



HAL
open science

MODELISATION NUMERIQUE DU CONTACT ET DU FROTTEMENT EN MISE EN FORME DES METAUX

Michel Bellet, Lionel Fourment, Elisabeth Massoni, Jean-Loup Chenot

► **To cite this version:**

Michel Bellet, Lionel Fourment, Elisabeth Massoni, Jean-Loup Chenot. MODELISATION NUMERIQUE DU CONTACT ET DU FROTTEMENT EN MISE EN FORME DES METAUX. Les Presses de l'Ecole des Mines. Surfaces, tribologie et formage des matériaux, pp.435-460, 2001. <hal-05011802>

HAL Id: hal-05011802

<https://minesparis-psl.hal.science/hal-05011802v1>

Submitted on 30 Mar 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

MODELISATION NUMERIQUE DU CONTACT ET DU FROTTEMENT EN MISE EN FORME DES METAUX

M. BELLET, L. FOURMENT, E. MASSONI, J.-L. CHENOT
Ecole des Mines de Paris, Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF)
UMR CNRS 7635
BP 207 - 06904 Sophia Antipolis Cedex, FRANCE

RÉSUMÉ

Le problème du contact entre pièce et outillage est analysé dans le contexte de la simulation par éléments finis des procédés de mise en forme des métaux. Pour simplifier, on considère que le matériau de la pièce est viscoplastique. Les différentes équations intégrales à résoudre, correspondant aux différentes formulations du contact, sont exposées, dans le cadre d'une résolution en variables vitesse et pression. La discrétisation des équations est alors présentée. On étudie ensuite le cas du contact entre deux corps déformables correspondant à un outil déformable ou à un contact de la matière avec elle-même lors d'un repli. Concernant l'identification des paramètres physiques de la loi de frottement, une méthode inverse est décrite. Enfin, des applications sont présentées : contact lors de l'indentation du verre par une pièce métallique, contact pièce-moule lors du refroidissement en fonderie et identification du frottement en mise en forme des métaux.

INTRODUCTION

Le problème du contact unilatéral en mise en forme des métaux est crucial pour simuler numériquement les procédés de façon réaliste. L'approche générale consiste à formuler les conditions de contact sous forme différentielle, puis à en déduire une formulation intégrale adaptée au calcul par éléments finis. On citera [1, 2] comme exemples de traitement du contact pièce-outil, et [3, 4] pour l'auto-contact d'une pièce déformée avec elle-même. Selon les applications on choisira diverses formes de lois de comportement, mais dans un souci de simplicité nous illustrerons ici les différentes méthodes choisies dans le cadre d'une formulation en vitesse-pression et d'une loi de comportement de type fluide viscoplastique. On pourra par exemple consulter [5] pour une loi élastoplastique.

La discrétisation par éléments finis et l'intégration temporelle sont assez classiques, tandis que les conditions de contact peuvent être exprimées par de nombreuses méthodes approchées :

- Éléments de contact [6],
- Approches nodales directes [7, 8],
- Pénalisation [9-10],
- Méthode des multiplicateurs de Lagrange [11, 12].

La méthode de Newton-Raphson est le plus souvent utilisée pour résoudre les équations non linéaires du problème, mais il est possible d'avoir recours à des méthodes particulières adaptées au contact comme dans [13].

FORMULATION FLUIDE

Cette formulation est souvent appelée la « flow formulation », elle est décrite en détail dans [14]. Négligeant la contribution élastique, le comportement viscoplastique d'un alliage métallique dense est bien représenté par une loi de Norton-Hoff sous la forme :

$$s = 2K(\bar{\varepsilon})(\sqrt{3}\mathcal{E})^{m-1} \mathcal{E} \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0$$

dans laquelle :

- \mathbf{v} est le champ de vitesse.
- \mathbf{s} est le tenseur déviateur des contraintes, relié au tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par la relation $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} - p\mathbf{I}$, où p est la pression et \mathbf{I} le tenseur identité.
- \mathcal{E} est le tenseur des taux de déformation, partie symétrique du tenseur gradient du champ de vitesse.
- \mathcal{E} est la vitesse de déformation équivalente, définie par :

$$\mathcal{E} = \left(\frac{2}{3} \sum_{i,j} \mathcal{E}_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

- K est la consistance du matériau, fonction de la déformation équivalente (intégrale dans le temps de la vitesse de déformation équivalente ci-dessus) pour tenir compte de l'écroutissage :

$$K(\bar{\varepsilon}) = K_0(\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon})^n \quad (3)$$

- m est l'indice de sensibilité à la vitesse de déformation et n le coefficient d'écroutissage.

Si l'on note Ω le domaine de calcul représentant la pièce, le principe des puissances virtuelles s'énonce, en négligeant les forces de masse et d'inertie :

Pour tout champ de vitesse virtuel \mathbf{v}^* ,

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathcal{E}^* d\omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \quad (4)$$

Dans cette expression, \mathcal{E}^* est le tenseur des vitesses de déformation associé au champ de vitesse virtuel \mathbf{v}^* , \mathbf{T} est le vecteur contrainte extérieure à la surface $\partial\Omega$ du domaine.

Distinguons maintenant la partie $\partial\Omega_v$ de la frontière de Ω sur laquelle le vecteur vitesse est imposé et la partie $\partial\Omega_T$ sur laquelle le vecteur contrainte est imposé.

On note \mathcal{V} l'espace des champs de vitesse \mathbf{v} cinématiquement admissibles, c'est-à-dire ayant les propriétés de dérivabilité et d'intégrabilité ad hoc et satisfaisant $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{imp}$ sur

$\partial\Omega_v$. On note \mathcal{V}^0 l'espace des champs de vitesse \mathbf{v} « cinématiquement admissibles à zéro », c'est-à-dire satisfaisant $\mathbf{v} = 0$ sur $\partial\Omega_v$ (\mathcal{V}^0 peut être désigné aussi comme l'espace des champs de vitesse *virtuels* cinématiquement admissibles).

Le problème à résoudre, issu du principe des puissances virtuelles, s'énonce alors :

Trouver $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, satisfaisant la loi de comportement (1) et tel que :

$$\forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \quad (5)$$

Notons que dans le cas de la flow formulation, l'équation (1) suppose l'incompressibilité du champ de vitesse ($\text{div } \mathbf{v} = 0$). Une formulation mixte vitesse–pression, dans laquelle le champ de pression apparaît comme un champ de multiplicateurs de Lagrange de cette condition d'incompressibilité, est alors utilisée. Le problème devient, en notant \mathcal{P} l'espace des champs de pression :

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad & \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon}^*)^{m-1} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* d\omega - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \\ \forall p^* \in \mathcal{P} \quad & - \int_{\Omega} p^* \text{div } \mathbf{v} d\omega = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

CONTACT ET FROTTEMENT AVEC LES OUTILS

Une description précise des équations du contact peut être trouvée dans [15] et les paragraphes qui suivent en présentent l'essence. Considérons maintenant $\partial\Omega_c$ la partie de $\partial\Omega$ au contact des outils. Sur $\partial\Omega_c$, la vitesse relative par rapport à l'outil, appelée encore vitesse de glissement, \mathbf{v}_s , est définie par :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{out} \quad (7)$$

où \mathbf{v}_{out} est la vitesse de l'outil. La condition de contact unilatéral s'écrit alors de façon classique :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ si } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} < 0 \\ \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} &< 0 \text{ si } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante par rapport à la pièce.

Le problème (6) devient alors :

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon}^*)^{m-1} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* d\omega - \int_{\Omega} p \text{div } \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \cdot \mathbf{v}^* ds - \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^* ds = 0$$

$$\forall p^* \in \mathcal{P} \quad - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\omega = 0$$

et \mathbf{v} vérifie les conditions (8). (9)

Le dernier terme de la première égalité peut se décomposer en contribution normale et tangentielle. Cette dernière fait intervenir une loi de frottement viscoplastique qui relie le vecteur contrainte tangentielle \mathbf{T}_t (contrainte de cisaillement) à la vitesse de glissement tangentielle \mathbf{v}_s sous la forme assez générale :

$$\mathbf{T}_t = -\alpha_f (\sigma_n) K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \quad (10)$$

où α_f est le coefficient de frottement viscoplastique, fonction entre autres de la contrainte normale ($\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$), q est l'indice de sensibilité à la vitesse de glissement.

Le problème (9) devient alors :

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V}_c \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_c^0 \quad \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon})^{m-1} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^* \, d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \cdot \mathbf{v}^* \, ds \\ + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}^* \, ds = 0 \end{aligned}$$

$$\forall p^* \in \mathcal{P} \quad - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\omega = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{avec :} \quad \mathcal{V}_c &= \{ \mathbf{v}, \mathbf{v} = \mathbf{v}_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_v \text{ et } \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \} \\ \mathcal{V}_c^0 &= \{ \mathbf{v}, \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c \} \end{aligned}$$

Ici encore, une formulation mixte vitesse-pression-« contrainte normale de contact » est préférable pour tenir compte explicitement de la condition de contact. On introduit alors les multiplicateurs de Lagrange λ et le problème s'exprime de la manière suivante :

Trouver $(\mathbf{v}, p, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ tels que : $\lambda \leq 0$ et

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon})^{m-1} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^* \, d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^* \, d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \cdot \mathbf{v}^* \, ds \\ + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}^* \, ds - \int_{\partial\Omega_c} \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* \, ds = 0 \end{aligned}$$

$$\forall p^* \in \mathcal{P} \quad - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\omega = 0$$

$$\forall \lambda^* \in \mathcal{L} \quad \int_{\partial\Omega_c} \lambda^* \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \, ds \leq 0 \quad (12)$$

Par comparaison entre (12a) et (9a), λ s'identifie donc à la contrainte normale de contact :

$$\lambda = \sigma_n \leq 0 \quad (13)$$

Il est souvent commode d'utiliser une formulation pénalisée pour imposer la condition de non-pénétration. Cette formulation se déduit directement de la formulation mixte. Toutefois, avant discrétisation des équations, elle est assez délicate à présenter. Si on accepte de garder un certain flou sur la manière d'intégrer les termes de pénalisation alors on peut formuler le problème de la manière suivante.

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad & \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\mathbb{E})^{m-1} \mathbb{E} : \mathbb{E}^* d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \mathbf{v}^* ds \\ & + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}^* ds + \int_{\partial\Omega_c} \rho \langle \mathbf{v}_s, \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* ds = 0 \\ \forall p^* \in \mathcal{P} \quad & - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} d\omega = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

On utilise la notation : $\langle x \rangle = x$ si $x \geq 0$ et $\langle x \rangle = 0$ sinon, le coefficient ρ étant le coefficient de pénalisation.

DISCRETISATION DES EQUATIONS

DISCRETISATION SPATIALE

Pour des éléments isoparamétriques, on écrira les vecteurs coordonnées \mathbf{x} et vitesse \mathbf{v} :

$$\mathbf{x} = \sum_n \mathbf{X}_n N_n(\xi) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{N} \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = \sum_n \mathbf{V}_n N_n(\xi) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \quad (16)$$

avec N_n fonction d'interpolation associée au nœud n ,
 ξ vecteur des coordonnées locales,
 $\mathbf{X}_n, \mathbf{V}_n$ respectivement vecteurs coordonnées et vitesse du nœud n .

Le tenseur des vitesses de déformation peut alors s'exprimer à l'aide de l'opérateur \mathbf{B} , soit :

$$\mathbb{E} = \sum_n \mathbf{V}_n \mathbf{B}_n \quad (17)$$

Le champ de pression est discrétisé de façon analogue à l'aide des pressions nodales P_m et de fonctions d'interpolation M_m compatibles :

$$p = \sum_m P_m M_m \quad (18)$$

Les formes discrétisées du problème (11) deviennent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\varepsilon)^{m-1} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{tr} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\partial\Omega_T} T_{imp} N_n ds + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s N_n ds = 0 \\ - \int_{\Omega} M_m \operatorname{div} \mathbf{v} d\omega = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

où \mathbf{v} vérifie les conditions de contact.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange peut s'écrire, pour ce qui concerne les première et troisième équation de (12) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\varepsilon)^{m-1} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{tr} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\partial\Omega_T} T_{imp} N_n ds + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s N_n ds \\ - \int_{\partial\Omega_c} \lambda \mathbf{N}_n ds = 0 \\ \int_{\partial\Omega_c} L_l \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} ds \leq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

où le multiplicateur de Lagrange λ est exprimé à l'aide des fonctions d'interpolation L_l , définies sur la surface $\partial\Omega_c$ et de ses valeurs nodales Λ_l :

$$\lambda = \sum_l \Lambda_l L_l \quad (21)$$

Dans le cas où les Λ_l sont des fonctions discontinues, par exemple des fonctions Dirac qui s'annulent partout sauf sur les nœuds du maillage, la condition de contact s'écrit :

$$\forall l \in \partial\Omega_c \quad (\mathbf{V}_l - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}_l \leq 0 \quad (22)$$

où \mathbf{n}_l est la normale intérieure à l'outil au point le plus proche de X_l .

Dans ce cas et pour ce qui concerne la première équation, la méthode de pénalisation du contact fournit quant à elle la forme discrétisée :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\varepsilon)^{m-1} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{tr} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\partial\Omega_T} T_{imp} N_n ds + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s N_n ds \\ + \sum_{l \in I_c} \delta_{nl} \rho \langle (\mathbf{V}_l - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}_l \rangle = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

où : I_c est l'ensemble des indices des nœuds potentiellement en contact avec l'outil, δ_{nl} est le symbole de Kronecker ($= 1$ si $n = l$, $= 0$ sinon)

Nous écrivons l'ensemble des équations (19b-20) ou (19b-23) sous la forme symbolique (le vecteur \mathcal{A} des multiplicateurs de Lagrange nodaux pouvant être omis) :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{P}, \mathcal{A}) = 0 \quad (24)$$

La résolution de ce système d'équations non linéaires est généralement effectuée au moyen de la méthode de Newton-Raphson.

DISCRETISATION TEMPORELLE

Le schéma d'Euler explicite à un pas reste le plus employé. Connaissant \mathbf{X}^t au temps t , les champs de vitesse \mathbf{V}^t , de pression \mathbf{P}^t (et éventuellement \mathcal{A}^t) sont calculés en résolvant :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}^t, \mathbf{V}^t, \mathbf{P}^t, \mathcal{A}^t) = 0 \quad (25)$$

La réactualisation des vecteurs nodaux s'effectue alors par :

$$\mathbf{X}_n^{t+\Delta t} = \mathbf{X}_n^t + \Delta t \mathbf{V}_n^t \quad (26)$$

Si l'on écrit les équations du problème au temps $t+\Delta t$, sur la configuration inconnue $\Omega^{t+\Delta t}$, on obtient un schéma semi-implicite du second ordre [16, 17], donc plus précis, qui s'exprime :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}^{t+\Delta t}, \mathbf{V}^{t+\Delta t}, \mathbf{P}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (27)$$

$$\mathbf{X}_n^{t+\Delta t} = \mathbf{X}_n^t + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{V}_n^{t+\Delta t} + \mathbf{V}_n^t) \quad (28)$$

CONTACT DISCRET

Un outil sera défini par les équations :

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{ représente la surface de l'outil} \\ g(\mathbf{x}, t) > 0 & \text{ est l'extérieur de l'outil} \end{aligned} \quad (29)$$

Pour un point matériel de la pièce de coordonnées \mathbf{x}^t et $\mathbf{x}^{t+\Delta t}$, respectivement au début et à la fin de l'incrément de temps, on rencontre les situations suivantes :

i – Cas de la surface libre :

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x}^t, t) > 0 \text{ avec } \mathbf{T}^t = 0) \\ \text{et } (g(\mathbf{x}^{t+\Delta t}, t + \Delta t) > 0 \text{ avec } \mathbf{T}^{t+\Delta t} = 0) \end{aligned} \quad (30)$$

où $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ est le vecteur contrainte ;

ii – Etablissement d'un nouveau contact :

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x}^t, t) > 0 \text{ avec } \boldsymbol{\sigma}_n^t = 0) \\ \text{et } (g(\mathbf{x}^{t+\Delta t}, t + \Delta t) = 0 \text{ avec } \boldsymbol{\sigma}_n^{t+\Delta t} < 0) \end{aligned} \quad (31)$$

où $\sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}$ est la contrainte normale.

iii – Contact glissant pendant l'incrément de temps :

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x}^t, t) = 0 \text{ avec } \sigma_n^t < 0) \\ \text{et } (g(\mathbf{x}^{t+\Delta t}, t + \Delta t) = 0 \text{ avec } \sigma_n^{t+\Delta t} < 0) \end{aligned} \quad (32)$$

iv – Perte du contact :

$$\begin{aligned} (g(\mathbf{x}^t, t) = 0 \text{ avec } \sigma_n^t < 0) \\ \text{et } (g(\mathbf{x}^{t+\Delta t}, t + \Delta t) > 0 \text{ avec } \mathbf{T}^{t+\Delta t} = 0) \end{aligned} \quad (33)$$

L'algorithme de résolution le plus simple consiste à résoudre les équations du problème selon la méthode directe (11), puis à effectuer deux opérations à la fin de l'incrément de temps :

- projeter à la surface de l'outil les nœuds venant d'arriver au contact, et ayant donc pénétré l'outil (une alternative peut consister à calculer la distance normale à la surface de l'outil, puis à imposer à l'incrément suivant une composante normale du champ de vitesse telle que le nœud se retrouve à la surface de l'outil).
- tester le décollement éventuel des nœuds en contact en estimant la valeur de la contrainte normale nodale, ce qui constitue une des principales difficultés de la méthode.

Une première amélioration est obtenue en utilisant une forme incrémentale de la méthode de pénalisation dans le contexte du schéma d'Euler explicite. Le terme de pénalisation de l'équation (23) est remplacé par :

$$\sum_{l \in I_c} \delta_{nl} \rho \left\langle (\mathbf{V}_l^t - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}_l^t \Delta t - d_l^t \right\rangle \mathbf{n}_l^t \quad (34)$$

où d_l^t est la distance au temps t du nœud l à la surface de l'outil,
 \mathbf{n}_l^t est la normale à la surface de l'outil au temps t .

L'ensemble des conditions (30) à (33) peut être imposé en réactualisant (34) après chaque itération (k) de la méthode de Newton-Raphson [8] :

$$\sum_{l \in I_c} \delta_{nl} \rho \left\langle (\mathbf{V}_l^{t(k)} - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}_l^{t(k)} \Delta t - d_l^{t(k)} \right\rangle \mathbf{n}_l^{t(k)} \quad (35)$$

Dans le cas où un schéma d'intégration semi-implicite est utilisé, des méthodes alternatives ont été proposées dans [18, 19].

La méthode des multiplicateurs de Lagrange discrète s'obtient en remplaçant (20b) par :

$$\int_{\partial\Omega_c} ((\mathbf{v}^t - \mathbf{v}_{out}) \cdot \mathbf{n}^t \Delta t - d^t) L_t ds \leq 0 \quad (36)$$

CONTACT ENTRE DEUX SOLIDES DEFORMABLES

PROBLEME CONTINU

En mise en forme des matériaux, on peut distinguer trois types de contacts entre deux milieux déformables : la pièce forme un repli sur elle-même, la pièce est constituée de plusieurs matériaux différents, les outils sont eux-mêmes déformables. On supposera que le contact se produit entre les deux domaines Ω^a et Ω^b , qui peuvent être la pièce et un outil ou bien deux parties de la pièce. A l'interface Γ , la vitesse relative est notée :

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b \quad (37)$$

La condition de contact bilatéral collant s'écrit sur Γ :

$$\mathbf{v}_s = 0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}^a \cdot \mathbf{n}^a + \boldsymbol{\sigma}^b \cdot \mathbf{n}^b = 0 \quad (38)$$

où $\mathbf{n}^a = -\mathbf{n}^b$. Pour un contact unilatéral glissant avec frottement nous avons, par analogie avec (8) :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{n}^a + \mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n}^b &= 0 \text{ si } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} < 0 \\ \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{n}^a + \mathbf{v}^b \cdot \mathbf{n}^b &< 0 \text{ si } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0 \end{aligned}$$

et $\mathbf{T}_t^a = -\alpha^{ab} |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s = -\mathbf{T}_t^b$ (39)

où α^{ab} est le coefficient de frottement à l'interface Γ .

Le problème à résoudre, issu du principe des puissances virtuelles, s'écrit alors sur $\Omega = \Omega^a \cup \Omega^b$:

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V}_c \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_c^0 \quad & \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\boldsymbol{\varepsilon})^{m-1} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^* d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \cdot \mathbf{v}^* ds \\ & + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}^* ds + \int_{\Gamma} \alpha^{ab} |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{v}^{a*} - \mathbf{v}^{b*}) ds = 0 \\ \forall p^* \in \mathcal{P} \quad & - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} d\omega = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\text{avec : } \quad \mathcal{V}_c = \left\{ \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_v, \quad \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c, \quad (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

$$\quad \mathcal{V}_c^0 = \left\{ \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_v, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_c, \quad (\mathbf{v}^a - \mathbf{v}^b) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange s'écrit :

Trouver $(\mathbf{v}, p, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad & \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\mathcal{E})^{m-1} \mathcal{E} \mathcal{E}^* d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \mathbf{v}^* ds + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}^* ds \\ & - \int_{\partial\Omega_c} \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}^* ds + \int_{\Gamma} \alpha^{ab} |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{v}^{a*} - \mathbf{v}^{b*}) ds - \int_{\Gamma} \lambda \mathbf{n}^a \cdot (\mathbf{v}^{a*} - \mathbf{v}^{b*}) ds = 0 \end{aligned}$$

$$\forall p^* \in \mathcal{P} \quad - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} d\omega = 0$$

$$\forall \lambda^* \in \mathcal{L} \quad \int_{\partial\Omega_c} \lambda^* (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}) ds + \int_{\Gamma} \lambda^* (\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}^a) ds \leq 0 \quad (41)$$

Enfin, il existe plusieurs façons de formuler une méthode de pénalisation. Avec les mêmes précautions que pour (14), on peut écrire par exemple :

Trouver $(\mathbf{v}, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^0 \quad & \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\mathcal{E})^{m-1} \mathcal{E} \mathcal{E}^* d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v}^* d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} \mathbf{v}^* ds + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}^* ds \\ & + \int_{\Gamma} \alpha^{ab} |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s \cdot (\mathbf{v}^{a*} - \mathbf{v}^{b*}) ds + \int_{\Gamma} \rho \langle \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}^a \rangle \mathbf{n}^a \cdot (\mathbf{v}^{a*} - \mathbf{v}^{b*}) ds = 0 \end{aligned}$$

$$\forall p^* \in \mathcal{P} \quad - \int_{\Omega} p^* \operatorname{div} \mathbf{v} d\omega = 0 \quad (42)$$

PROBLEME DISCRET

Dans le cas où les deux maillages sont coïncidents à l'interface, on peut choisir de calculer l'intégrale de frontière sur l'une ou l'autre des deux parties, indifféremment. Ainsi l'équation (40a) prend la forme :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2K(\sqrt{3}\mathcal{E})^{m-1} \mathcal{E} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\Omega} p \operatorname{tr} \mathbf{B}_n d\omega - \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T}_{imp} N_n ds + \int_{\partial\Omega_c} \alpha_f K |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s N_n ds \\ + \int_{\Gamma} \alpha^{ab} |\mathbf{v}_s|^{q-1} \mathbf{v}_s (N_n^a - N_n^b) ds = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

où N_n^a est une fonction d'interpolation discontinue correspondant à un nœud n de Γ , continue dans Ω^a et nulle dans Ω^b .

Le cas, plus général en mise en forme, où les maillages ne sont pas coïncidents est plus complexe, notamment pour imposer la continuité de la vitesse normale. La méthode de pénalisation est fréquemment utilisée dans ce contexte. Sauf précaution spéciale [20], on est généralement conduit à rompre la symétrie du problème en privilégiant une surface de contact « maître » Γ^a , l'autre partie Γ^b étant une surface « esclave ». On écrira par exemple le terme de pénalisation sous la forme :

$$\int_{\Gamma^a} \rho \left\langle (\mathbf{v}^{a,t} - \mathbf{v}^{b,t}) \cdot \mathbf{n}^{a,t} \Delta t - d_{ab}^t \right\rangle \mathbf{n}^{a,t} N_n^a ds \quad (44)$$

METHODE INVERSE D'IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE FROTTEMENT

La méthode inverse a été décrite dans [21] pour l'identification des paramètres rhéologiques. Nous présentons ici son extension à l'identification des paramètres tribologiques [22].

De nombreux tests de laboratoire sont utilisés pour mesurer les paramètres de frottement : par exemple l'écrasement d'un cylindre, d'une barre ou d'un anneau. La force d'écrasement et la géométrie sont enregistrées en fonction du taux d'écrasement.

Nous supposons que le problème dépend d'un ensemble de paramètres physiques $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_q)$ décrivant la loi de frottement. Par exemple pour la loi :

$$\mathbf{T}_t = -(\alpha_f + \beta_f \langle -\sigma_n \rangle) K |\mathbf{v}_s|^{\gamma_f - 1} \mathbf{v}_s \quad (45)$$

nous poserons :

$$\pi_1 = \alpha_f, \pi_2 = \beta_f, \pi_3 = \gamma_f \quad (46)$$

Par ailleurs nous supposons que nous disposons d'un ensemble de r mesures expérimentales (forces et grandeurs géométriques, appelées observables) :

$$\mathbf{M}^{exp} = (M_1^{exp}, M_2^{exp}, \dots, M_r^{exp}) \quad (47)$$

Les mêmes variables calculées par un modèle éléments finis du test seront notées :

$$\mathbf{M}^c(\boldsymbol{\pi}) = (M_1^c(\boldsymbol{\pi}), M_2^c(\boldsymbol{\pi}), \dots, M_r^c(\boldsymbol{\pi})) \quad (48)$$

La valeur optimale $\boldsymbol{\pi}_{opt}$ des paramètres tribologiques est obtenue en minimisant l'écart quadratique moyen entre valeurs expérimentales et valeurs calculées :

$$Q(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{k=1}^r \beta_k (M_k^c(\boldsymbol{\pi}) - M_k^{exp})^2 \quad (49)$$

où β_k est un facteur de pondération.

CALCUL DES FACTEURS DE SENSIBILITE

La fonction Q définie par (49) peut être minimisée en utilisant la méthode de Gauss-Newton, pour laquelle il est nécessaire de calculer les facteurs de sensibilité :

$$\frac{dM_k^c(\boldsymbol{\pi})}{d\pi_l} \quad (50)$$

La solution du problème mécanique dépend des paramètres de frottement $\boldsymbol{\pi}$ et le résidu \mathbf{R} est donc fonction de \mathbf{X} , \mathbf{V} , \mathbf{P} et $\boldsymbol{\pi}$ soit :

$$\mathbf{R}(X(\boldsymbol{\pi}), V(\boldsymbol{\pi}), P(\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{\pi}) = 0 \quad (51)$$

Les variables calculées peuvent également être notées :

$$\mathbf{M}^c = M^c(X(\boldsymbol{\pi}), V(\boldsymbol{\pi}), P(\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{\pi}) \quad (52)$$

permettant d'évaluer les facteurs de sensibilité par dérivation :

$$\begin{aligned} \frac{dM^c(\boldsymbol{\pi})}{d\boldsymbol{\pi}} &= \frac{\partial M^c(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial X} \frac{dX}{d\boldsymbol{\pi}} + \frac{\partial M^c(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial V} \frac{dV}{d\boldsymbol{\pi}} \\ &+ \frac{\partial M^c(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial P} \frac{dP}{d\boldsymbol{\pi}} + \frac{\partial M^c(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\pi}} \end{aligned} \quad (53)$$

De façon analogue, la dérivation du résidu \mathbf{R} par rapport à $\boldsymbol{\pi}$ fournit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{R}(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial X} \frac{dX}{d\boldsymbol{\pi}} + \frac{\partial \mathbf{R}(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial V} \frac{dV}{d\boldsymbol{\pi}} + \frac{\partial \mathbf{R}(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial P} \frac{dP}{d\boldsymbol{\pi}} \\ + \frac{\partial \mathbf{R}(X, V, P, \boldsymbol{\pi})}{\partial \boldsymbol{\pi}} = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

La résolution de l'équation (54) permet de calculer les facteurs de sensibilité de la vitesse et de la pression aux paramètres $\boldsymbol{\pi}$ en fonction de $dX/d\boldsymbol{\pi}$. Avec un schéma d'intégration temporelle d'Euler à un pas, on pourra écrire :

$$\frac{dX^{t+\Delta t}}{d\boldsymbol{\pi}} = \frac{dX^t}{d\boldsymbol{\pi}} + \Delta t \frac{dV^t}{d\boldsymbol{\pi}} \quad (55)$$

Pour la loi de frottement viscoplastique (45), on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\pi}} \left(\int_{\partial \Omega_c} (\alpha_f + \beta_f \langle -\sigma_n \rangle) K |\mathbf{v}_s|^{\gamma_f - 1} \mathbf{v}_s N_n ds \right) \quad (56)$$

d'où les expressions :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \alpha_f} = \int_{\partial \Omega_c} K |\mathbf{v}_s|^{\gamma_f - 1} \mathbf{v}_s N_n ds \quad (57)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \beta_f} = \int_{\partial \Omega_c} \langle -\sigma_n \rangle K |\mathbf{v}_s|^{\gamma_f - 1} \mathbf{v}_s N_n ds \quad (58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_n}{\partial \gamma_f} = \int_{\partial \Omega_c} (\alpha_f + \beta_f \langle -\sigma_n \rangle) K |\mathbf{v}_s|^{\gamma_f - 1} (\ln |\mathbf{v}_s|) \mathbf{v}_s N_n ds \quad (59)$$

APPLICATIONS

ETUDE THERMOMECHANIQUE DU CONTACT VERRE / METAL

Le procédé de fabrication des canons électroniques pour tubes de téléviseur consiste à indenter un certain nombre de grilles métalliques dans un support en verre. Pour cela, la surface du verre a préalablement été chauffée au chalumeau. L'assemblage ainsi réalisé est refroidi par convection forcée puis par convection libre. La qualité de l'ancrage dépend des différentes étapes du procédé, et l'étude des contraintes résiduelles à l'interface verre / métal fournit un critère d'appréciation de ce dernier. L'estimation de ces contraintes nécessite un calcul thermomécanique fortement couplé de la déformation des deux matériaux.

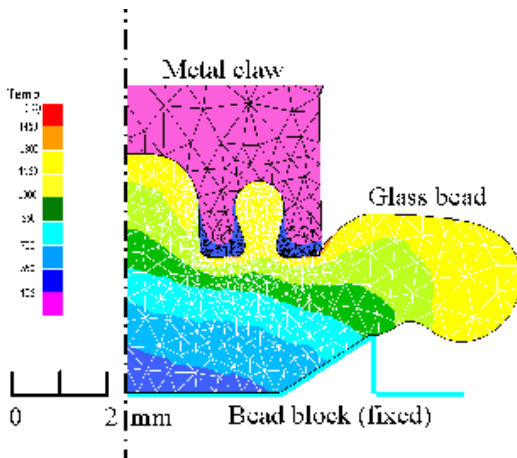


Figure 1 : Isovaleurs de température dans la grille métallique (metal claw) et dans le verre (glass bead), à la fin de l'étape d'indentation et au début de la phase de refroidissement.

L'étude du procédé est effectuée sous l'hypothèse des déformations planes, à l'aide du logiciel FORGE2[®]. La figure 1 présente la géométrie du procédé à la fin de la phase d'indentation et au début du refroidissement. Compte tenu de la rapidité du procédé d'indentation, dans la grille métallique, la température est encore proche de l'ambiante. En revanche, dans le verre, l'hétérogénéité du champ de température reflète la complexité des étapes de chauffage et d'indentation.

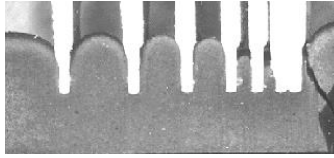


Figure 2 : Identification de la condition de contact à l'interface verre / métal. A gauche et à droite, simulation de l'indentation de deux grilles métalliques dans la perle de verre avec respectivement une condition de contact glissant et parfaitement collant. Au centre, photographie de la coupe d'un essai d'indentation avec des grilles d'espacement variable.

Pendant le refroidissement, le métal a un comportement thermo-élastique alors que le verre a un comportement thermo-élasto-viscoplastique plus complexe, dont la viscosité dépend très fortement de la température. L'essai de frottement présenté sur la figure 2 montre que le verre mouille parfaitement le métal et donc que le contact mécanique est parfait entre les deux matériaux (contact collant). De même, on utilise un modèle de contact thermique parfait (absence de résistance thermique de contact). Pendant le refroidissement, les deux matériaux subissent des déformations de même grandeur, ce qui nécessite l'utilisation d'algorithmes robustes de résolution. Nous avons donc choisi de traiter ce problème de contact entre domaines déformables par la méthode des maillages coïncidents. La figure 3 montre les différentes étapes de création des maillages coïncidents : à partir des contours des deux matériaux obtenus en fin d'indentation, on réalise un unique maillage des deux domaines puis on duplique les nœuds de l'interface verre / métal. Le résultat obtenu dans le cas des canons électroniques est illustré sur la même figure.

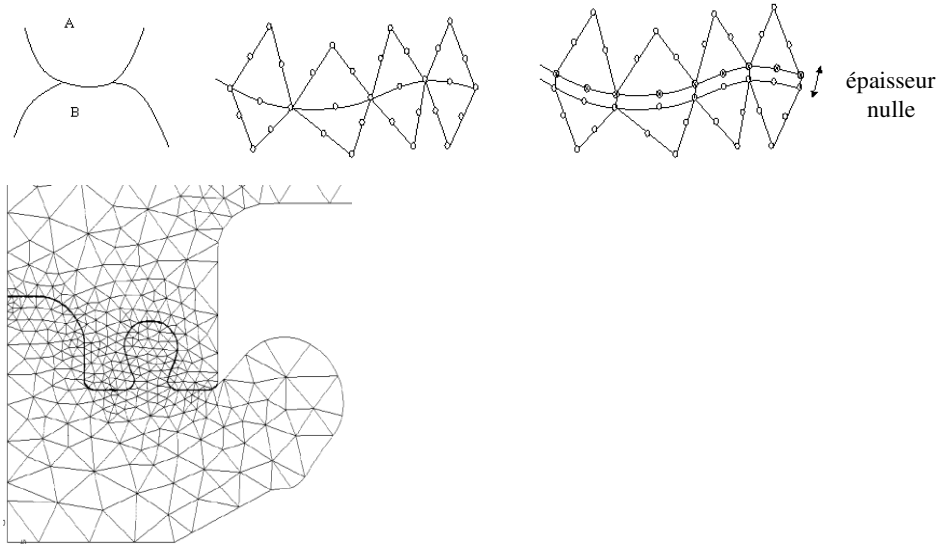


Figure 3 : Illustration des différentes étapes de génération de maillages coïncidents à l'interface verre / métal et maillage de l'assemblage verre / métal pour le calcul du refroidissement avec cette technique.

Les maillages étant coïncidents, il n'y a pas nécessité de privilégier un domaine par rapport à l'autre suivant une stratégie de type « maître / esclave », ce qui simplifie grandement l'écriture des conditions de contact. Après discrétisation, la formulation du contact nodal discret conduit à ajouter le terme de pénalisation suivant dans (23) :

$$\sum_{l \in J_c} \delta_{nl} \rho \left\langle (\mathbf{V}_l^a - \mathbf{V}_l^b) \cdot \mathbf{n}_l \right\rangle \mathbf{n}_l \quad (60)$$

où J_c est l'ensemble des indices des nœuds de l'interface potentiellement en contact.

La condition de contact thermique parfait entre les deux corps est traitée de manière similaire, par pénalisation des valeurs nodales.

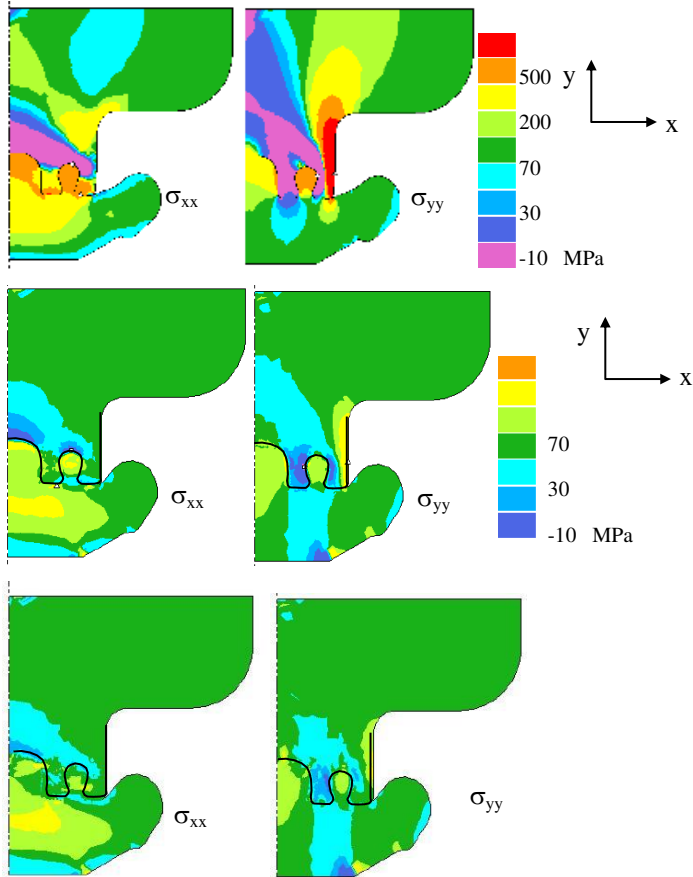


Figure 4 : Isovaleurs des contraintes résiduelles. Figures du haut : avec une faible résistance thermique de contact. Figures du milieu : contact thermique parfait sans relâchement (contact bilatéral). Figures du bas : contact thermique parfait avec possibilité de relâchement (contact unilatéral).

La figure 4 montre les isovaleurs des contraintes résiduelles en fin de refroidissement, pour différents types de conditions aux limites. Pour commencer, on fait l'hypothèse qu'il existe une faible résistance thermique de contact entre le verre et le métal (figures du dessus). Les températures ainsi calculées dans la griffe métallique sont bien inférieures à celles mesurées expérimentalement. Cela conforte donc la thèse d'un contact thermique parfait entre le verre et le métal. Sous cette hypothèse, on calcule des températures de griffe très proches de celles observées. Toutefois, les contraintes résiduelles ainsi estimées (figures du milieu), et tout particulièrement celles en traction, sont bien supérieures à celles que peut supporter le verre sans se rompre. Cela montre qu'il y a perte de contact en certains endroits de l'interface verre / métal, pendant le procédé de refroidissement. Les dernières figures (bas) présentent les résultats obtenus

avec une condition de contact unilatéral. Les contraintes résiduelles sont alors conformes aux observations. La simulation numérique permet donc de prédire avec confiance la valeur des contraintes résiduelles au niveau de l'ancrage verre / métal et ainsi d'optimiser le procédé de fabrication.

ANALYSE THERMOMECHANIQUE DU PROCEDE DE FONDERIE

Dans le procédé de fonderie des alliages métalliques, on s'intéresse à la modélisation des phénomènes thermomécaniques pendant la phase de refroidissement, une fois le moule rempli d'alliage à l'état liquide. L'ensemble constitué de la pièce coulée et des différents éléments du moule se refroidit alors de manière inhomogène, les gradients thermiques donnant naissance à des déformations et contraintes. Ces phénomènes sont accentués par la contraction significative de la plupart des alliages au passage de l'intervalle de solidification. L'interaction mécanique entre la pièce et le moule ainsi qu'entre les différents éléments de moule peut alors être forte : effets de contraction de la pièce autour de noyaux, dilatation contrariée des éléments du moule. Le problème thermomécanique est également fortement couplé : d'une part le comportement local de l'alliage dépend bien évidemment très fortement de la température locale ; d'autre part, la contraction de la pièce peut l'amener à décoller localement de la paroi du moule, créant ainsi une « lame d'air » qui modifie l'échange thermique local.

Pour analyser ce type de problème sur des géométries arbitraires tridimensionnelles, le code de calcul THERCAST a été développé [23-24]. Il est basé sur une résolution multidomaine incrémentale couplée des équations mécaniques et thermiques. Pour ce qui concerne le couplage mécanique, la méthode de pénalisation est utilisée pour traiter le contact entre plusieurs corps déformables, en l'occurrence la pièce (de comportement viscoplastique ou élastoviscoplastique selon la température) et les éléments de moule (considérés élastiques) [25-26].

On présente à la figure 5 un test de solidification instrumenté notamment de capteurs de déplacement servant à mesurer le déplacement de la peau de l'éprouvette coulée, ainsi que le déplacement de la paroi interne du moule.

La figure 6 montre un exemple de comparaison entre déplacements mesurés et calculés. On note l'excellente représentation du phénomène de lame d'air tant sur l'instant d'apparition que sur l'évolution temporelle de l'épaisseur. Les profils de température sont également en parfait accord [24].

Le logiciel a été appliqué à plusieurs géométries industrielles dont le disque de frein illustré à la figure 7. Il s'agit d'une pièce en acier coulé entre deux demi-moules et un noyau central en sable.

De par la température de coulée élevée et la faible diffusivité thermique du sable, la partie des moules au voisinage de la pièce entre rapidement en compression (dilatation contrariée par l'environnement). C'est ce que l'on constate sur la figure 8. La formation de lame d'air est quant à elle illustrée à la figure 9.

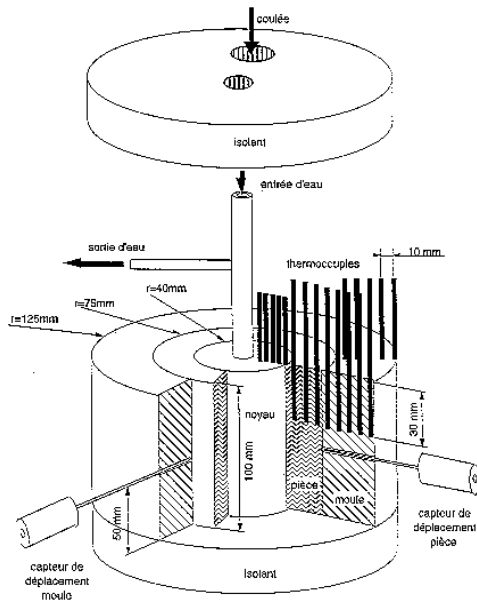


Figure 5 : Test de solidification Svensson : éprouvette en alliage d'aluminium coulée entre noyau et moule en acier. Le test est équipé de thermocouples et de capteurs de déplacement permettant une mesure simultanée du déplacement relatif pièce-moule (donc de l'épaisseur de la lame d'air) et du coefficient de transfert thermique à l'interface (travail expérimental réalisé au Royal Institute of Technology, Stockholm).

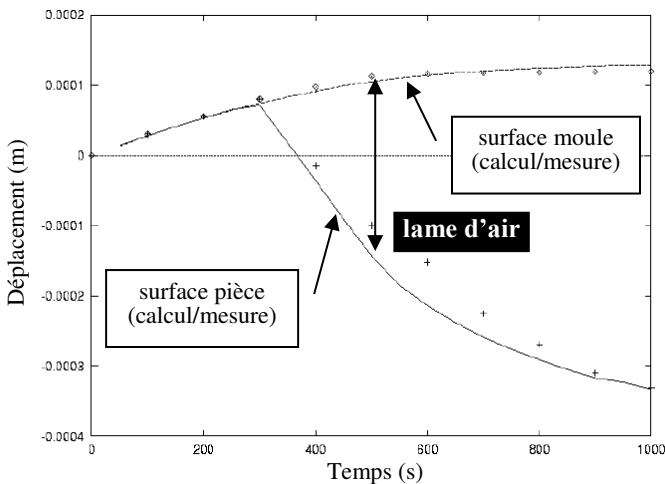


Figure 6 : Test Svensson. Comparaison entre déplacements mesurés et calculés de la surface externe de l'éprouvette et de la paroi interne du moule.

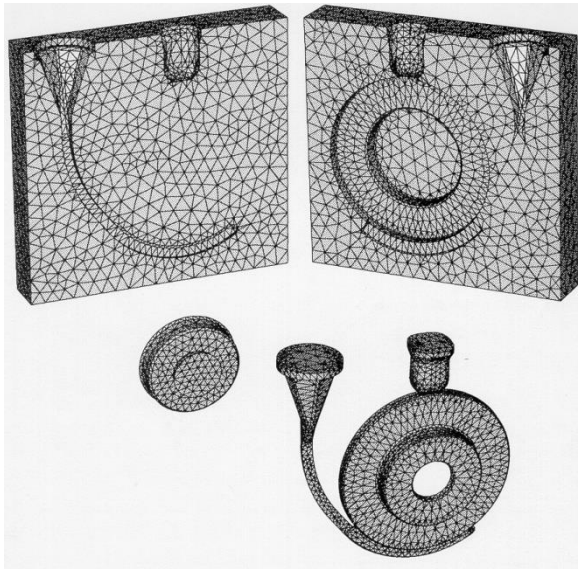


Figure 7 : Maillages éléments finis tridimensionnels pour l'analyse du refroidissement d'un disque de frein en acier coulé en sable (éléments tétraèdres linéaires).

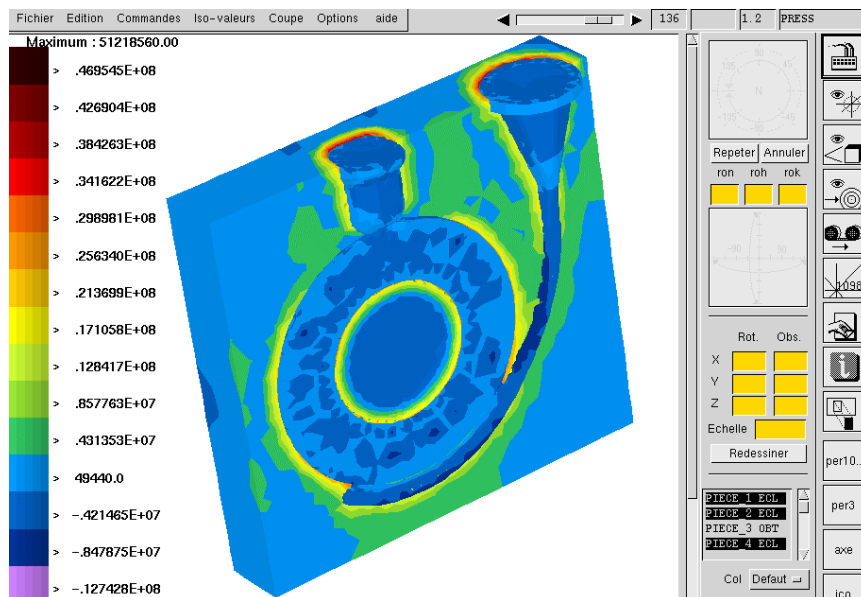


Figure 8 : Carte de pression hydrostatique dans la pièce, une des deux moitié de moule et le noyau. On relève des valeurs élevées de pression dans le sable au voisinage des interfaces moule-pièce.

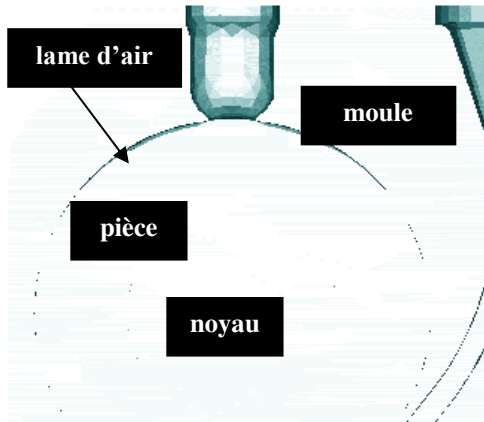


Figure 9 : Illustration de la modélisation du phénomène de lame d'air à l'interface pièce-moule.

IDENTIFICATION DES PARAMETRES DES LOIS DE FROTTEMENT PAR METHODE INVERSE

Le choix d'un bon test d'identification dépend de la sensibilité des observables (force, géométrie) au frottement sous les conditions opératoires requises. Tan et al. [27] ont ainsi proposé un test de l'anneau avec trois géométries différentes : une concave, une normale et une convexe (figure 10) afin d'obtenir trois niveaux de pressions normales. Pour un alliage d'aluminium écroui ou recuit, ils ont noté que l'estimation du coefficient de frottement dépendait fortement de la géométrie de l'anneau pour chacun des deux lubrifiants utilisés. La figure 11 montre un exemple de simulation numérique à l'aide du logiciel FORGE2[®] de ces trois essais, pour un matériau recuit et deux types de frottement extrêmes.

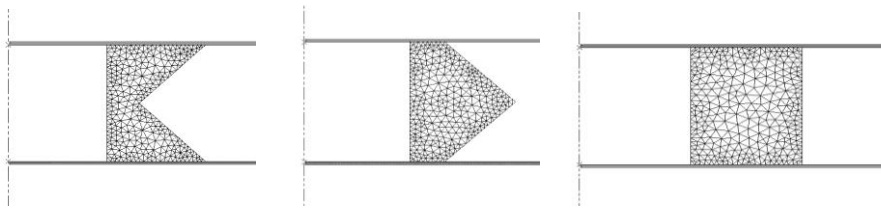


Figure 10 : Géométries initiales des anneaux concave / convexe / normal. Rayon intérieur : 7 mm, rayon extérieur : 14 mm, hauteur : 9.3 mm, rayon intermédiaire : 9.3 mm, hauteur intermédiaire : 4.65 mm.

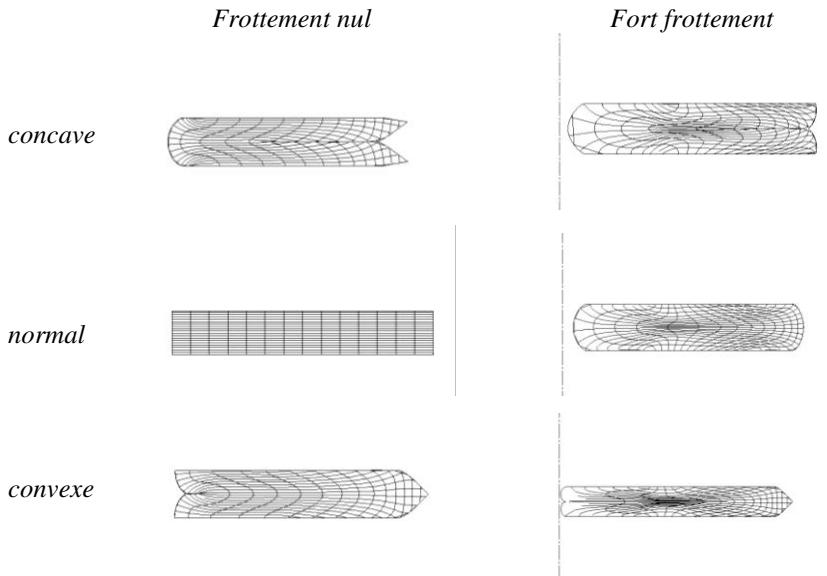


Figure 11 : Marquages pour les trois anneaux et des compressions allant jusqu'à 75 % (alliage d'aluminium recuit).

Les résultats présentés par la suite sont issus d'une identification *numérique*, pour laquelle la base expérimentale a été créée artificiellement à partir de simulations avec FORGE2[®]. L'objectif est donc de retrouver la valeur initialement entrée lors de la simulation ; une telle valeur est dite *nominale*. L'intérêt est de montrer la fiabilité du logiciel et de démontrer l'aide efficace à l'identification apportée par l'ajout d'une observable géométrique en plus de l'observable force d'écrasement. Pour chaque type de test, des observables géométriques appropriées ont été choisies : le bombé du cylindre est utilisé quel que soit le frottement appliqué ; le bombé intérieur et le rayon intérieur de l'anneau dans le cas d'un frottement fort et faible respectivement. Nous verrons d'autre part qu'une identification numérique simultanée des paramètres rhéologiques et tribologiques a permis de prouver l'efficacité du logiciel dans un cadre plus complexe.

Le choix s'est porté sur deux comportements, viscoplastique de Norton-Hoff ou élasto-viscoplastique, la contrainte équivalente au sens de von Mises étant donnée dans les deux cas par l'expression :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3}K_0(\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_0)^n (\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}})^m \quad (61)$$

avec $K_0 = 50,2 \text{ MPa.s}^m$, $m = 0,14$, $n = 0,07$. Les coefficients d'élasticité sont $E = 200000 \text{ MPa}$ et $\nu = 0,34$. La loi de frottement est celle de Norton, donnée par (10), le coefficient q étant pris égal à m , ou celle de Tresca :

$$\mathbf{T}_t = -\bar{m} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}} |\mathbf{v}_s|^{-1} \mathbf{v}_s \quad (62)$$

Une observable géométrique choisie au préalable a permis d'apporter une précision supplémentaire à celle procurée par la force seule. Ainsi, le tableau 1 montre l'apport non négligeable de la géométrie pour identifier le coefficient de frottement avec plus de précision dans deux cas distincts : le test de l'anneau à géométrie normale de type 6:3:2 (rayon extérieur 30 mm, intérieur 15 mm, hauteur 10 mm) et la compression d'un cylindre de facteur de forme hauteur/diamètre = 0,75. Si pour un frottement fort, cet apport est peu significatif (tableau 1), en revanche pour un frottement faible, il s'avère indispensable, l'identification sur la seule observable force étant mise en échec (tableau 2).

Par ailleurs, une identification simultanée des paramètres de comportement et de frottement a été effectuée dans le cas de la compression d'un cylindre élasto-viscoplastique (tableau 3). On remarque là encore que l'identification est plus efficace à l'aide d'une observable géométrique supplémentaire, en l'occurrence l'évolution du rayon à mi-hauteur de l'éprouvette, le nombre d'itérations étant divisé par deux.

FROTTEMENT FORT		TEST DE COMPRESSION DE CYLINDRE	
Observable(s)	Itérations	Paramètre α_f	Ecart quadratique Q
F	3	0,800818	$4,47 \cdot 10^{-5}$
F et ΔR_{mh}	4	0,800012	$6,57 \cdot 10^{-7}$

TEST DE L'ANNEAU			
Observable(s)	Itérations	Paramètre α_f	Ecart quadratique Q
F	2	0,784866	$5,68 \cdot 10^{-3}$
F et ΔR_{int}	5	0,799986	$2,30 \cdot 10^{-5}$

Tableau 1 : Identification du coefficient de frottement de valeur nominale $\alpha_f^{nom} = 0,8$ pour deux tests différents, avec ou sans observable géométrique. F désigne la force d'écrasement, ΔR_{mh} la variation du rayon du cylindre à mi-hauteur, ΔR_{int} la variation du rayon intérieur de l'anneau à mi-hauteur. Comportement viscoplastique. L'identification est opérée sur trois essais. La valeur de départ pour α_f est 0,3.

FROTTEMENT FAIBLE		TEST DE COMPRESSION DE CYLINDRE	
Observable(s)	Itérations	Paramètre α_f	Ecart quadratique Q
F	non-convergence	-	-
F et ΔR_{mh}	3	0,100001	$2,66 \cdot 10^{-7}$

TEST DE L'ANNEAU			
Observable(s)	Itérations	Paramètre α_f	Ecart quadratique Q
F	non-convergence	-	-
F et R_{int}	4	0,100080	$8,11 \cdot 10^{-5}$

Tableau 2 : Identification du coefficient de frottement de valeur nominale $\alpha_f^{nom} = 0,1$ pour deux tests différents, avec ou sans observable géométrique. R_{int} désigne le rayon intérieur de l'anneau à mi-hauteur. Comportement viscoplastique. Identification opérée sur trois essais avec une valeur initiale $\alpha_f = 0,6$.

TEST DE COMPRESSION DE CYLINDRE

Observable(s)	Itération	K_0	m	n	\bar{m}	Ecart Q
F	10	50,2067	0,139999	0,0700129	0,798727	$4,35 \cdot 10^{-5}$
F et ΔR_{mh}	5	50,2013	0,140005	0,0700190	0,800073	$3,20 \cdot 10^{-5}$

Tableau 3 : Identification simultanée des paramètres rhéologiques et tribologiques avec ou sans observable géométrique. Valeurs nominales des paramètres rhéologiques données dans le texte, $\bar{m}^{nom} = 0,80$. Comportement élasto-viscoplastique. L'identification est opérée sur trois essais. Les valeurs de départ pour K_0 , m , n , \bar{m} sont respectivement : 10, 0,6, 1 et 0,2.

La figure 12 montre l'évolution de la convergence dans le cas d'une identification des seuls paramètres de frottement sur des essais de compression de cylindre pour un matériau élasto-viscoplastique. L'identification porte sur trois essais à différentes vitesses d'écrasement : 3,75, 7,5 et 15 mm.s⁻¹.

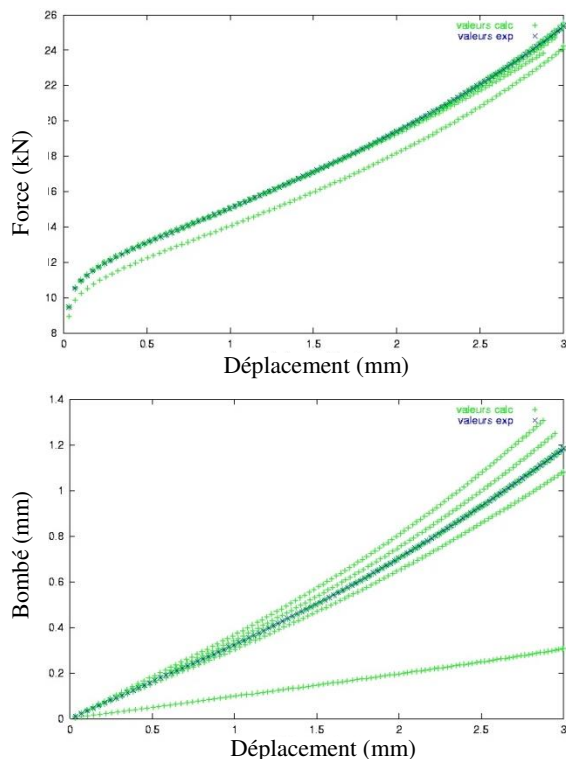


Figure 12 : Evolution de la convergence de la force et du bombé au cours de l'identification. Les évolutions de la force et du bombé d'un seul essai sont ici représentées, l'identification ayant été réalisée sur trois essais. On a tracé le faisceau des courbes calculées correspondant aux différentes itérations de l'identification.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient vivement Béatrice Boyer, Olivier Jaouen et Mike van Iseghem pour la fourniture des exemples d'application, extraits de leurs travaux de thèse.

REFERENCES

- [1] J.- L. Chenot, Three dimensional finite element modelling of the forging process, *Computational Plasticity. Models, Software and Applications*, ed. by D. R. J. Owen et al., Pineridge Press, Swansea, 793-816 (1989).
- [2] P. R. Dawson, D. E. Boyce, G. M. Eggert, A. J. Beaudoin, A consistent penalty method for contact between a deforming viscoplastic workpiece and a rigid tool, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, 23, 2369-87 (1995).
- [3] L. Cangemi, M. Cocu, M. Raous, Adhesion and friction model for the fiber/matrix interface of a composite, PD-Vol. 76, Engineering systems Design and Analysis, **4**, 157-163 (1996).
- [4] G. Zavarise, P. Wriggers, B. A. Schrefler, On augmented lagrangian algorithms for thermomechanical contact problems with friction, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, 17, 2929-49 (1995).
- [5] J.- L. Chenot, A velocity approach to finite element calculation of elasto-plastic and visco-plastic deformation processes, *Eng. Comput.*, 5, 2, (1988).
- [6] A. Heege, P. Alart, A frictional contact element for strongly curved contact problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **39**, 165-184 (1996).
- [7] J.-L. Chenot, Finite element calculation of unilateral contact with friction in non steady-state processes, *Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design*, ed. by G. N. Pande and J. Middleton, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, T1, 1-10 (1987).
- [8] L. Fourment, K. Mocellin, J.-L. Chenot, An implicit contact algorithm for the 3D simulation of the forging process, *Computational Plasticity -Fundamental and Applications, Proceedings of the Fifth International Conference*, ed. by Owen D.R.J. et al, Pineridge Press, Swansea, 873-877 (1997).
- [9] P. Papadopoulos, R. E. Jones, J. M. Solberg, A novel F. E. formulation for frictionless contact problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **38**, 2603-17 (1995).
- [10] G. Zavarise, R. L. Taylor, A force method for contact problems with large penetration, *Computational Plasticity -Fundamental and Applications, Proceedings of the Fifth International Conference*, ed. by Owen D.R.J. et al, Pineridge Press, Swansea, 280-5 (1997).
- [11] P. Wriggers, Finite Element Algorithms for Contact Problems, *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 2, 4, 1-49 (1995)

- [12] D. Pantuso, K. J. Bathe, Finite element analysis of thermo-elastoplastic solids in contact, *Computational Plasticity -Fundamental and Applications*, Proceedings of the Fifth International Conference, ed. by Owen D.R.J. et al, Pineridge Press, Swansea, 72-87 (1997).
- [13] P. Chabrand, F. Dubois, M. Raous, Mathematical programming for contact with friction and comparison with other methods, *2nd national colloquium in structural mechanics*, ed. by F. Léné et al., Hermès, Paris, 429-34 (1995) (in french).
- [14] J.- L. Chenot, M. Bellet, The viscoplastic approach for the finite element modelling of metal forming processes, in *Numerical Modelling of Material Deformation processes. Research, Developments and Applications*, ed. by P. Hartley, I. Pillinger and C. Sturges, Springer Verlag, London, 179-224 (1992).
- [15] L. Fourment, J.L. Chenot, K. Mocellin, Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation, à paraître dans *Int. J. for Numr. Meth. in Eng.*
- [16] C. Bohatier, J.-L. Chenot, Finite element formulation for non-steady state large viscoplastic deformation. *Int. J. Numer. Method. Eng.*, **21**, 1697 (1985).
- [17] G. Surdon, J.-L. Chenot, Finite element calculations of three-dimensional hot forging, *International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes NUMIFORM'86*, ed. by K. Mattiasson et al., A. A. Balkema, Rotterman, 287-292 (1986).
- [18] C. Bohatier, J.-L. Chenot, Finite element formulation for non-steady-state large deformations with sliding or evolving contact boundary conditions, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **28**, 753-68 (1989).
- [19] G. Surdon, J.-L. Chenot, Finite element calculation of three-dimensional hot forging, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 1987, pp. 2107-2117.
- [20] A.-M. Habraken, S. Cescotto, Contact between deformable solids. The fully coupled approach. *Mathematical and Computer Modelling*, **28**, 153-169, 1998.
- [21] J.-L. Chenot, E. Massoni, L. Fourment, Inverse Problems in Finite Element Simulation of Metal Forming Processes, *Eng. Comput.*, **13**, 24, 190-225 (1996).
- [22] B. Boyer, E. Massoni, Identification des paramètres tribologiques au cours des essais de compression, rapport interne, Sept 1998.
- [23] M. Bellet, M. Ménaï, F. Bay, P. Schmidt, I.L. Svensson, Finite element modelling of the cooling phase in casting processes, Proc. 6th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, T.S.Piwonka, V.Voller & L.Katgerman (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp.561-568 (1993)
- [24] M. Bellet, F. Decultieux, M. Ménaï, F. Bay, C. Levaillant, J.L. Chenot, P. Schmidt, I.L. Svensson, Thermomechanics of the cooling stage in casting processes : 3D finite element analysis and experimental validation, *Met. Trans.*, **27B**, pp. 81 - 100 (1996)

- [25] O. Jaouen, M. Bellet, A numerical mechanical coupling algorithm for deformable bodies: application to part/mold interaction in casting process, Proc. 8th Int. Conf. on Modelling of Casting, Welding and Advanced Solidification Processes, B.G. Thomas and C. Beckermann. (eds.), The Minerals Metals and Materials Society, pp. 739-746, 1998.
- [26] O. Jaouen, Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l'analyse thermomécanique du refroidissement des pièces coulées Thèse de Doctorat en Sciences et Génie des Matériaux, Ecole des Mines de Paris, 1998.
- [27] X. Tan, P.A.F. Martins, N. Bay, W. Zhang, Friction studies at different normal pressures with alternative ring compression tests, 7th Int. Conf. Metal Forming'98, Birmingham, 1-3 Sept. 1998.