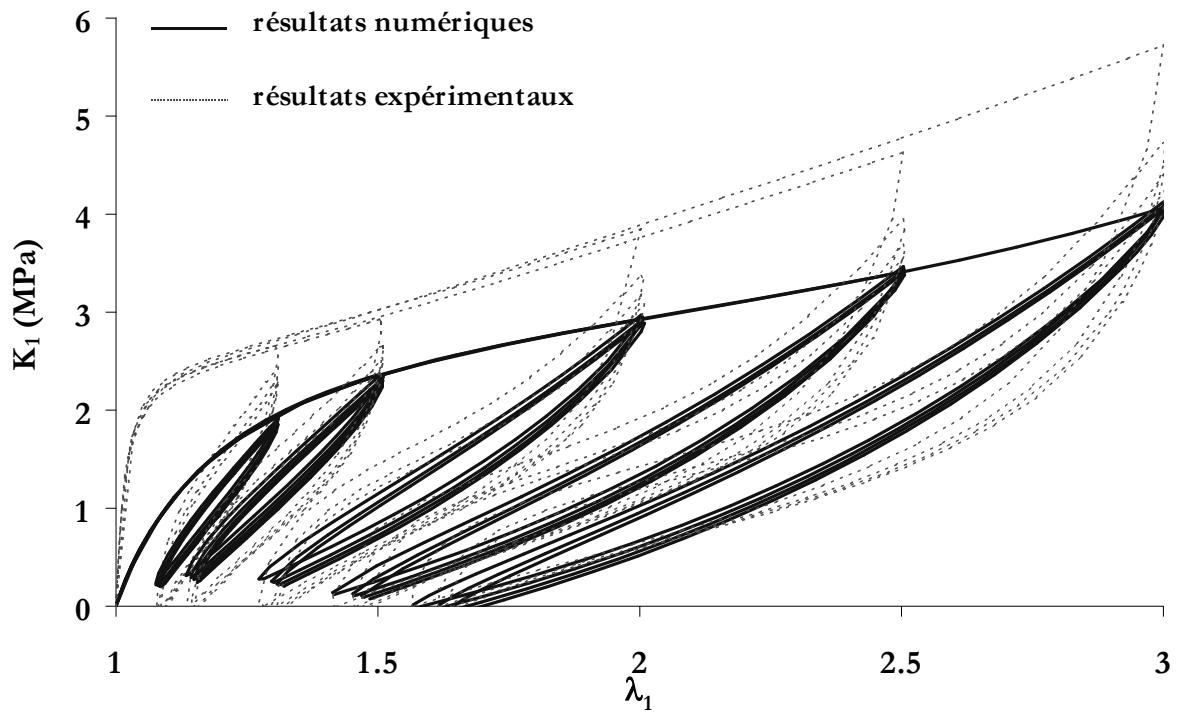
Le jeu n°3 obtenu est alors :

$$\begin{pmatrix} C_{10} = 2.668 \\ C_{01} = 0.271 \\ C_{20} = 0.466 \end{pmatrix} \text{ MPa}$$

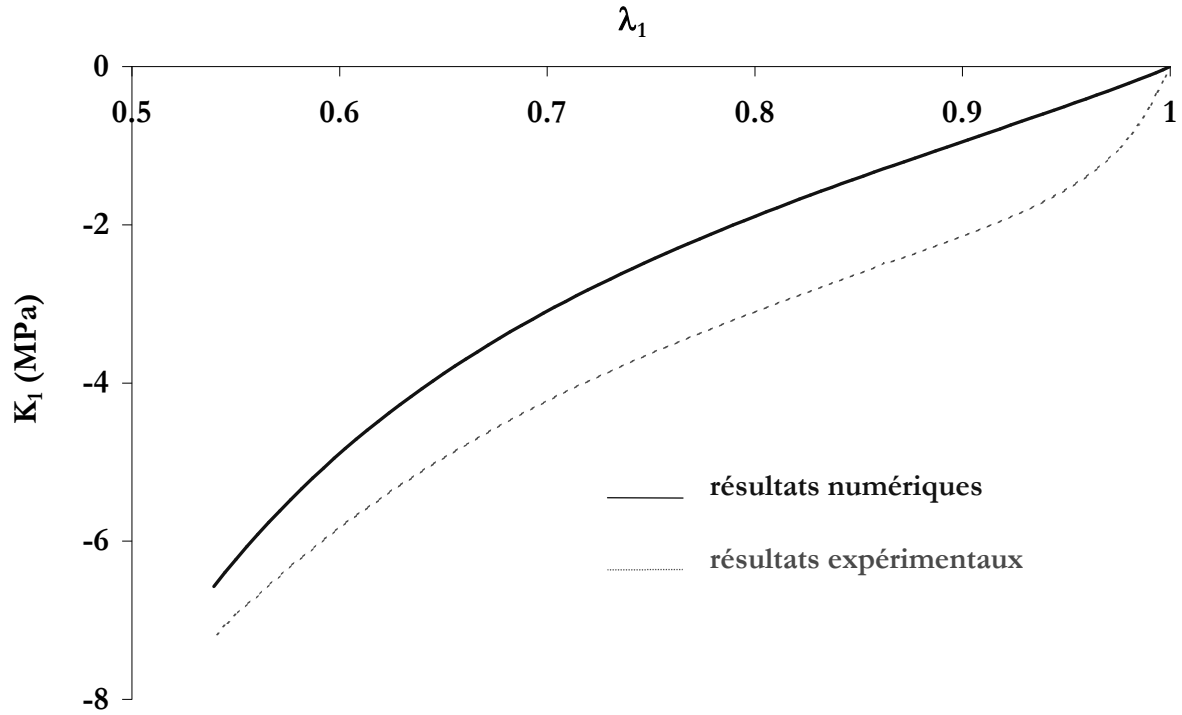
Les Fig. 3D.5, 3D.6 et 3D.7 montrent les résultats de la l'optimisation. La raideur simulée du cycle stabilisé est mieux représentée. La raideur de la première montée en charge est par contre mal simulée. Ceci n'est pas rédhibitoire puisque c'est le comportement du cycle stabilisé que nous voulons représenter correctement, pour calculer les contraintes et les déformations dans le matériau sollicité en fatigue. D'une part, la loi hyperélastique de Rivlin n'est pas adaptée pour la simulation d'élastomères fortement chargés. D'autre part, l'endommagement et la relaxation importante qui ont lieu dès les premiers instants (poids du premier temps de relaxation élevé !) diminuent encore la valeur des contraintes calculées. D'autre part, l'aire du cycle d'hystérésis est sous-estimée d'un facteur 2 à 4. Ces aspects sont discutés dans le paragraphe 3.3.1 du mémoire.



**Figure 3D.5** – Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.01 s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3



**Figure 3D.6** – Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.1 s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3

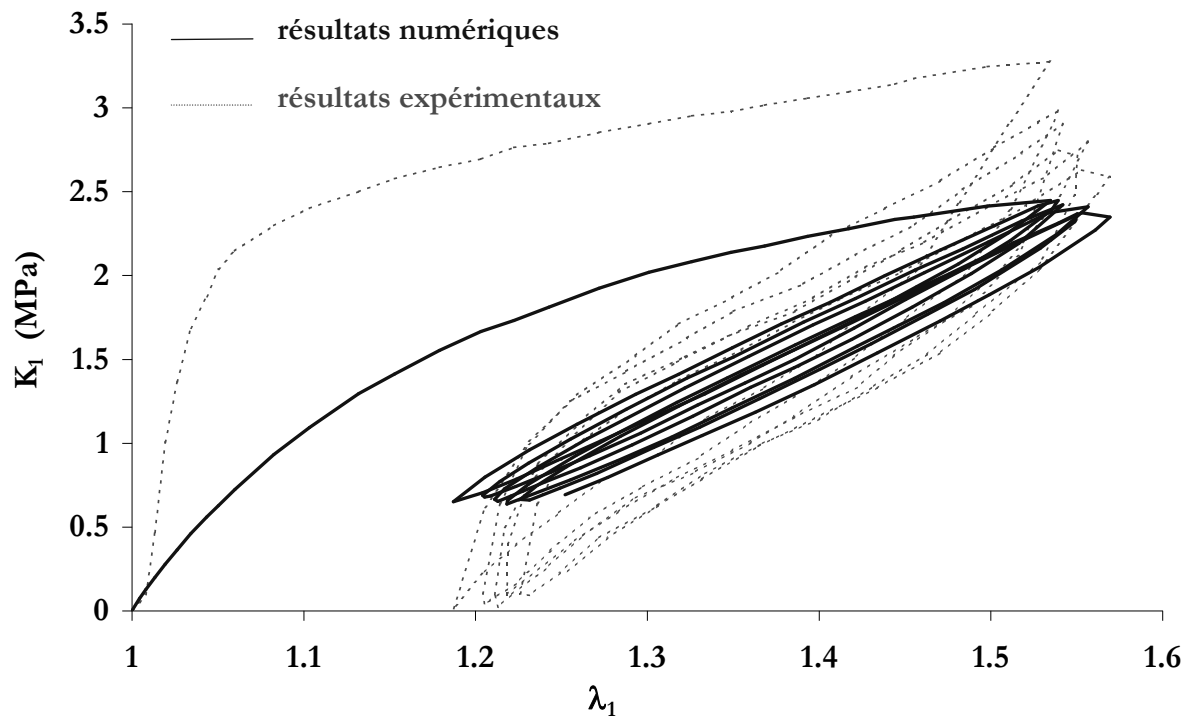


**Figure 3D.7** – Simulation de l'essai de compression uniaxiale - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3

Le jeu du SBRA (jeu n°3) retenu est alors :

$$\begin{pmatrix} C_{10} = 2.668 \\ C_{01} = 0.271 \\ C_{20} = 0.466 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad \begin{pmatrix} d_{\infty} = 0.914 \\ \eta = 0.719 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2\text{s} & g_1 = 0.302 \\ \tau_1 = 2\text{s} & g_2 = 0.122 \\ \tau_1 = 20\text{s} & g_1 = 0.088 \\ \tau_1 = 200\text{s} & g_1 = 0.078 \\ \tau_1 = 2000\text{s} & g_1 = 0.046 \end{pmatrix}$$

L'essai cyclique de traction plane est simulé – Fig. 3D.8 -. La raideur globale et la dissipation viscoélastique du matériau sont sous-estimées. Cependant, le jeu n'a pas été amélioré en prenant cet essai en compte lors de l'identification des coefficients. Le jeu précédant est donc conservé.



**Figure 3D.8** – Simulations de l'essai de traction plane - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu  $n^{\circ}3$



## Annexe 3E

### Identification des nuances B et C de SBR

Les procédures d'identification sont quasiment les mêmes que dans le cas du SBRA.

#### Cas du SBR nuance B (nuance 32 963, la plus raide)

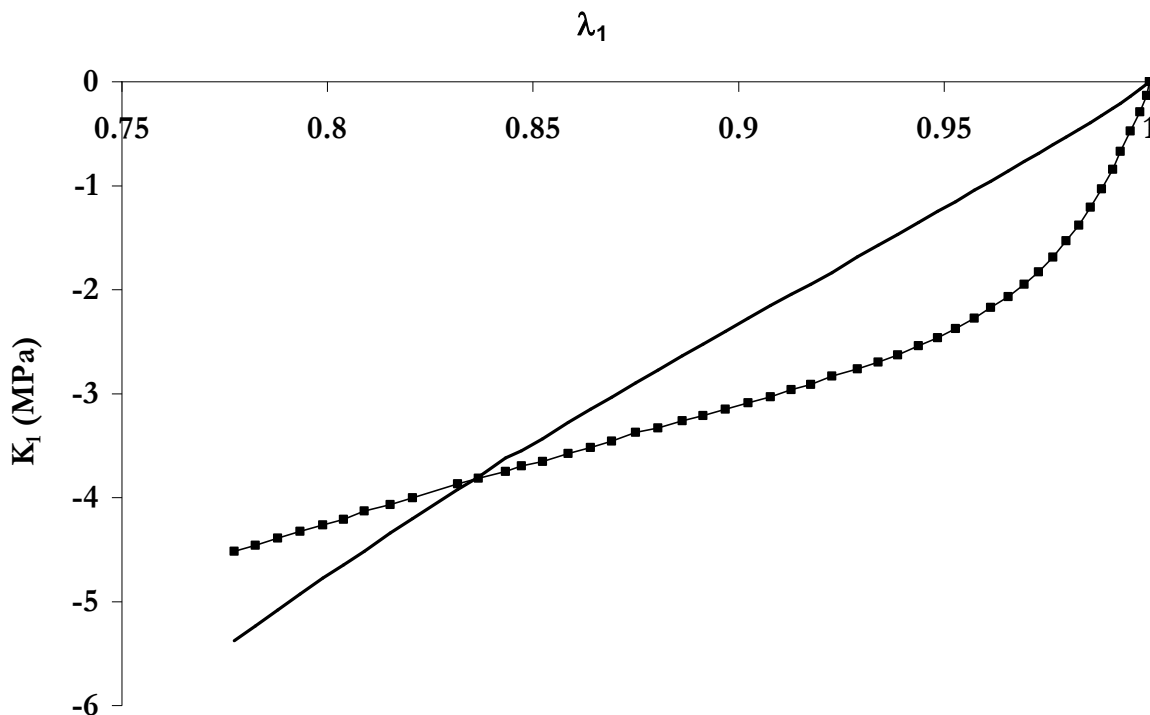
Ce comportement présente plus de difficultés à être identifier. Cela est certainement du à la raideur importante de ce SBR.

Après avoir optimisé les paramètres d'élasticité  $C_{ij}$  et de dommage  $d_\infty$ ,  $\eta$  sur les essais rapides puis les poids des temps de relaxation sur les essais de relaxation, les trois coefficients  $C_{10}$ ,  $C_{01}$ ,  $C_{20}$  sont ré-identifiés sur les essais cycliques.

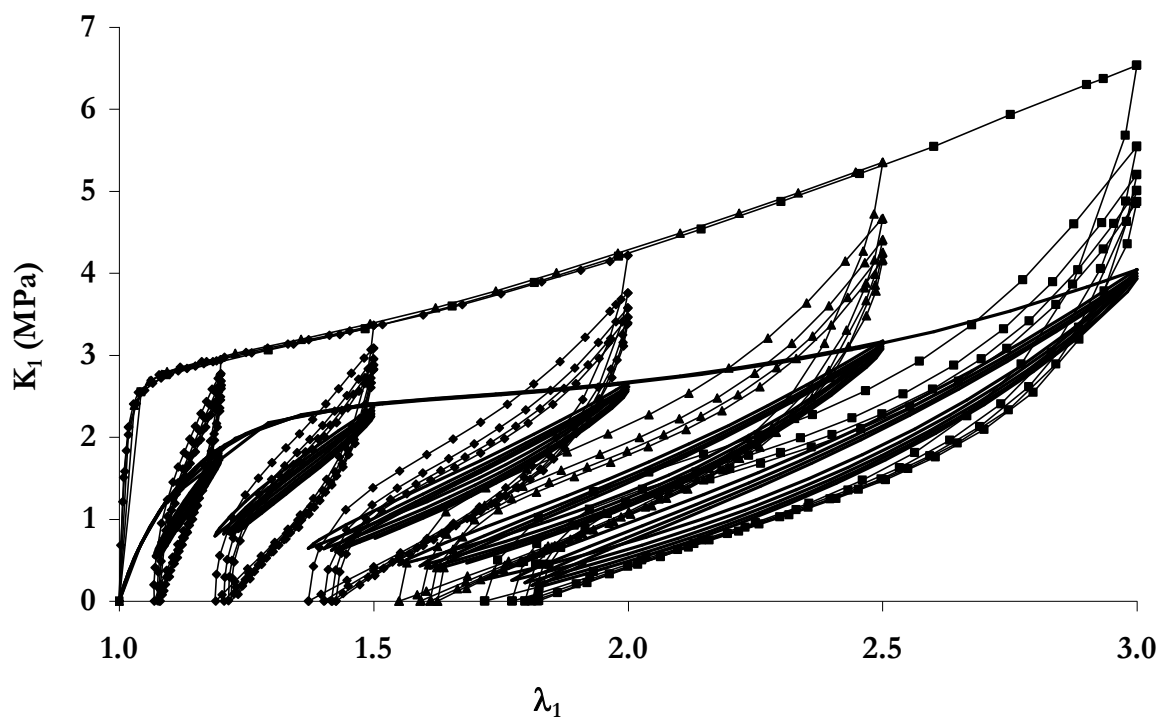
A ce stade cependant, l'identification du SBRB ne nous paraît pas satisfaisante, alors que les mêmes étapes conduisait à une identification correcte du SBRA.

Nous décidons donc de ré-optimiser les poids  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $g_4$ ,  $g_5$  sur les essais cycliques.

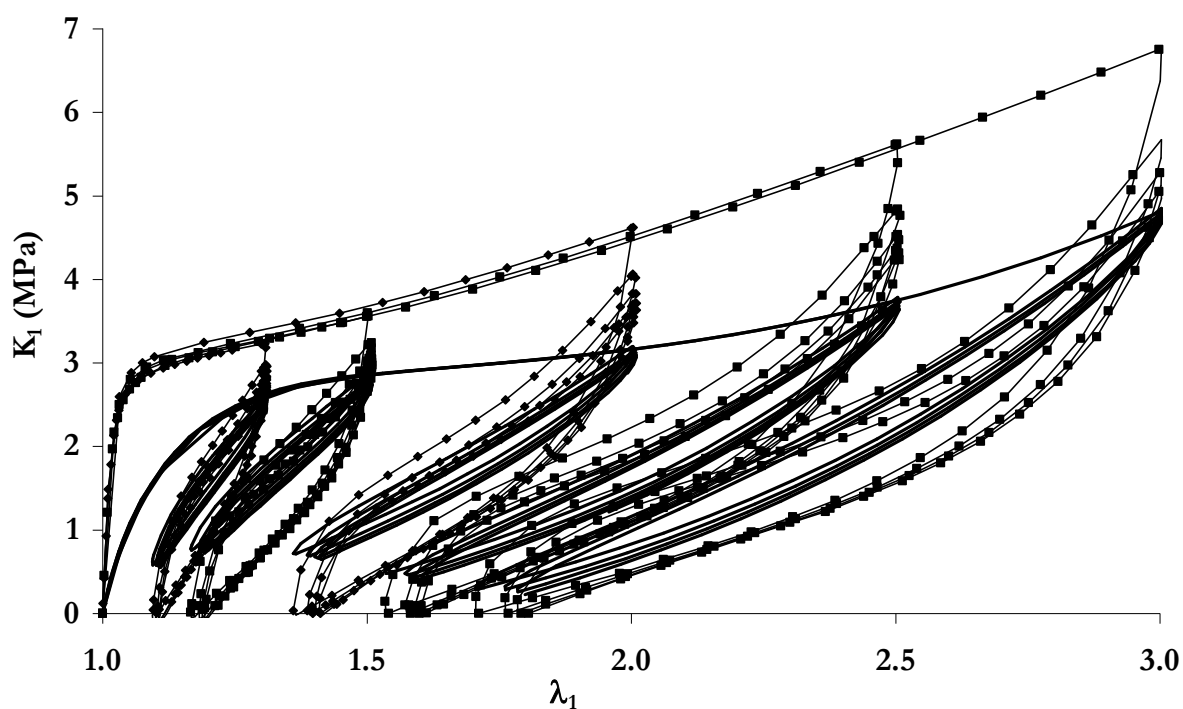
Les résultats des identifications sont présentés dans les Fig. 3E.1, 3E.2 et 3E.3. Les graphes illustrent les résultats expérimentaux et numériques sur les essais cycliques de traction uniaxiale aux deux vitesses et sur un essai de compression uniaxiale.



**Figure 3E.1** – SBRB - Simulation de l'essai de compression uniaxiale - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3



**Figure 3E.2** – SBRB - Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3



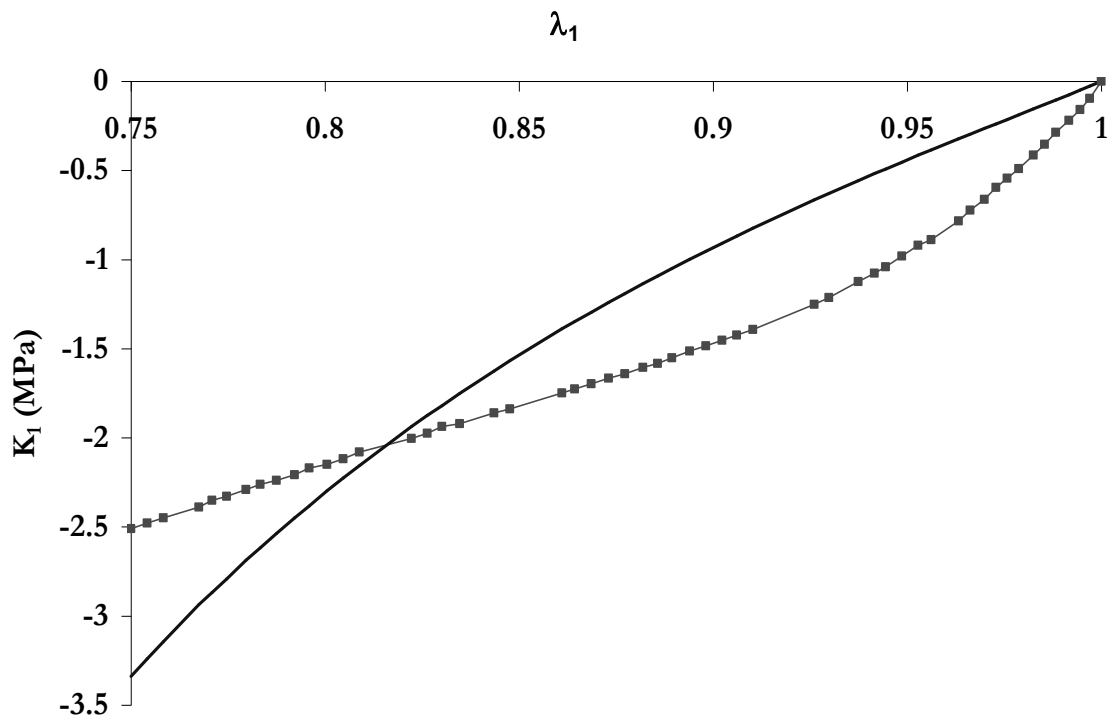
**Figure 3E.3** – SBRB - Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.1s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3

### Cas du SBR nuance C (nuance 32 726, la moins raide)

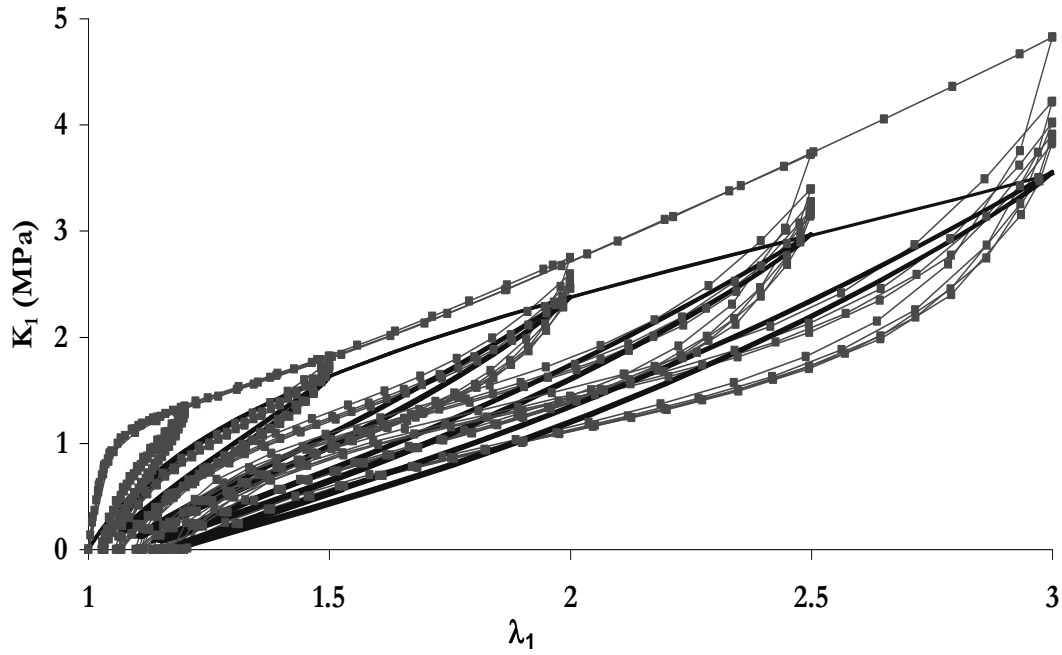
Nous avons constaté qu'un développement du potentiel hyperélastique au 1<sup>er</sup> ordre permettait de mieux simuler le comportement du SBRC. Les coefficients élastiques sont donc  $c_{10}$ ,  $c_{01}$ ,  $c_{11}$ .

De plus, la dernière étape de ré-identification des coefficients élastiques sur les essais cycliques n'est pas nécessaire. Le résultat d'identification paramètres d'élasticité  $c_{ij}$  et de dommage  $d_{\infty}$ ,  $\eta$  sur les essais rapides et des poids des temps de relaxation sur les essais de relaxation conduisait à une simulation correcte des essais cycliques.

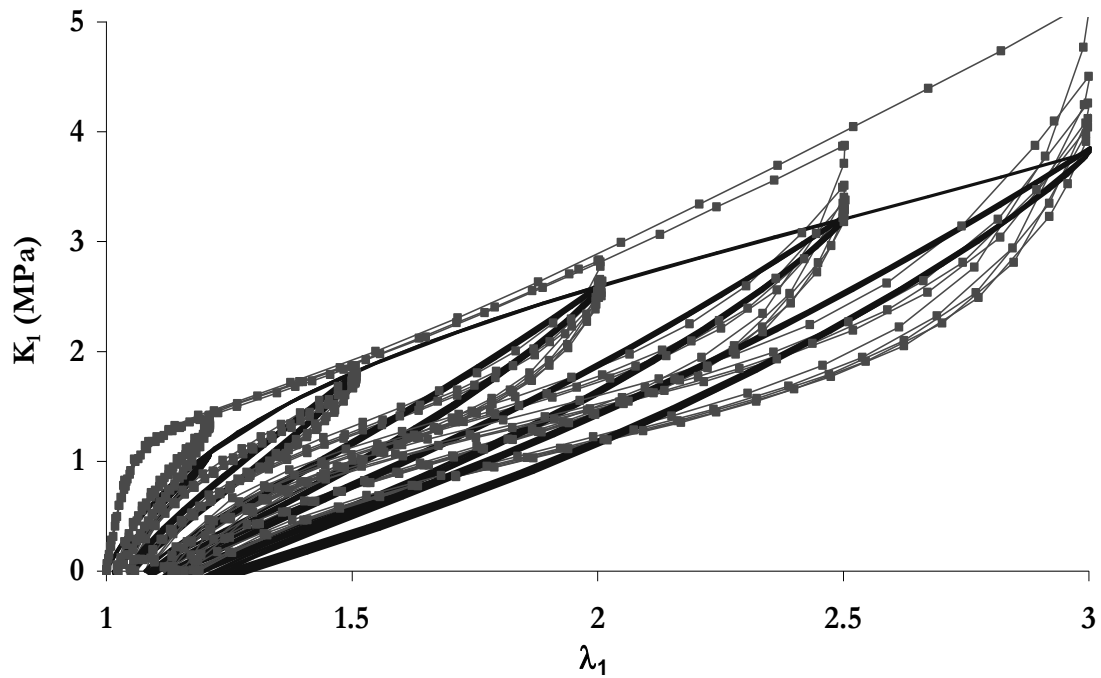
Les résultats des identifications sont présentés dans les Fig. 3E.4, 3E.5 et 3E.6. Les graphes illustrent les résultats expérimentaux et numériques sur les essais cycliques de traction uniaxiale aux deux vitesses et sur un essai de compression uniaxiale



**Figure 3E.4** – SBRC - Simulation de l'essai de compression uniaxiale - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3



**Figure E3.5** – SBRC - Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.01s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3



**Figure 3E.6** – SBRC - Simulations des essais de traction uniaxiale cyclique ( $\dot{\epsilon} = 0.1s^{-1}$ ) - Résultats numériques et expérimentaux avec le jeu n°3

Le tableau Fig 3E.7 permet de comparer les valeurs des trois nuances.

	<b>SBR A</b>	<b>SBR B</b>	<b>SBR C</b>
<b>C<sub>10</sub> (MPa)</b>	2.668	1.38	0.958
<b>C<sub>01</sub> (MPa)</b>	0.271	4.185	0.603
<b>C<sub>11</sub> (MPa)</b>			0.424
<b>C<sub>20</sub> (MPa)</b>	0.466	0.669	

	<b>SBR A</b>	<b>SBR B</b>	<b>SBR C</b>
<b>d<sub>inf</sub></b>	0.914	0.893	0.825
<b>η</b>	0.719	0.631	0.928

	<b>SBR A</b>	<b>SBR B</b>	<b>SBR C</b>
<b>g<sub>1</sub> (τ<sub>1</sub>=0.2s)</b>	0.3015	0.3926	0.1693
<b>g<sub>2</sub> (τ<sub>2</sub>=0.2s)</b>	0.1218	0.0886	0.1036
<b>g<sub>3</sub> (τ<sub>3</sub>=0.2s)</b>	0.0876	0.0793	0.0555
<b>g<sub>4</sub> (τ<sub>4</sub>=0.2s)</b>	0.0783	0.0654	0.0341
<b>g<sub>5</sub> (τ<sub>5</sub>=0.2s)</b>	0.0461	0.0774	0.0210

**Figure 3E.7** – Tableau des jeux identifiés sur les nuances A, B et C de SBR chargé de silice

On constate que les coefficients hyperélastique, d'endommagement et de relaxation du SBRC sont plus faibles. Ceci est cohérent avec les observations expérimentales : ce matériau est moins raide, l'hystérésis due à l'endommagement est moins important, et il se relaxe moins.

## Annexe 3F

### Identification du PU de nuance A

#### Détail de la procédure

La procédure nécessite deux étapes pour un résultat acceptable (stabilisation du résidu) :

- optimisation des coefficients ( $m_1, m_2, m_3$ ) et ( $g_1, g_2, g_3$ ) sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression confinée.

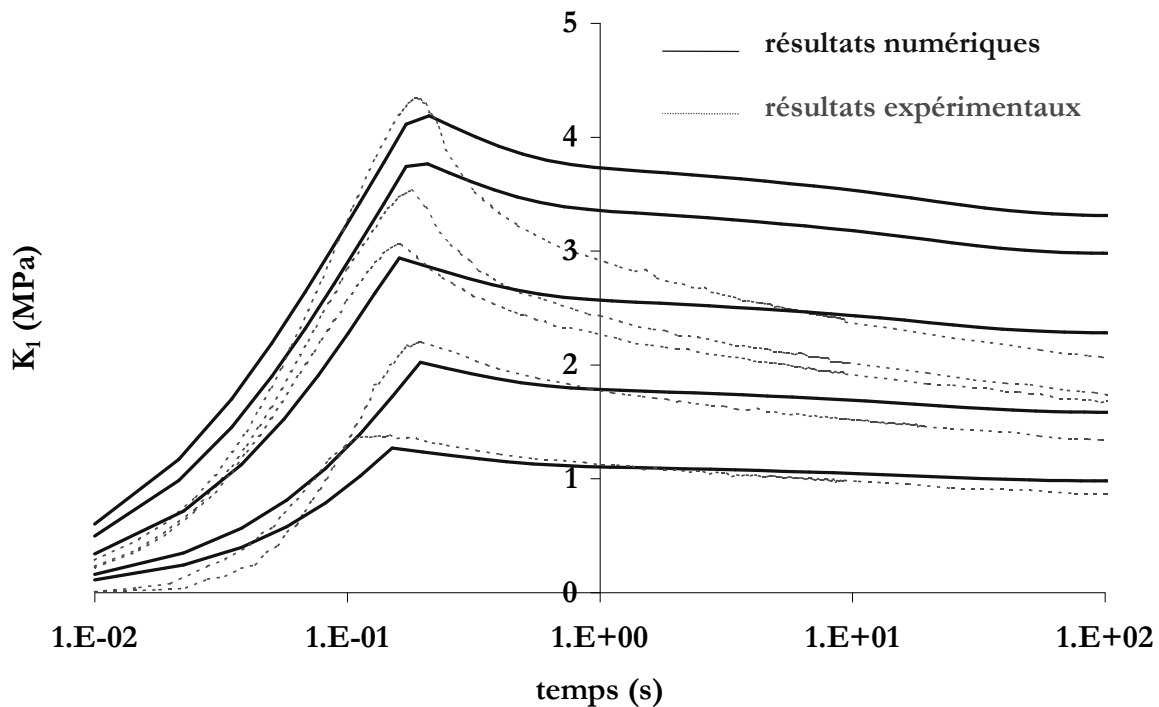
Pour des raisons techniques explicitées dans le paragraphe 2.2.2, nous ne disposons pas d'essais de compression eudiométrique rapides. Les montées en charge des essais durent, selon l'élongation atteinte, plusieurs dizaines de secondes. Il est donc impossible de découpler l'aspect hyperélastique de l'aspect viscoélastique sur ces essais. Pour cette raison, les coefficients hyperélastiques ( $m_1, m_2, m_3$ ) sont optimisés simultanément avec les coefficients viscoélastiques ( $g_1, g_2, g_3$ ) sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression uniaxiale. Seules les cinquante premières secondes de l'essai sont considérées. Cette manipulation permet d'obtenir le jeu ( $m_1, m_2, m_3$ ).

- ré-optimisation des coefficients ( $g_1, g_2, g_3$ ) et optimiser les coefficients ( $g_4, g_5$ ) sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et compression eudiométrique

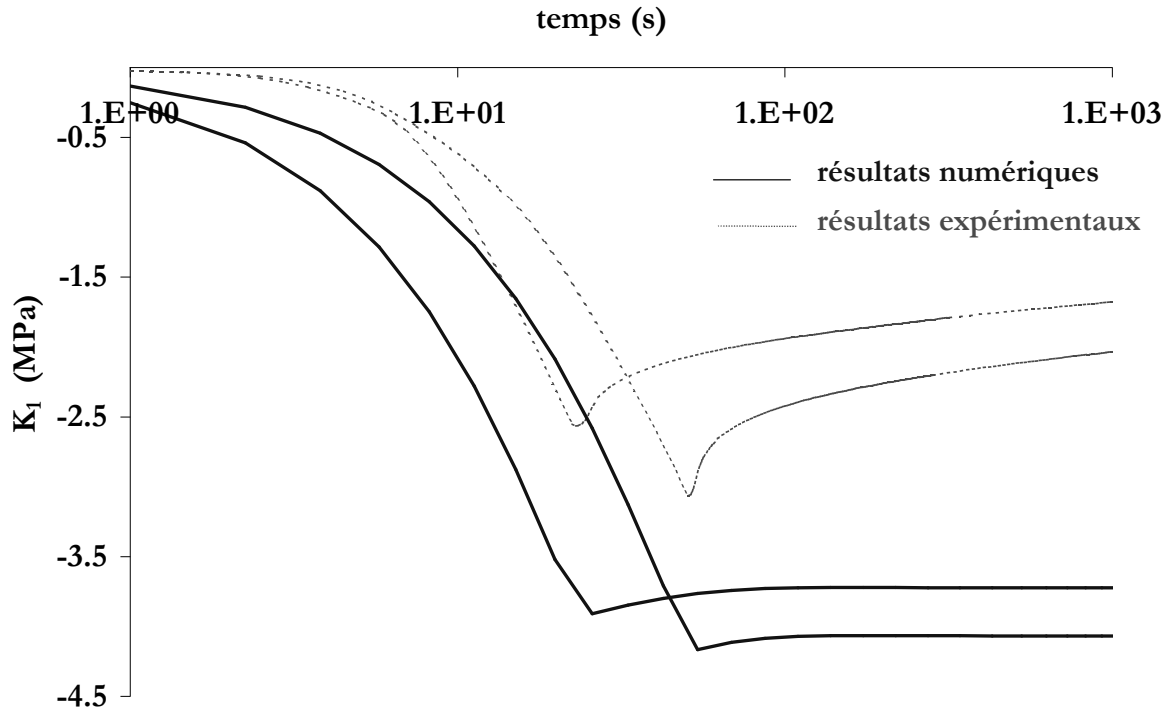
#### Détermination de ( $m_1, m_2, m_3$ ) et première estimation ( $g_1, g_2, g_3$ )

Les six coefficients ( $m_1, m_2, m_3$ ) et ( $g_1, g_2, g_3$ ) sont optimisés simultanément sur les essais de relaxation en traction uniaxiale et en compression eudiométrique. Seules les cinquante premières secondes des essais sont considérées. Les cinq temps de relaxation sont fixés à priori comme dans le cas du SBR incompressible à un par décade, entre 0.2s et 2 000s.

Les Fig. 3F.1 et 3F.2 illustrent les résultats de l'optimisation en présentant les courbes modèles et les courbes simulées, dans la cas de la traction uniaxiale et de compression eudiométrique respectivement.



**Figure 3F.1** – Résultats de la 1<sup>ère</sup> optimisation des coefficients ( $m_1, m_2, m_3$ ) et ( $g_1, g_2, g_3$ ) – Simulation des essais de relaxation en traction uniaxiale



**Figure 3F.2** – Résultats de la 1<sup>ère</sup> optimisation des coefficients  $(m_1, m_2, m_3)$  et  $(g_1, g_2, g_3)$  – Simulation des essais de relaxation en compression eudiométrique

Le jeu obtenu est :

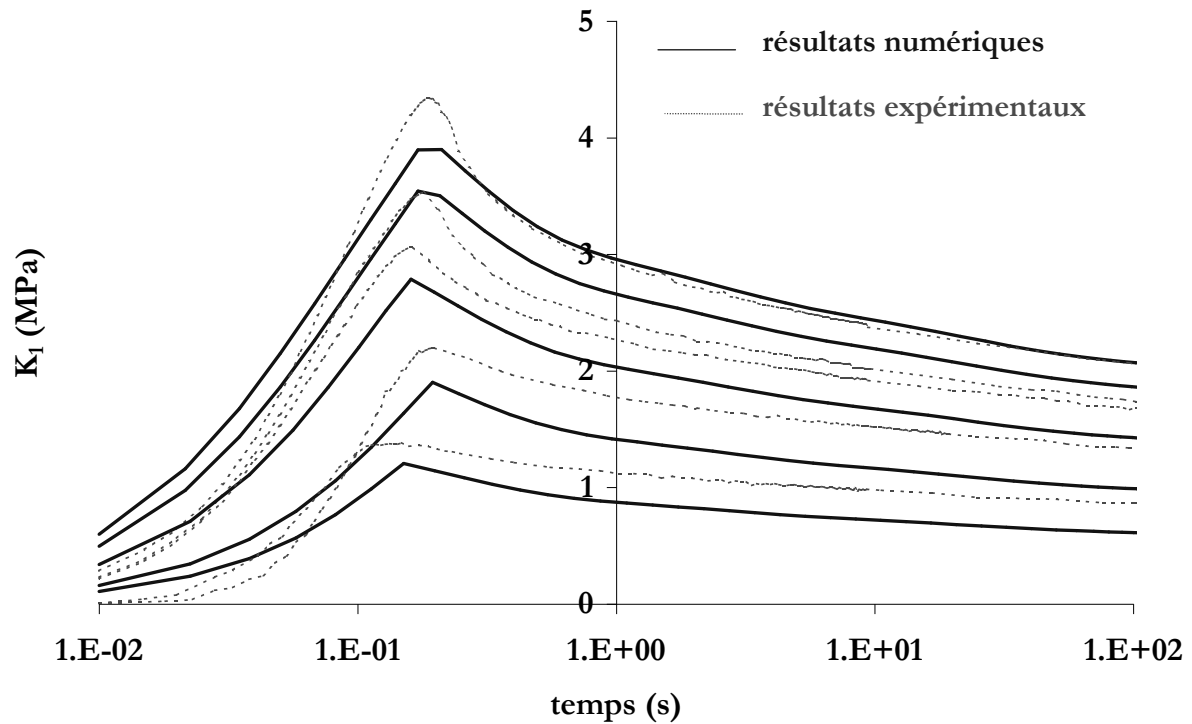
$$\begin{pmatrix} m_1 = 0.62 \\ m_2 = 1.14 \\ m_3 = 5.31 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2s & g_1 = 0.164 \\ \tau_2 = 2s & g_2 = 0.022 \\ \tau_3 = 20s & g_3 = 0.081 \end{pmatrix}$$

Bien que la relaxation soit mal simulée, les valeurs maximales obtenues lors des montées en charge rapides ( $\dot{\epsilon} = 6 \text{ s}^{-1}$ ) de traction uniaxiale sont correctes. Les contraintes obtenues lors des calculs des essais de compression eudiométrique (montées en charge très lentes) ne sont pas correctes. Ceci est du à la mauvaise optimisation des poids  $(g_1, g_2, g_3)$ . Elles s'amélioreront grâce à l'optimisation précise des poids de relaxation.

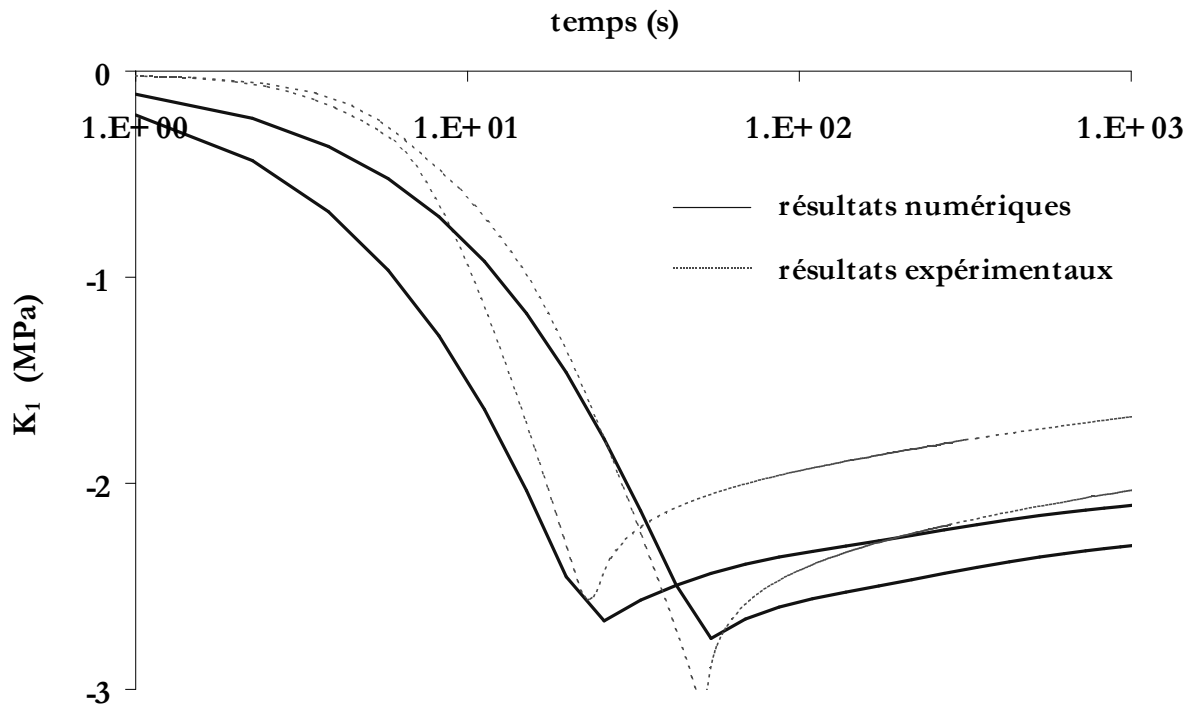
#### Seconde et dernière optimisation de $g_1, g_2, g_3$ – Première et dernière optimisation de $g_4, g_5$

Les coefficients  $(m_1, m_2, m_3)$  sont fixés aux valeurs précédemment calculées. Les poids  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  sont alors optimisés à partir des essais de relaxation en traction uniaxiale et compression eudiométrique sur toute l'échelle de temps. L'optimisation est 'manuelle' : elle est faite par tâtonnement successivement sur chacun des poids. Cette optimisation est plus satisfaisante et plus rapide que l'optimisation par méthode génétique.

Les résultats obtenus sont satisfaisants – Fig. 3F.3 et 3F.4 -.



**Figure 3F.3** – Résultats de la 2<sup>de</sup> optimisation des coefficients ( $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ ) – Simulation des essais de relaxation en traction uniaxiale



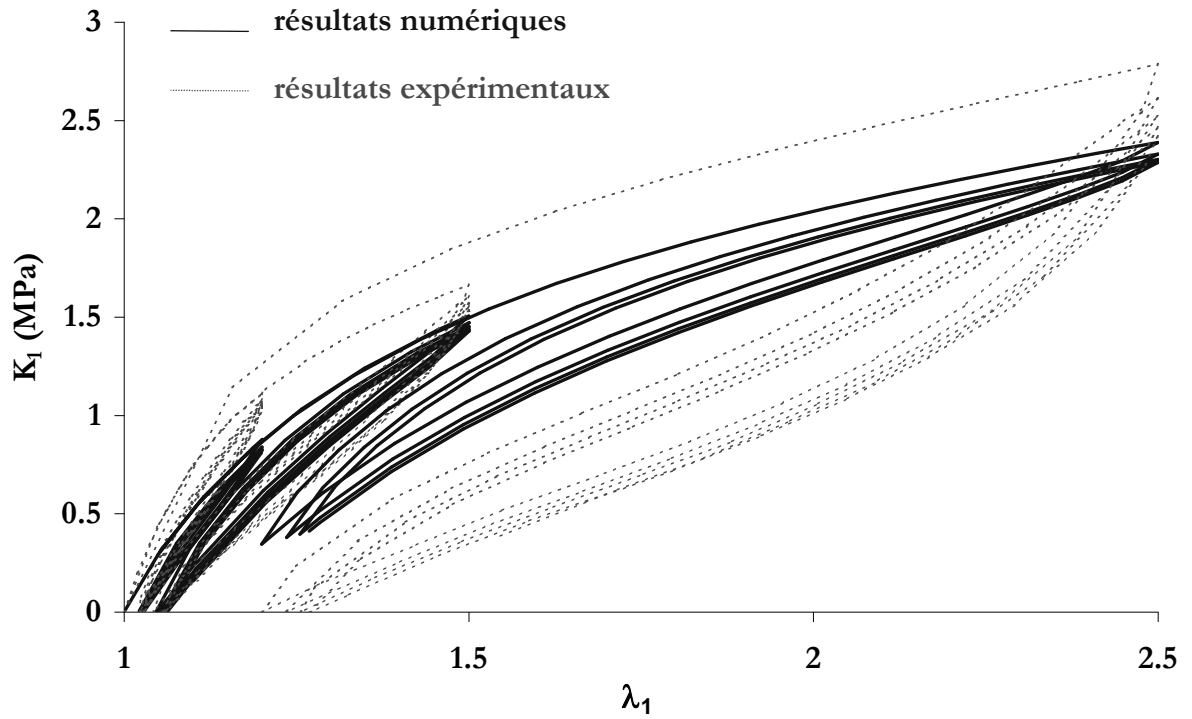
**Figure 3F.4** – Résultats 2<sup>de</sup> optimisation des coefficients ( $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$ ) – Simulation des essais de relaxation en compression eudiométrique

Le jeu optimisé est :



$$\begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2s & g_1 = 0.3 \\ \tau_2 = 2s & g_2 = 0.12 \\ \tau_3 = 20s & g_3 = 0.1 \\ \tau_4 = 200s & g_4 = 0.05 \\ \tau_5 = 2000s & g_5 = 0.04 \end{pmatrix}$$

Les essais cycliques de traction uniaxiale ainsi que les essais de compression uniaxiale et eudiométrique sont simulés avec le jeu optimisé sur les essais de relaxation. – Fig. 3F.5, 3F.6, 3F.7 et 3F.8 -. Les résultats sont relativement satisfaisants. Notons que le ‘bouclage’ qui consisterait à re-optimiser les coefficients ( $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ) sur ces essais cycliques ne conduit à aucune amélioration du résultat.



*Figure 3F.5 – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.01$*

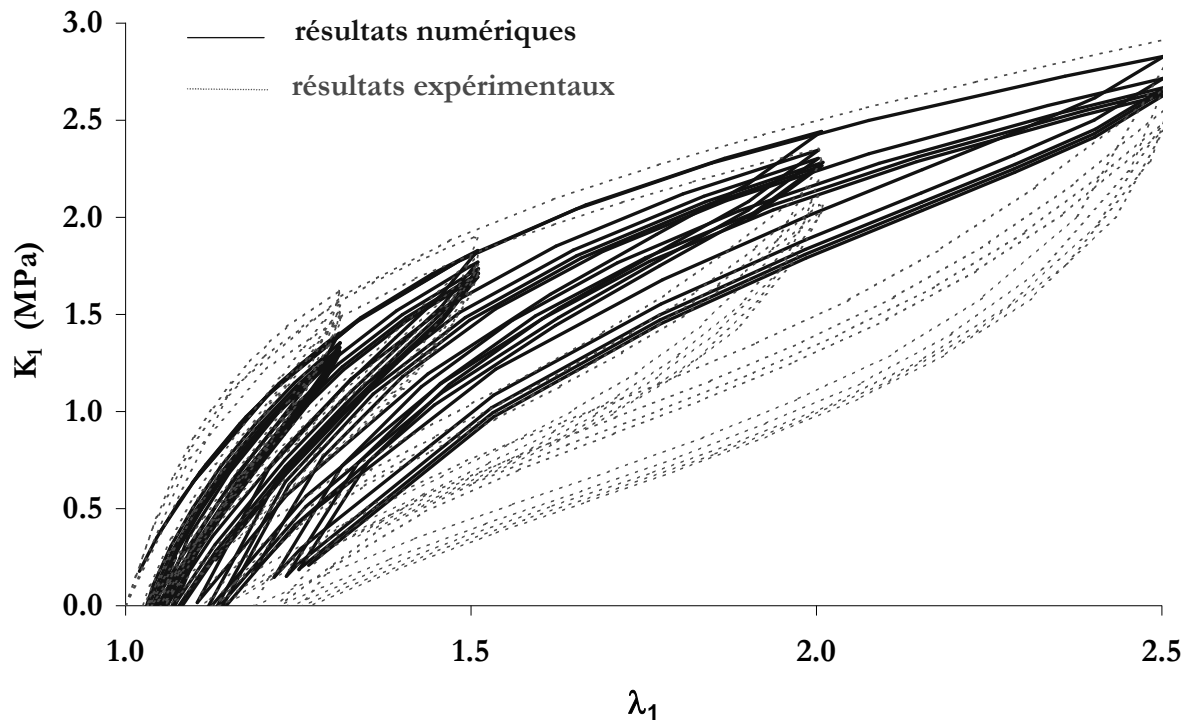


Figure 3F.6 – Simulation des essais de traction uniaxiale cyclique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.1 \text{ s}^{-1}$

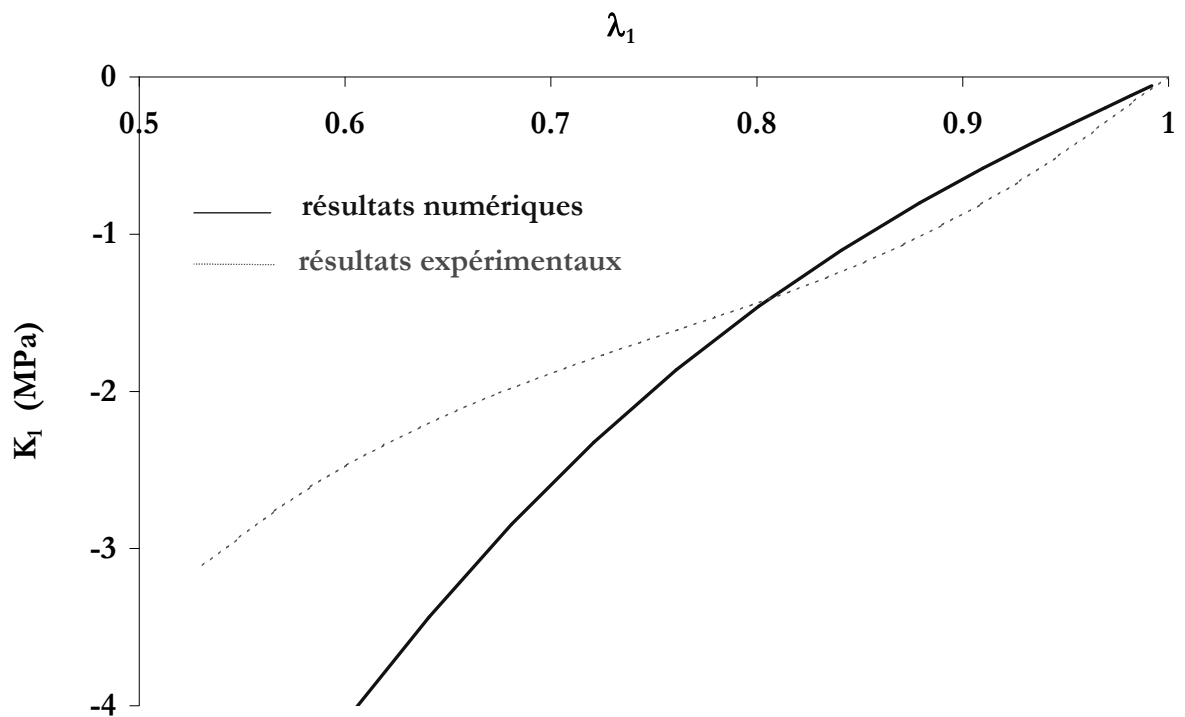
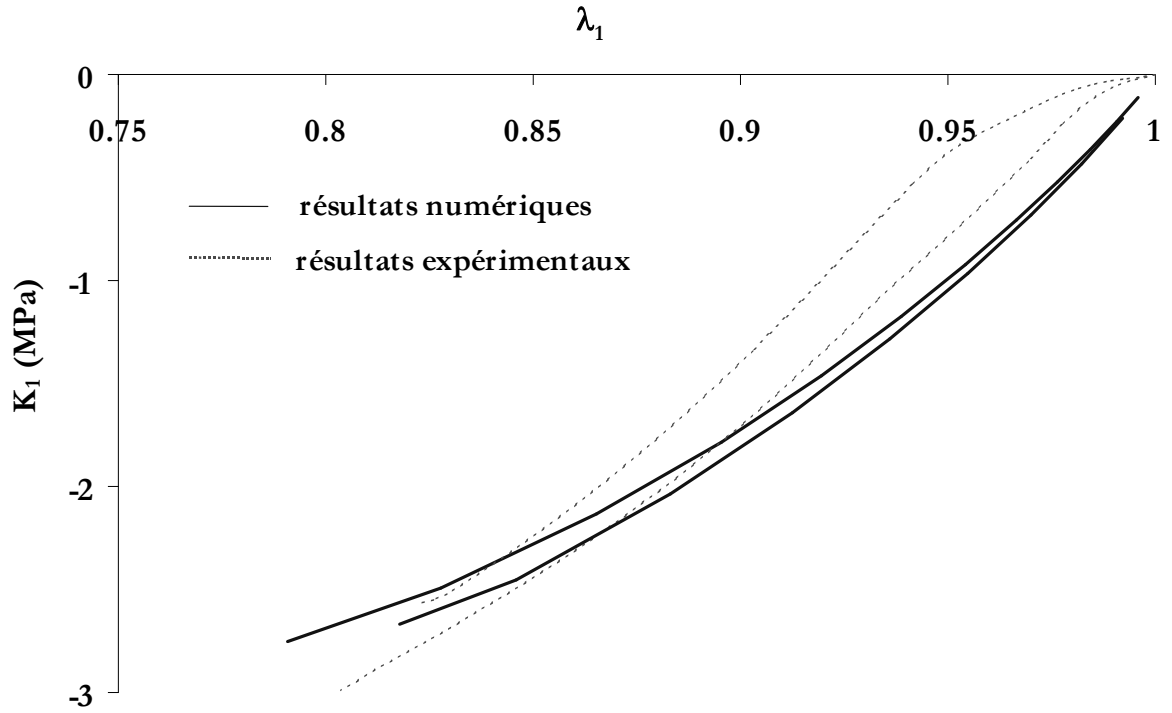


Figure 3F.7 – Simulation de l'essai de compression uniaxiale avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\epsilon} = 0.004 \text{ s}^{-1}$



**Figure 3F.8** – Simulation de l'essais de compression endiométrique avec le jeu de coefficients final -  $\dot{\varepsilon} = 0.004s^{-1}$

Le jeu optimisé est alors :

$$\begin{pmatrix} m_1 = 0.62 \\ m_2 = 1.14 \\ m_3 = 5.31 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau_1 = 0.2s & g_1 = 0.3 \\ \tau_2 = 2s & g_2 = 0.12 \\ \tau_3 = 20s & g_3 = 0.1 \\ \tau_4 = 200s & g_4 = 0.05 \\ \tau_5 = 2000s & g_5 = 0.04 \end{pmatrix}$$

## Annexe 3G

### Fichiers de mise en données des calculs éléments finis

#### 1.1.1. Fichier de mise en données du calcul hyperélastique viscoélastique (approche fonctionnelle) endommageable sur le plot en traction compression :

```
****calcul
***mesh ll_total_lagrangian_mixte_u_p
    **file plot_m_red.geof
***resolution newton
    **sequence 1
        *time 15.1
        *ratio 0.3
        *increment 151
        *iteration 5
        *algorithm p1p2p3
    **automatic_time global 5
        *divergence 3.0 10
        *security 1.25
        *first_dtime 0.1
        *max_dtime 0.1
        *min_dtime 1.e-4
***bc
    **impose_nodal_dof
        n_symm      U2 -1. tab_dL
        n_symmax     U1 0.0
        n_cond       U1 0.0
        n_cond       U2 0.0
***table
    **file tab_dL ap28_chg_2 1 2
***material
**elset SBR
    *file v_end_sbr_8.mat
***output
    **component
        eto11 eto22 eto33 eto12 eto23 eto31
        sig11 sig22 sig33 sig12 sig23 sig31
        F11 F22 F33 F12 F23 F13 F21 F32 F31
        pk2_011 pk2_022 pk2_033 pk2_012 pk2_023 pk2_031
        p dv welas
        U1 U2 U3 RU1 RU2 RU3 triax
**verbose
**contour
****return
```

### 1.1.2. Fichier de mise en données du calcul hyperélastique viscoélastique (approche fonctionnelle) endommageable sur l' 'AE' en torsion-torsion :

```

***calcul
  ***restart
  ***mesh ll_total_lagrangian_mixte_u_p
    **file ae_moy_quad_red.geof
  ***resolution
    **sequence
      *time 11.9
      *increment 100
      *iteration 10
      *ratio absolu 0.3
      *algorithm p1p2p3
    **automatic_time global 3
      *divergence 2.0 5
      *security 1.25
      *first_dtime 0.1
      *max_dtime 0.1
      *min_dtime 1.E-4
  ***bc
    **impose_nodal_dof
      1 U1 0.
      1 U2 0.
      theta_0 U2 0.
      theta_24 U2 0.
      heta_12 U1 0.
      theta_36 U1 0.
    **rotation
      n_haut (0. 0. 1.) (0. 0. 0.) 1. tab1
  ***equation
    **mpc1 n_symm U3
    **mpc3 theta_11 277.5
    **mpc3 theta_23 187.5
    **mpc3 theta_35 97.5
    **mpc3 theta_47 7.5
    **mpc3 theta_10 285.
    **mpc3 theta_22 195.
    **mpc3 theta_34 105.
    **mpc3 theta_46 15.
    **mpc3 theta_9 292.5
    **mpc3 theta_21 202.5
    **mpc3 theta_33 112.5
    **mpc3 theta_45 22.5
    **mpc3 theta_8 300.
    **mpc3 theta_20 210.
    **mpc3 theta_32 120.
    **mpc3 theta_44 30.
    **mpc3 theta_7 307.5
    **mpc3 theta_19 217.5
    **mpc3 theta_31 127.5
    **mpc3 theta_43 37.5

```

```

**mpc3 theta_6      315.
**mpc3 theta_18     225.
**mpc3 theta_30     135.
**mpc3 theta_42     45.
**mpc3 theta_5      322.5
**mpc3 theta_17     232.5
**mpc3 theta_29     142.5
**mpc3 theta_41     52.5
**mpc3 theta_4      330.
**mpc3 theta_16     240.
**mpc3 theta_28     150.
**mpc3 theta_40     60.
**mpc3 theta_3      337.5
**mpc3 theta_15     247.5
**mpc3 theta_27     157.5
**mpc3 theta_39     67.5
**mpc3 theta_2      345.
**mpc3 theta_14     255.
**mpc3 theta_26     165.
**mpc3 theta_38     75.
**mpc3 theta_1      352.5
**mpc3 theta_13     262.5
**mpc3 theta_25     172.5
**mpc3 theta_37     82.5

***table
**file tab1 ae16_chg_2_3c 1 2
***material
**file v_end_sbr_8.mat
**verbose
****return

```

### 1.1.3. Fichier matériau utilisé ans l'approche fonctionnelle

```

***behavior rivlin_viscoelastic
**rivlin
    rivlin1  2.668
    rivlin2  0.2709
    rivlin3  0.4664
    rivlin4  0.
    rivlin5  0.
    rivlin6  0.
    rivlin7  0.
    rivlin8  0.
    rivlin9  0.
**damage   d_inf  0.914
            eta    0.719
**shear    tau    0.2
            omega  0.3015
**shear    tau    2.
            omega  0.1218
**shear    tau    20.
            omega  0.0876
**shear    tau    200.
            omega  0.0783

```

```

**shear      tau      2000.
              omega    0.0461

***return

```

Fichier de mise en données du calcul hyperélastique viscoélastique (approche par variables internes) endommageable sur le plot en traction compression :

```

****calcul
***mesh ll_total_lagrangian_mixte_u_p
    **file plot_m_red.geof
***resolution newton %bfgs
    **sequence 1
        *time 15.1
        *ratio 0.3
        *increment 302
        *iteration 5
        *algorithm p1p2p3 %p1p1p1
    **automatic_time global 5
        *divergence 3.0 10
        *security 1.25
        *first_dtime 0.05
        *max_dtime 0.1
        *min_dtime 1.e-4

***bc
    **impose_nodal_dof
        n_symm      U2 -1. tab_dL
        n_symax      U1 0.0
        n_condl      U1 0.0
        n_condl      U2 0.0

***table
    **file tab_dL ap28_chg_2 1 2

***material
    *file var_int_pt_jeu4.mat
    *var_mat_ini Cv11 1. Cv22 1. Cv33 1.

***output
    **component
        eto11 eto22 eto33 eto12 eto23 eto31
        sig11 sig22 sig33 sig12 sig23 sig31
        F11 F22 F33 F12 F23 F13 F21 F32 F31
        pk2_011 pk2_022 pk2_033 pk2_012 pk2_023 pk2_031
        p dv welas
        U1 U2 U3 RU1 RU2 RU3 triax

    **verbose
    **contour

****return

```

**Fichier de mise en données du calcul hyperélastique viscoélastique (approche par variables internes) endommageable sur l' 'AE' en torsion-torsion :**

```

****calcul
***restart
***mesh ll_total_lagrangian_mixte_u_p
    **file ae_moy_quad_red.geof
***resolution
    **sequence

```

```

*time 11.9
*increment 119
*iteration 10
*ratio absolu 0.3
*algorithm p1p2p3
**automatic_time global 3
*divergence 2.0 5
*security 1.25
*first_dtime 0.1
*max_dtime 0.1
*min_dtime 1.E-4
***bc
**impose_nodal_dof
      1 U1 0.
      1 U2 0.
      theta_0 U2 0.
      theta_24 U2 0.
      theta_12 U1 0.
      theta_36 U1 0.
**rotation
      n_haut (0. 0. 1.) (0. 0. 0.) 1. tab1
***equation
**mpc1 n_bas U3
**mpc3 theta_11      277.5
**mpc3 theta_23      187.5
**mpc3 theta_35      97.5
**mpc3 theta_47       7.5
**mpc3 theta_10      285.
**mpc3 theta_22      195.
**mpc3 theta_34      105.
**mpc3 theta_46       15.
**mpc3 theta_9       292.5
**mpc3 theta_21      202.5
**mpc3 theta_33      112.5
**mpc3 theta_45      22.5
**mpc3 theta_8       300.
**mpc3 theta_20      210.
**mpc3 theta_32      120.
**mpc3 theta_44       30.
**mpc3 theta_7       307.5
**mpc3 theta_19      217.5
**mpc3 theta_31      127.5
**mpc3 theta_43      37.5
**mpc3 theta_6       315.
**mpc3 theta_18      225.
**mpc3 theta_30      135.
**mpc3 theta_42       45.
**mpc3 theta_5       322.5
**mpc3 theta_17      232.5
**mpc3 theta_29      142.5
**mpc3 theta_41      52.5
**mpc3 theta_4       330.
**mpc3 theta_16      240.
**mpc3 theta_28      150.
**mpc3 theta_40       60.
**mpc3 theta_3      337.5

```



```

**mpc3 theta_15      247.5
**mpc3 theta_27      157.5
**mpc3 theta_39      67.5
**mpc3 theta_2       345.
**mpc3 theta_14      255.
**mpc3 theta_26      165.
**mpc3 theta_38      75.
**mpc3 theta_1       352.5
**mpc3 theta_13      262.5
**mpc3 theta_25      172.5
**mpc3 theta_37      82.5
***table
**file tab1 ae16_chg_2_3c 1 2
***material
**file var_int_pt_jeu4.mat
**var_mat_ini Cv11 1. Cv22 1. Cv33 1.
***output
**component
eto11 eto22 eto33 eto12 eto23 eto31
sig22 sig33 sig12 sig23 sig31
F11 F22 F33 F12 F23 F13 F21 F32 F31
pk2_011 pk2_022 pk2_033 pk2_012 pk2_023 pk2_031
p dv welas
U1 U2 U3 RU1 RU2 RU3 triax
coup1 coup2 coup3
**verbose
***return

```

#### 1.1.4. Fichier matériau utilisé ans l'approche par variables internes

```

***behavior visco_hyper_elastic_pthomson
**visco_hyper_elastic_pthomson
ce_10      4.112
ce_01      0.973
ce_11      0.
ce_20      2.448
ce_02      0.
cv_10      4.715
cv_01      1.42
fv         10.
**damage
d_inf      0.754
eta        0.253
***return

```

## Annexe 4A

### Résultats des essais de fatigue effectués sur les nuances SBR B et C

Les tableaux des figures 4A.1 et 4A.2 donnent les quelques résultats bruts obtenus sur les nuances B et C des SBR.

La nuance B, très raide, n'a pu être testée que dans les conditions optimum de fonctionnement de la machine électromécanique de fatigue : alignement du moteur, tension de la courroie d'entraînement. Ces conditions n'ont été atteintes que le temps de faire deux essais.

ep	n° lot	U <sub>min</sub> (mm)	U <sub>max</sub> (mm)	Observations	N <sub>i</sub> extrapolé (cycles)
BP1	1	0	16	N=4 100 plusieurs fissures de 1 mm sur écritures	4 100
BP2	1	5	21	N= 6 700 fissure 2 mm dans ZU	6 000

*Figure 4A.1 – SBRB - Résultats des essais de traction/compression obtenus sur les éprouvettes 'plots'*

ep	n° lot	U <sub>min</sub> (mm)	U <sub>max</sub> (mm)	Observations	N <sub>i</sub> extrapolé (cycles)
CP1	1	0	15	N=6 500 fissure 1.5 mm hors ZU	6 500
CP2	1	10	15	N=150 000 RAS - essai arrêté	infini
CP3	1	0	20	N=2 000 fissure sur point d'injection	2 000
CP4	1	10	20	N=200 000 RAS - arrête l'essai	infini
CP5	1	0	10	N=19 000 fissure 5 mm au dessus du point d'injection	12 000
CP6	1	-5	+5	N=400 000 RAS	infini

*Figure 4A.2 – SBRC - Résultats des essais de traction/compression obtenus sur les éprouvettes 'plots'*

Le SBR de nuance C semble moins résistant à la fatigue que le SBR A. Le SBR B semble comparable au SBR A.

Le nombre de ces essais est évidemment insuffisant.

## Annexe 4B

# Mesure de la température au sein de l'éprouvette plot sollicitée en traction compression

Les élastomères de type SBR étudiés présentent un comportement hyperélastique viscoélastique. La dissipation d'énergie est de l'ordre de 35 % de l'énergie fournie lors du cycle stabilisé en traction uniaxiale. Cette dissipation se traduit sous forme de chaleur. D'autre part, le faible coefficient de conductivité thermique des élastomères en général, conduit à une accumulation de chaleur au sein de l'éprouvette.

On conçoit ainsi facilement que l'augmentation de la fréquence des essais de fatigue conduit à une augmentation de la température interne de la pièce. Or, les propriétés chimiques, physiques – post-réticulation – et mécaniques – modification du comportement - du SBR peuvent évoluer sous l'effet de ces auto-échauffements. Il faut donc choisir une fréquence d'essai permettant de limiter l'auto-échauffement et donc la température au sein de l'éprouvette.

Ce rapport résume l'étude expérimentale qui a permis de mesurer la température au cœur des plots testés en traction-compression en fonction de la fréquence et présente un calcul de thermique, approximatif puisque les valeurs des coefficients de conductivité thermique sont inconnues.

### 1.1.1. Etude expérimentale

#### Conditions expérimentales

Dans un premier temps, la température en surface de l'éprouvette 'plot' est mesurée au cours du régime transitoire. Elle est mesurée par application d'un thermocouple sur la surface. Les valeurs de température sont perturbées puisque l'extrémité du thermocouple subit les flux d'air ambiant.

Dans un second temps, la température est mesurée au sein de l'éprouvette, selon sa direction radiale, au cours du régime stabilisé. Le plot est percé radialement sur une longueur de 20 mm environ. Le thermocouple est alors inséré dans cette entaille. Les mesures ainsi effectuées nous permettent de nous affranchir des flux thermiques ambiants dans la salle de manipulation (courant d'air, climatisation en fonctionnement intermittent, ...).

Les paramètres variables lors de ces manipulations sont la fréquence, l'amplitude du déplacement imposé, et la distance au centre de l'éprouvette.

#### Résultats

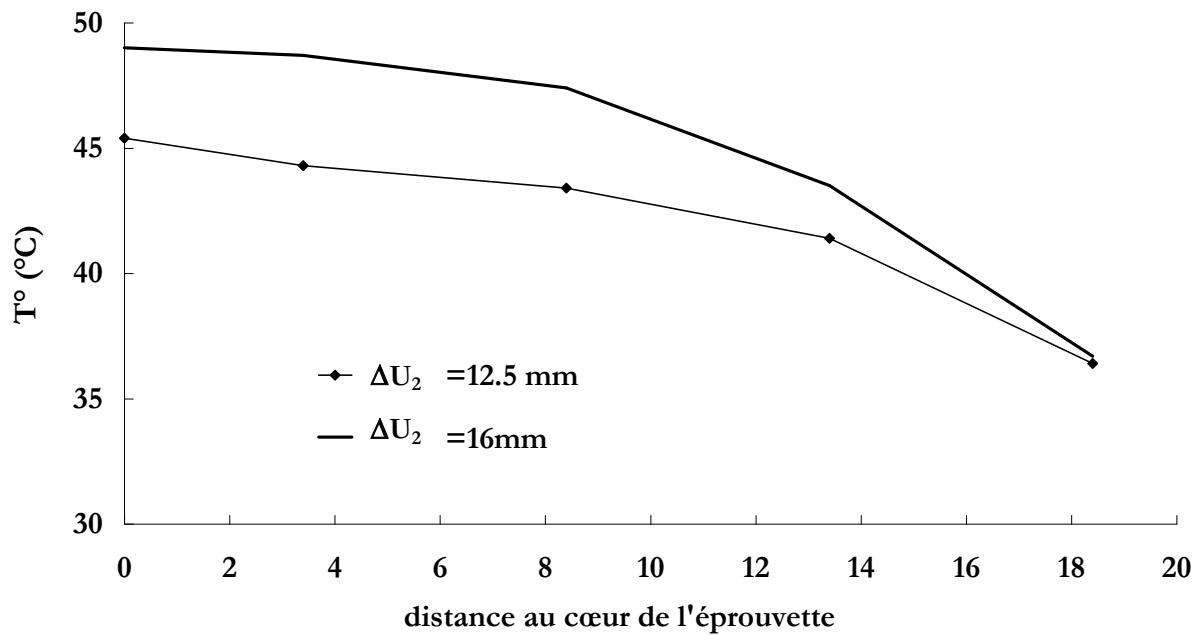
Les résultats de la première manipulation sont résumés dans le tableau de la Fig. 4A.1.

	T° surface (°C)	tps de stabilisation (min)
f=0.25 Hz	35	20
f=0.5 Hz	39	17
f=1 Hz	49	12

**Figure 4A.1** - Evolution de la température au cours du régime transitoire en surface de l'éprouvette –  $\Delta l = 12.5 \text{ mm}$

L'augmentation de la fréquence conduit à une augmentation de la température de surface relativement importante, ainsi qu'à une diminution du temps de stabilisation.

Les résultats de la deuxième manipulation sont représentés sur la Fig. 4A.2.



**Figure 4A.2** - Mesure de la température en fonction de la distance au cœur de l'éprouvette en régime stabilisé –  $f=0.25 \text{ Hz}$

La différence de température entre la surface et le cœur de l'éprouvette est de l'ordre de  $10^\circ\text{C}$ . Cette valeur augmente avec l'amplitude du déplacement imposé.

### 1.1.2. Calcul thermique

Un calcul thermique de conduction est appliqué à l'éprouvette 'plot'. Les résultats expérimentaux présentés ci-dessus montrent que la température de l'éprouvette se stabilise après 20 minutes environ. Nous faisons donc l'hypothèse qu'une simulation thermique en régime permanent (où  $T$  est indépendant de  $t$ ) convient à la description du champ de température des éprouvettes diabolos testées en endurance.

L'équation générale s'écrit :

$$\lambda \cdot \Delta T + \dot{p} = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec	$\lambda$	conductivité thermique ( $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )
	$\Delta T$	Laplacien de la température (K)
	$\dot{p}$	puissance thermique (par unité de volume) dissipée dans le milieu ( $\text{W.m}^{-3}$ )
	$\rho$	masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
	$C_p$	chaleur massique ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ )

NB : on appelle  $T_i$  la température à cœur et  $T_0$  celle en peau.

En régime stabilisé et en coordonnées cylindriques, cette équation s'écrit :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\dot{p}}{\lambda}$$

Nous ne considérons que la conduction radiale, ce qui simplifie les calculs. En effet, nous nous attachons uniquement au comportement thermique de la partie centrale de l'éprouvette. Si la température ne dépend que du rayon  $r$ , nous avons à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\dot{p}}{\lambda} \quad (B.3)$$

Remarquons que la puissance thermique  $\dot{p}$  est constante pour un essai donné ( $\dot{p}$  correspond en fait l'énergie dissipée en 1 s).

Nous posons donc :

$$-\frac{\dot{p}}{\lambda} = C^{te} = A \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = A \cdot r \quad \Rightarrow \quad r \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{A \cdot r^2}{2} + B$$

Pour la condition aux limites  $r = 0$ , nous avons  $dT/dr = 0$  (la tangente de la courbe de répartition de la température en fonction du rayon est horizontale sur l'axe), ce qui donne  $B = 0$ . On considère en outre le rayon de la partie cylindrique du plot à peu près constant, égal au rayon initial  $R_0$ . On peut donc écrire :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A \cdot r}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_i - T_0 = \frac{\dot{p} \cdot R_0^2}{4\lambda}} \quad (B.4)$$

#### Application numérique :

$$R_0 = 18.4 \text{ mm}$$

La puissance dissipée  $\dot{p}$  peut s'estimer à partir de la connaissance de l'énergie dissipée lors d'un cycle et de la fréquence ( $s^{-1}$ ).

L'énergie dissipée lors du 5<sup>ème</sup> cycle de l'essai AP4 est 260J/mm<sup>3</sup>. La période de cet essai étant de 3s. La puissance dissipée par unité de temps est 87 J/mm<sup>3</sup>.

La conductivité thermique  $\lambda$  peut être évaluée à partir des valeurs de conductivité du noir de carbone (NC), de la Silice et de la gomme, en considérant valable la loi des mélanges.

Les valeurs trouvées dans le [Polymer Handbook, 1989] sont :

$$\lambda_{\text{gomme SBR}} = 190-250 \cdot 10^{-3} \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \approx 0.2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{SiO}_2 \text{ parallèle axe c}} = 0.024 \text{ cal.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{SiO}_2 \text{ perp axe c}} = 0.01 \text{ cal.s}^{-1}.\text{cm}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Nous choisissons une valeur intermédiaire  $\lambda_{\text{SiO}_2} = 0.017 \cdot 4.18 \cdot 10^2 = 8.360 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

On peut alors estimer la conductivité du SBR A, contenant 30% de charges de silice, d'après la loi des mélanges.

$$\lambda_{\text{gomme}} \cdot \frac{70}{100} + \lambda_{\text{SiO}_2} \cdot \frac{30}{100} = 2.7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

On constate que l'ajout de silice, possédant un coefficient de conductivité thermique fort, conduit à une augmentation importante de la conductivité de la gomme.

On peut alors calculer

$$\Delta T = \frac{87 \cdot 10^3 \cdot (18.4 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot 2.7} = 3 \text{ }^\circ\text{C}$$

Or, les mesures expérimentales conduisaient à une valeur de  $\Delta T$  de 12  $^\circ\text{C}$ .

L'erreur peut être due à une mauvaise estimation de la valeur de conductivité thermique de la silice. En effet, nous avons utilisé une valeur mesurée sur la silice compacte. Or, comme nous l'avons observé, la silice présente dans le SBR est formée d'agrégats qui se sont agglomérés. Cet assemblage de particules conduit nécessairement à une diminution de la conductivité thermique.

## Conclusion

A la suite de cette étude, nous décidons de travailler à des fréquences de l'ordre de 0.3 Hz. Nous estimons ainsi qu'une température de l'ordre de 50°C au cœur de l'éprouvette n'engendre pas de perturbations dues à des effets thermiques.

Bibliographie

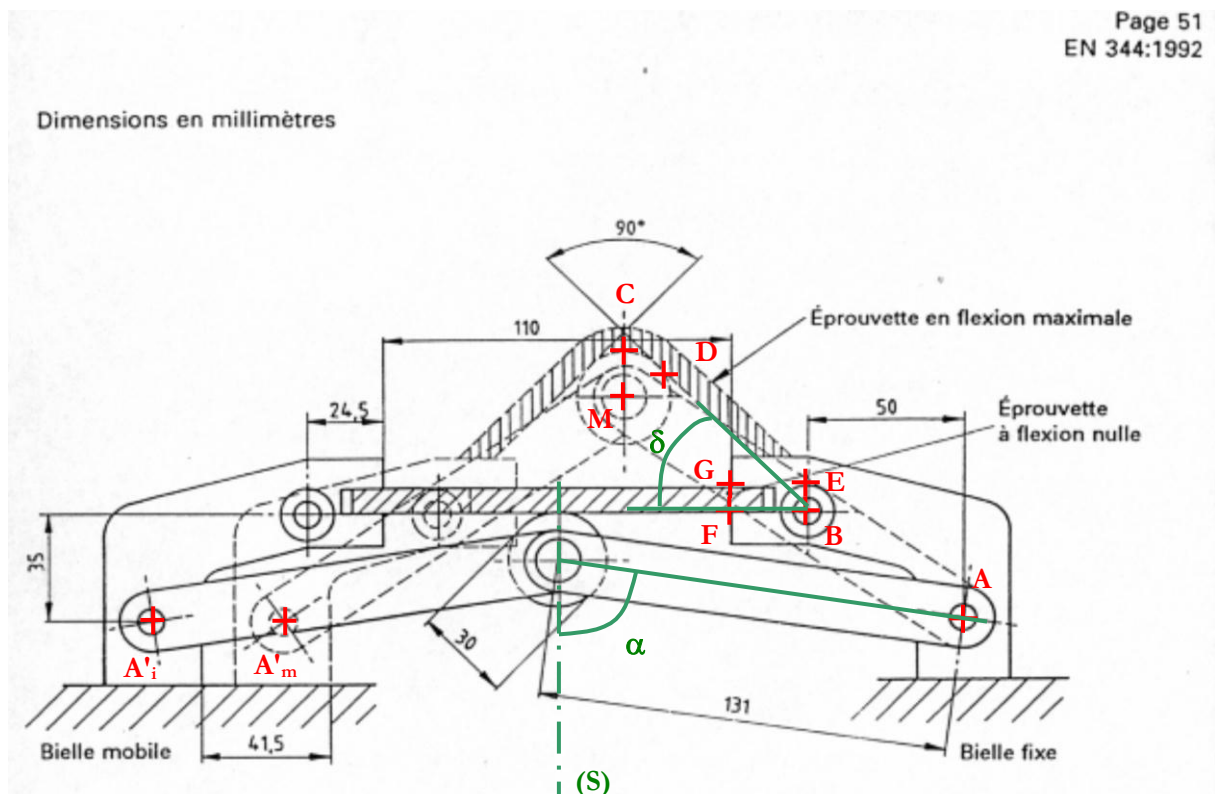
**Polymer Handbook** – Brandup, Immergut Editors , Wiley Interscience - **1989**

## Annexe 5A

### Etude cinématique de l'essai Bennewart

Cette annexe présente le calcul analytique des conditions limites appliquées à la semelle testée sur l'essai Bennewart. Cette étude est utile pour la mise en données du calcul par éléments finis de la semelle testée sur cet essai.

Le schéma présenté dans la norme est le suivant :



**Figure 5A.1** – Schéma de l'essai Bennewart et de l'éprouvette en flexion (zone hachurée)

Nous avons nommé certains points utiles pour la description du mouvement.

Le point A' est en translation parallèle à l'axe 1. Il oscille la position A'<sub>i</sub> et A'<sub>m</sub>. Cette oscillation est engendrée par un moteur.

Le point M correspond au centre de la rotule. Son mouvement est induit par la translation parallèle à l'axe 1 du point A, appartenant au bras gauche. Notons que la rotule peut tourner librement autour des deux bras.

Le point C correspond au point de contact entre la rotule et l'éprouvette. La symétrie du système impose que le glissement à ce point est nul.

Le point D correspond au point où l'éprouvette est tangente à la rotule (dans l'hypothèse où l'éprouvette est suffisamment étirée pour que le segment DF soit linéaire).

Les quatre points B, E, G, F correspondent aux extrémités de l'étrier. L'éprouvette est pincée sur sa face inférieure et supérieure aux points F et G.

L'angle entre l'axe 2 et le bras gauche est désigné par  $\alpha(t)$ . L'angle entre l'axe 1 et l'éprouvette est désignée  $\delta(t)$ .

Nous exprimons tout d'abord le mouvement du centre de la rotule M par rapport au point fixe B<sub>0</sub>.

Dans un deuxième temps, afin de tenir compte de la symétrie par rapport à l'axe S, nous étudierons le mouvement de B (B<sub>0</sub> devenu mobile dans le nouveau repère attaché au point M) par rapport au point fixe M.

Dans un troisième temps, pour affiner les conditions limites, nous imposerons la trajectoire des points F et G situés sur l'extrémité de la lanière.

### 1) Côtes

Définissons tout d'abord l'ensemble des côtes. Elles sont données en mm.

L'indice i indique la position basse de la rotule, l'angle  $\alpha = \alpha_i$ . De même, l'indice m indique la position haute de la rotule,  $\alpha = \alpha_m$ .

Centre du repère orthonormé : A

A (0,0)  
A'<sub>i</sub> (-259,0)  
A'<sub>m</sub> (-217.5,0)  
B(-50,+35)

$$\mathbf{A'_i A'_m} \begin{vmatrix} 41.5 \\ 0 \end{vmatrix}$$

r : rayon de la rotule                      r = 15  
L : longueur du bras de levier              L = 131  
L<sub>m</sub> : longueur de la pince                  L<sub>m</sub> = FB = 24.5  
L<sub>e</sub> : longueur de l'éprouvette              L<sub>e</sub> = 110  
e : épaisseur de la lanière                  à définir  
 $\sin(\alpha_i) = x_{M i A i} / L = -AA'_i / (2L)$   
 $\cos(\alpha_i) = y_{M i A i} / L$

### 2) Mouvement de M par rapport à B<sub>0</sub>

Les vecteurs sont indiqués en gras.

$$\mathbf{BM} = \mathbf{BA} + \mathbf{AM} = \begin{vmatrix} x(BA) - L \sin \alpha(t) \\ y(BA) + L \cos \alpha(t) \end{vmatrix}$$

### 3) Symétrie

L'axe de symétrie S devient fixe. Le point M également, à l'angle  $\alpha = \alpha_i$ . Il est alors nommé M<sub>i</sub>.

L'origine du repère correspond au point de contact entre rotule et semelle.

Pour avoir le mouvement du point B par rapport à M<sub>i</sub>, il suffit d'inverser les équations précédentes :

$$\mathbf{M_i B} \begin{vmatrix} L \sin \alpha - x(BA) \\ -L \cos \alpha - y(BA) \end{vmatrix}$$

Le mouvement de B par rapport à sa position initiale B<sub>i</sub> est :

$$\mathbf{B_i B} = \mathbf{B_i M_i} + \mathbf{M_i B} \begin{vmatrix} L \sin \alpha - x(BA) + x(M_i B) \\ -L \cos \alpha - y(BA) + y(M_i B) \end{vmatrix}$$



Variation de  $\alpha$  avec le temps :

L'angle  $\alpha$  ne varie pas linéairement avec la temps puisqu'il son évolution est guidé par la translation de A:

$$X_0 : AA'_i$$

$$X(t) = AA'(t) = X_0 + x(t) = AA'_i + x(t)$$

$x(t) = A'_i A'(t)$  varie de façon sinusoïdale avec le temps car la translation est imposée par un moteur.

Soit  $\beta(t)$  l'angle moteur.

$$x(t) = -41.5/2 * (\cos(\beta(t)) - 1)$$

$$\text{Or } \sin(\alpha) = -AA' / (2L)$$

$$\text{Ainsi } \sin[\alpha(t)] = -X_0/2/L + x(t)/2/L$$

Application numérique :

$$\sin(\alpha_i(t)) = -259/2/131 + 41.5/4/131 * (\cos(\beta(t)) - 1)$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{MB} \left| \begin{array}{l} + 131*\sin[\alpha(t)] - 50 \\ - 131*\cos[\alpha(t)] + 35 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{BiB} \left| \begin{array}{l} + 131*\sin[\alpha(t)] - 50 - 79.5 \\ - 131*\cos[\alpha(t)] + 35 - 15 \end{array} \right. \end{array}$$

La norme indique que la vitesse de flexion doit être comprise entre 125 et 150 cycles/min. La période d'un cycle doit être comprise entre 0.4 et 0.48 s.

On fixe la période à 0.48.

Le tableau suivant indique les angles en fonction du temps.

temps (s)	$\alpha_{\text{moteur}} (^{\circ})$	$\alpha_{\text{moteur}} (\text{rad})$	$x(t)=A'_i A'(t)$	$X(t)=AA'(t)$	$\sin \alpha$	$\alpha (\text{rad})$	$\alpha (^{\circ})$	$x(\text{MB})$	$y(\text{MB})$	$x(\text{BiB})$	$y(\text{BiB})$
0.00	0	0.00	0.00	-259.00	0.99	1.42	81.32	79.50	15.23	0.00	0.23
0.01	10	0.17	0.32	-258.68	0.99	1.41	80.88	79.34	14.23	-0.16	-0.77
0.03	20	0.35	1.25	-257.75	0.98	1.39	79.66	78.87	-58.50	-0.63	-3.50
0.04	30	0.52	2.78	-256.22	0.98	1.36	77.94	78.11	-62.36	-1.39	-7.36
0.05	40	0.70	4.85	-254.15	0.97	1.33	75.94	77.07	-66.84	-2.43	-11.84
0.07	50	0.87	7.41	-251.59	0.96	1.29	73.79	75.79	-71.56	-3.71	-16.56
0.08	60	1.05	10.38	-248.63	0.95	1.25	71.61	74.31	-76.32	-5.19	-21.32
0.09	70	1.22	13.65	-245.35	0.94	1.21	69.46	72.67	-80.96	-6.83	-25.96
0.11	80	1.40	17.15	-241.85	0.92	1.18	67.38	70.93	-85.38	-8.57	-30.38
0.12	90	1.57	20.75	-238.25	0.91	1.14	65.42	69.13	-89.50	-10.38	-34.50
0.13	100	1.75	24.35	-234.65	0.90	1.11	63.59	67.32	-93.28	-12.18	-38.28
0.15	110	1.92	27.85	-231.15	0.88	1.08	61.92	65.58	-96.67	-13.92	-41.67
0.16	120	2.09	31.13	-227.88	0.87	1.05	60.43	63.94	-99.65	-15.56	-44.65
0.17	130	2.27	34.09	-224.91	0.86	1.03	59.14	62.46	-102.19	-17.04	-47.19
0.19	140	2.44	36.65	-222.35	0.85	1.01	58.07	61.18	-104.29	-18.32	-49.29
0.20	150	2.62	38.72	-220.28	0.84	1.00	57.22	60.14	-105.92	-19.36	-50.92
0.21	160	2.79	40.25	-218.75	0.83	0.99	56.61	59.38	-107.10	-20.12	-52.10
0.23	170	2.97	41.18	-217.82	0.83	0.98	56.24	58.91	-107.80	-20.59	-52.80
0.24	180	3.14	41.50	-217.50	0.83	0.98	56.11	58.75	-108.04	-20.75	-53.04

**Figure 5A.2** – Calcul du déplacement du point B par rapport à M, centre de la rotule et par rapport à sa position initiale Bi

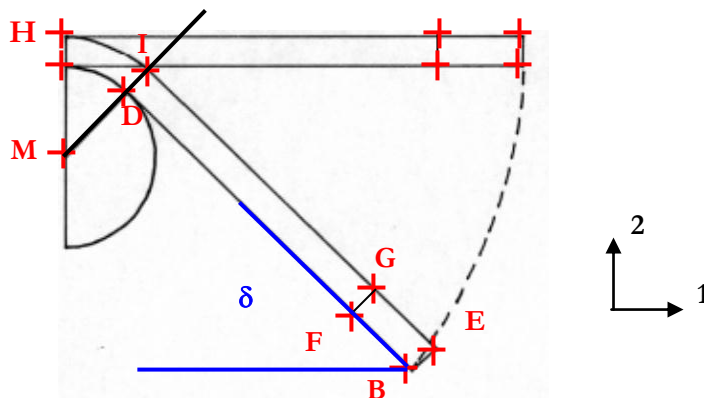
Il existe vraisemblablement une erreur sur les côtes qui introduit une erreur de 0.23 mm. Nous la corrigeons par une simple soustraction. Les deux dernières colonnes du tableau sont utilisées pour appliquer les conditions limites de chargement sur l'étrier.

### 5) Conditions de déplacement de l'extrémité de la lanière dans le repère (1,2) d'origine M

Prenons comme hypothèse que la lanière est suffisamment souple pour être étirée, et donc que le segment DB est rectiligne, et perpendiculaire au rayon du cercle tangent à l'éprouvette. La partie linéaire de la lanière est à tout moment tangente à la rotule

$\delta$  est l'angle que fait la lanière (dans sa partie linéaire) avec l'axe 1, ou l'angle que fait l'extrémité de la lanière avec l'axe 2.

Shématisons :



**Figure 5A.3** – Représentation schématique de la semelle en flexion sur l'essai Bennewart (prise en compte de la symétrie de l'essai et chargement de repère)

Pour être précis il faudrait connaître à tout moment l'angle que fait la partie linéaire de l'éprouvette avec l'un des axes.

Pour ce faire, il faut connaître à tout moment les coordonnées du "dernier point de contact" entre l'éprouvette et la rotule.

On se considère dans un repère où la rotule est fixe: on raisonne par rapport à son centre M.

C est le point de contact initial :  $C=D_i$

On cherche à exprimer l'équation en fonction du temps du vecteur DB, qui correspond à la partie linéaire de l'éprouvette.

On a alors :

$$MD \begin{cases} r \cdot \sin \delta \\ r \cdot \cos \delta \end{cases}$$

$$MC \begin{cases} 0 \\ 15 \end{cases}$$

$$MB \begin{cases} L \cdot \sin \alpha - x(BA) \\ -L \cdot \cos \alpha - y(BA) \end{cases}$$

Ainsi

$$DB \begin{cases} -r \cdot \sin \delta + L \cdot \sin \alpha - x(BA) \\ -r \cdot \cos \delta - L \cdot \cos \alpha - y(BA) \end{cases}$$

A tout moment, on a  $\tan \delta = y(DB) / x(DB)$

On obtient donc l'équation

$$\tan\delta = [-r*\cos\delta - L*\cos\alpha - y(BA)] / [-r*\sin\delta + L*\sin\alpha - x(BA)]$$

$$A.N. : \tan\delta = [-15*\cos\delta - 131*\cos\alpha + 35] / [-15*\sin\delta + 131*\sin\alpha - 50]$$

Cette équation nous permet d'exprimer  $\delta(t)$  en fonction de  $\alpha(t)$ .

L'équation est résolue numériquement. (cf fichier MathCad EssaiB.mcd)

Les résultats sont affichés dans le tableau suivant :

temps (s)	angle moteur (°)	$\delta$ en degré
0.00	0.00	0.17
0.01	10.00	0.56
0.03	20.00	2.55
0.04	30.00	5.44
0.05	40.00	8.86
0.07	50.00	12.59
0.08	60.00	16.46
0.09	70.00	20.35
0.11	80.00	24.16
0.12	90.00	27.81
0.13	100.00	31.23
0.15	110.00	34.36
0.16	120.00	37.17
0.17	130.00	39.59
0.19	140.00	41.62
0.20	150.00	43.22
0.21	160.00	44.37
0.23	170.00	45.06
0.24	180.00	45.30

**Figure 5A.4** – Variation de l'angle  $\delta$  avec le temps

On vérifie bien que :

$$\alpha = \alpha_0 = 81.32^\circ \Rightarrow \delta_0 = 0^\circ$$

$$\alpha = \alpha_m = 56.11^\circ \Rightarrow \delta_m = 45^\circ \text{ (on se fie à la figure pour dire que } \delta_m = 90^\circ / 2 \text{)}$$

Connaissant les valeurs de  $\delta$  en fonction de  $\alpha$ , nous pourrions calculer la trajectoire des points E, F et G. On considère que la pince en acier est infiniment plus raide que la semelle et n'est donc pas déformée.

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{ME} = \mathbf{MB} + \mathbf{BE} & \left| \begin{array}{l} \mathbf{BE} \quad e * \sin\delta \\ -e * \cos\delta \end{array} \right| & \left| \begin{array}{l} \mathbf{ME} \quad L*\sin\alpha - x(BA) + e * \sin\delta \\ -L*\cos\alpha - y(BA) - e * \cos\delta \end{array} \right| \\ \\ \mathbf{MF} = \mathbf{MB} + \mathbf{BF} & \mathbf{BF} \left| \begin{array}{l} L_m * \cos\delta \\ L_m * \sin\delta \end{array} \right| & \mathbf{MF} \left| \begin{array}{l} L*\sin\alpha - x(BA) - L_m * \cos\delta \\ -L*\cos\alpha - y(BA) + L_m * \sin\delta \end{array} \right| \\ \\ \mathbf{MG} = \mathbf{MB} + \mathbf{BF} + \mathbf{FG} & \mathbf{FG} \left| \begin{array}{l} e * \sin\delta \\ -e * \cos\delta \end{array} \right| & \mathbf{MG} \left| \begin{array}{l} L*\sin\alpha - x(BA) - L_m * \cos\delta + e * \sin\delta \\ -L*\cos\alpha - y(BA) + L_m * \sin\delta - e * \cos\delta \end{array} \right| \end{array}$$

A.N. :

$$\mathbf{MF} \begin{vmatrix} 131*\sin\alpha - 50 - 24.5 * \cos \delta \\ -131*\cos\alpha - 35 + 24.5 * \sin \delta \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{MG} \begin{vmatrix} +131 * \sin\alpha - 50 - 24.5 * \cos \delta + e * \sin\delta \\ -131 * \cos\alpha - 35 + 24.5 * \sin \delta - e * \cos\delta \end{vmatrix}$$

## 6) Calcul des allongements sur la fibre intérieure et la fibre extérieure

La demi-longueur initiale de l'éprouvette est :  $L_e/2 = 55 \text{ mm}$

La demi-longueur finale est  $L_f/2$

Exprimons les longueurs  $C_m F_m$  et  $H_m G_m$ .

$$\mathbf{C}_m \mathbf{F}_m = \mathbf{C}_m \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{F}_m$$

Le segment  $C_m D_m$  est curviligne  $CD = R * \delta$

$$\mathbf{D}_m \mathbf{B}_m \begin{vmatrix} -r*\sin\delta + L*\sin\alpha - x \text{ (BA)} \\ -r*\cos\delta - L*\cos\alpha - y \text{ (BA)} \end{vmatrix}$$

Le segment BF est rectiligne :  $BF = 24.5$

$$\mathbf{H}_m \mathbf{G}_m = \mathbf{H}_m \mathbf{I}_m + \mathbf{I}_m \mathbf{E}_m + \mathbf{G}_m \mathbf{E}_m$$

Le segment  $H_m I_m$  est curviligne  $H_m I_m = (R+e) * \delta$

$$\mathbf{I}_m \mathbf{E}_m = \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m \begin{vmatrix} -r*\sin\delta + L*\sin\alpha - x \text{ (BA)} \\ -r*\cos\delta - L*\cos\alpha - y \text{ (BA)} \end{vmatrix}$$

$$EG = BF$$

## Application numérique

$$\delta_m = 0.79057$$

$$e = 3 \text{ mm}$$

$$CD = 15 * 0.79057$$

$$\mathbf{DB} \begin{vmatrix} -15*\sin(0.79057) + 131*\sin(0.97938) - 50 \\ -15*\cos(0.79057) - 131*\cos(0.97938) + 35 \end{vmatrix}$$

$$BF = 24.5 \text{ mm}$$

$$HI = (15+3) * 0.79057 \text{ mm}$$

$$\mathbf{IE} \begin{vmatrix} -15*\sin(0.79057) + 131*\sin(0.97938) - 50 \\ -3*\cos(0.79057) - 131*\cos(0.97938) + 35 \end{vmatrix}$$

$$EG = 24.5 \text{ mm}$$

$$||CD|| = 11.85855$$

$$||DB|| = 68.3623$$

$$||BF|| = 24.5$$

$$||HI|| = 14.23026$$

$$L_{inf} = 55.72 \text{ mm}$$

$$L_{sup} = 58.09256 \text{ mm}$$

D'où

$$\lambda_{inf} = (55.72 - 55) = 1.01$$

$$\lambda_{sup} = (58.09 - 55) = 1.06$$

$$e = 20 \text{ mm}$$

$$||HI|| = 27.66995$$

$$L_{sup} = 71.53225 \text{ mm}$$

D'où

$$\lambda_{sup} = (71.53 - 55) = 1.3$$

Pour une épaisseur d'éprouvette de 3 mm, la fibre inférieure est donc allongée de 1.01, aux erreurs et approximations de calcul près. La fibre supérieure de 1.06.

Pour une épaisseur de 20 mm, la fibre supérieure est allongée de 1.3.