



**HAL**  
open science

# Application de l'élastoplasticité au calcul des enceintes à pression

Jean-Louis Masson

► **To cite this version:**

Jean-Louis Masson. Application de l'élastoplasticité au calcul des enceintes à pression. Sciences de l'ingénieur [physics]. 1972. hal-01910001

**HAL Id: hal-01910001**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-01910001>**

Submitted on 31 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Consultation  
sur place.

Dossier long  
de  
Monsieur Jean-Louis MASSON

Application de l'élastoplasticité au Calcul des  
Enceintes à pression

[31]



Dossier long Ing. élève 3<sup>e</sup> Année Promo X 1966

Directeur de dossier: M. de TORQUAT

M. ROCHE

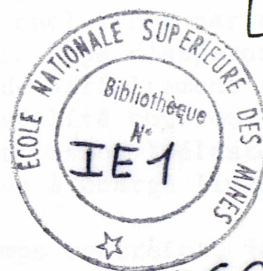
DOSSIER LONG

de

Monsieur Jean-Louis MASSON

APPLICATION DE L'ELASTOPLASTICITE AU CALCUL DES ENCEINTES A PRESSION

-----



Dossier long Ing<sup>°</sup> El. 3<sup>e</sup> année Promo X 1966

Directeur de dossier : M. de TORQUAT

M. ROCHE

Le choix des dimensions des structures résistantes et en particulier celui des enceintes sous pression consiste à calculer les contraintes en supposant que le matériau est parfaitement élastique puis à comparer les valeurs obtenues à la limite d'élasticité et à la résistance à la rupture du matériau. Cette comparaison présentant d'importantes difficultés de principe, on cherche à étudier directement les défaillances de la structure lorsqu'elle est soumise à des chargements égaux ou supérieurs au chargement normal. Parmi les défaillances prises en considération et désignées communément "mode de ruine", il est indispensable d'apprécier le chargement à partir duquel la structure présente de fortes déformations plastiques, ce chargement est appelé "chargement limite" car lorsqu'on le dépasse l'appareil devient en général inutilisable.

La détermination du chargement limite se fait en admettant que le matériau est parfaitement plastique. Cette détermination est donc basée sur la théorie de la plasticité parfaite et elle utilise des théorèmes généraux sur lesquels s'appuient les méthodes d'étude aux limites (limite inférieure pour un écoulement plastique en état d'équilibre statique, limite supérieure pour un écoulement cinématiquement compatible).

Au cours de cette étude, je vais m'intéresser principalement aux enceintes sous pression (réacteurs nucléaires par exemple). Les normes actuelles de sécurité pour ce type d'appareils ont été conçues à partir de la théorie du solide parfaitement élastique, cette théorie est fort éloignée de la réalité physique. On doit donc pouvoir améliorer les normes en utilisant l'élastoplasticité ou la théorie du solide rigide plastique à charge limite.

Etant seul et disposant d'un temps restreint, je ne puis présenter le problème des enceintes sous pression d'une façon exhaustive. Je me contenterai donc d'insister sur les points les plus intéressants (solide rigide plastique et écrouissage isotope); les conséquences économiques d'une modification de la réglementation ne seront pas évoquées, elles pourraient à elles seules faire l'objet d'un dossier long pour deux ingénieurs.

.../...

Table des Matières

Chapitre I	Les risques de rupture, les normes de sécurité, généralités sur les enceintes sous pression.
Chapitre II	Présentation de l'élastoplasticité.
Chapitre III	L'écroutissement isotrope, ses conséquences.
Chapitre IV	Les charges limites, cas du solide rigide plastique.
Chapitre V	Exemples de solutions analytiques.
Chapitre VI	Possibilités de réglementation nouvelle et conclusion.

I - RISQUES DE RUPTURE, NORMES DE SECURITE, GENERALITES

A/ Les causes de rupture

Une enceinte sous pression (plus généralement une construction métallique) peut se rompre pour différentes raisons. On distingue cinq causes principales :

- le fluage
- l'instabilité
- la rupture fragile
- la corrosion, la fatigue, la déformation cumulative
- la destruction résultant d'une surcharge ou d'un choc, cette destruction est elle-même précédée d'une déformation plastique.

.../...

### 1/ Le fluage

Ce risque est traité de façon classique et empirique. Les contraintes prévues sont comparées à la résistance au fluage obtenue ou extrapolée à partir d'essais.

On utilise de plus des coefficients de sécurité permettant de tenir compte de l'imperfection et de l'incertitude des méthodes de calcul du fluage.

### 2/ Les instabilités

Elles sont de deux sortes :

- les instabilités statiques : le meilleur exemple en est le flambage d'une poutre. Le phénomène est complexe car de nombreux facteurs interviennent (dans le cas de la poutre, on peut avoir des formes harmoniques du flambage pour lesquelles le rapport longueur sur diamètre joue un rôle fondamental),
- les instabilités dynamiques : par interférence et résonance les ébranlements dynamiques peuvent entraîner la ruine de certaines structures. Les ondes de surface (Love et Rayleigh) ont un rôle particulièrement en ce qui concerne les enceintes à pression, elles seront donc étudiées dans un paragraphe spécial.

### 3/ Les ruptures fragiles

Elles se produisent alors que la contrainte moyenne est très inférieure à la limite élastique. L'accroissement des épaisseurs des enceintes et les contraintes élevées favorisent ce type de rupture. Cette rupture se fait par décohé- sion des plans cristallographiques. Une rupture fragile nécessite deux conditions :

- un amorçage : il se fait sur un défaut, une entaille ou un point de concentration des contraintes
- une propagation : la fissuration libère l'énergie potentielle élastique qui permet à la rupture de se propager (la vitesse est voisine de celle du son).

.../...

#### 4/ La corrosion, la fatigue, la déformation cumulative

Pour éviter la corrosion, il suffit de choisir les revêtements et les matériaux en fonction des corps que l'enceinte doit contenir.

La rupture par fatigue peut provenir lorsque les structures ne sont pas soumises à des chargements statiques. La fatigue provoque des fissurations qui ont pour conséquences des concentrations de contraintes. Certaines réglementations tiennent compte des risques de fatigue. La rupture par déformation cumulative est analogue à la rupture par fatigue, elle correspond à l'addition de déformations rémanentes.

#### 5/ Ruptures par déformations plastiques

Avant de réaliser un projet, on procède généralement de la façon suivante :

- On estime le chargement maximal. Pour un appareil à pression, ce chargement est représenté par la pression.
- On analyse les contraintes pour déterminer la valeur du taux de travail correspondant au chargement maximal. Cette analyse est réalisée de trois façons :
  - . méthode analytique : on résout de façon analytique le problème physique posé ;
  - . méthode empirique : on utilise des maquettes ;
  - . méthode numérique : on résout numériquement les problèmes posés en utilisant un ordinateur. Si par exemple on désire tenir compte de l'érouissage pour le calcul des contraintes, il sera quasiment nécessaire d'utiliser cette méthode.
- On dimensionne les appareils en tenant compte des règles en vigueur. Celles-ci sont suffisamment sévères pour que la ductilité du métal permette de ne pas tenir compte des concentrations de contraintes.

.../...

B/ Règles de sécurité en France et à l'étranger

Chaque pays possède ses règlements de sécurité auxquels sont associés des normes de construction émanant des constructeurs. Un appareil construit en France ne sera donc pas agréé automatiquement dans un autre pays. Le Marché Commun fait actuellement de gros efforts pour obtenir une uniformisation des règlements.

1. Le règlement français

En ce qui concerne les appareils à vapeur, la réglementation française n'impose aucun coefficient de sécurité, ce dernier étant laissé sous la responsabilité du constructeur.

Pour les autres appareils à pression, la réglementation est simple :

Le taux de travail du métal dans la paroi soumise à une pression égale à la pression de calcul doit être inférieur à chacune des deux valeurs suivantes :

- un tiers de la résistance de rupture du métal à la température ordinaire,
- cinq huitièmes de la limite élastique à 0,2 % du métal à la température maximale en service.

Le règlement ne précise pas la notion de taux de travail; il est donc assez libéral car il accorde une certaine autonomie au constructeur. En contrepartie, la réglementation souligne la responsabilité du constructeur et impose des prescriptions relatives au contrôle et à l'exécution des appareils (en particulier pour les soudures).

Les deux normes de sécurité citées ci-dessus ne se réfèrent qu'à l'essai de traction, les coefficients de sécurité couvrent l'incertitude qui règne sur la triaxialité réelle des contraintes.

Aux températures usuelles, le premier critère est le plus sévère. Le règlement français s'applique uniformément aux récipients qui satisfont les critères suivants:

- la pression doit être supérieure à 4 bars
- le produit de la pression en bars par le volume en litres doit être supérieur à 80.

.../...



Les autres types de récipients doivent être soumis à agrément par le Service des Mines.

En particulier, il n'y a pas à l'heure actuelle de norme concernant les réacteurs nucléaires; on doit donc se référer au paragraphe III du code américain (ASME III).

## 2. Les normes allemandes

Cette réglementation est apparemment sévère ; elle est heureusement tempérée par de nombreuses dérogations.

Le taux de travail est rapporté à la plus petite des deux caractéristiques suivantes avec un coefficient de sécurité de 1,5 à 1,8 suivant la nature du métal utilisé :

- limite élastique à la température de calcul
- résistance aux 100 000 heures à la température de calcul (pour tenir compte du fluage).

## 3. Les normes américaines

Ces normes sont regroupées dans le code ASME. Ce code est en perpétuelle évolution ; il a eu pour base la théorie de l'élasticité linéaire ; depuis peu, l'administration américaine tente d'y introduire des notions de charge limite et d'élastoplasticité. Cette évolution est implicite et très lente car les personnes ayant à se servir du code ne sont pas familiarisées avec ces notions nouvelles.

La section VIII du code ASME concerne les appareils d'usage courant.

Le constructeur, en accord avec le client, se réfère à l'une des deux normes ci-dessous :

- le premier critère est voisin des normes françaises; il retient un coefficient de sécurité égal à 4 pour la résistance à la rupture et un coefficient de 1,6 pour la limite d'élasticité ;
- le second critère est nouveau. Il oblige le client à bien définir ce qu'il veut. Il ressemble au paragraphe III du code ASME en n'imposant toutefois pas de critère de ductilité.

.../...

La section III du code ASME concerne les réacteurs nucléaires. Cette section est très importante car de nombreux pays (dont la France) la reprennent pour leur compte. Cette section sera examinée plus en détail dans un paragraphe spécial. Elle comprend trois critères :

- critère par rapport à la limite d'élasticité (coefficient de sécurité 1,5)
- critère par rapport à la résistance à la rupture (coefficient de sécurité 3)
- critère de ductilité.

#### 4. Les normes anglaises

La réglementation anglaise est assez touffue. En effet, le contrôle des appareils à pression dépend en partie du Ministère du Travail (appareils fixes) et en partie du Ministère de l'Intérieur (appareils mobiles).

Pour sa part, le Ministère du Travail laisse la construction des appareils à pression sous l'entière responsabilité des constructeurs. Ceux-ci sont donc contrôlés uniquement par leurs assurances. Il n'y a donc pas de normes précises.

#### 5. Comparaison des différentes normes

Les différents règlements de chaque pays imposent des épaisseurs de sécurité différentes.

On peut par exemple comparer l'incidence des règlements sur l'épaisseur d'une virole d'un appareil à pression soumis à une pression uniforme.

- Pression intérieure 530 bars
- Résistance à la traction 54 hbars à 220°C
- Limite élastique 44 hbars à 220°C
- Température de service 220°C
- Diamètre du tube 1,830 mètres

On trouve les épaisseurs suivantes en mètres :

<u>Pays</u>	<u>Epaisseur</u>
France .....	0,269
ASME III .....	0,264
ASME VIII .....	0,470
Gde-Bretagne..	0,201
Allemagne .....	0,182
Italie .....	0,204

.../...

6) Le code ASME III

a) Introduction des critères de limite d'élasticité

La section III retient le critère de Tresca pour délimiter le domaine élastique :

Si  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont les contraintes principales et si  $\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1$  on introduit la limite d'élasticité par  $\sigma_3 - \sigma_1 \leq \sigma_E$ ,  $\sigma_E$  dépend de la nature du métal. Dans l'espace des contraintes principales, le domaine d'élasticité est donc un cylindre d'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  et de section hexagonale régulière.

Le critère de Von Misès est beaucoup plus satisfaisant pour l'esprit car il n'introduit pas les discontinuités de dérivées que l'on rencontre aux angles de l'hexagone. Mais en fait ce critère est moins pratique pour les calculs numériques car contrairement au critère de Tresca il n'introduit pas de fonction linéaire par morceaux.

b) Classification des contraintes

La section III distingue trois familles de contraintes :

- Les contraintes primaires P.

La contrainte primaire est engendrée par la charge imposée. Elle satisfait aux lois d'équilibre du toiseur des forces externes et internes.

On suppose que lorsqu'une contrainte primaire dépasse la limite d'élasticité il y a rupture de l'enceinte ou écrouissage du métal. Les contraintes primaires se divisent en trois sous familles :

la contrainte de membrane  $P_m$  moyenne.

C'est la contrainte moyenne à travers une section de l'enceinte, elle ne tient pas compte des discontinuités et des concentrations de contrainte.

la contrainte de membrane  $P_l$  locale.

Cette contrainte s'adapte plastiquement lorsque la limite d'élasticité est atteinte en effet d'autres parties de la structure prennent le relai afin de résister aux pressions externes. Cette contrainte est de type secondaire mais les déformations plastiques engendrées peuvent être inadmissibles c'est pourquoi on lui impose des limites du type de celles des contraintes primaires.

/....

la contrainte de flexion  $P_b$

Cette composante est proportionnelle à la distance du centre de gravité de la section au support de la charge.

- Les contraintes secondaires  $Q$

Le calcul des contraintes secondaires se fait par différence entre la contrainte réelle (celle-ci tient compte de la forme de l'enceinte) et la contrainte primaire.

On exclut les contraintes de pointe.

Les contraintes secondaires s'adaptent plastiquement.

- Les contraintes de pointe  $F$

Elles sont dues aux discontinuités locales qui introduisent des concentrations de contraintes (entaille par exemple).

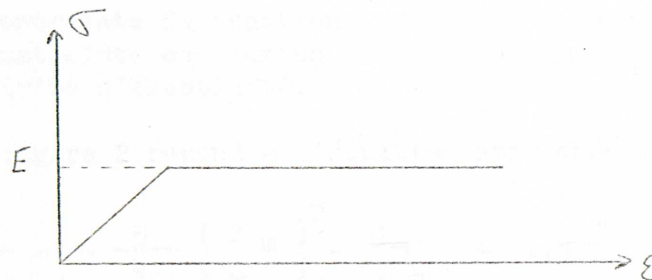
Les contraintes de pointe s'adaptent plastiquement tout comme les contraintes secondaires, on peut donc les négliger si l'appareil est construit avec un matériau suffisamment ductile et s'il ne travaille pas cycliquement.

Si on ajoute les trois types de contraintes on obtient le niveau réel des contraintes.

c) limitation des contraintes

La section III suppose le métal parfaitement plastique.

La courbe contrainte déformation a donc l'allure suivante :  
fig. 1



Dans la mesure où le matériau est suffisamment ductile, les contraintes limites dégagées de la théorie de la plasticité parfaite seront un maximum au dessous duquel une enceinte résistera à la rupture. Les métaux sont de plus écrouissables, cet écrouissage fournit donc une marge de sécurité supplémentaire face aux risques de rupture.

Cas des contraintes primaires

Pour simplifier je considère une barre rectiligne dont la limite élastique à la traction est  $\sigma_E$

Si on fléchit la barre elle s'effondre pour une charge égale à  $k \sigma_E$ ,  $k$  est un coefficient qui dépend de la forme de la section de la barre. Si la barre a une section carrée on a  $k = 1,5$ . Dans la barre la contrainte primaire est une combinaison de la contrainte de traction et de la contrainte de flexion. La valeur de la charge limite dépend du rapport de ces deux contraintes. Sur la figure 2 on représente la contrainte maximale de flexion sur une fibre extérieure en fonction de la contrainte moyenne de traction pour une barre de section carrée.

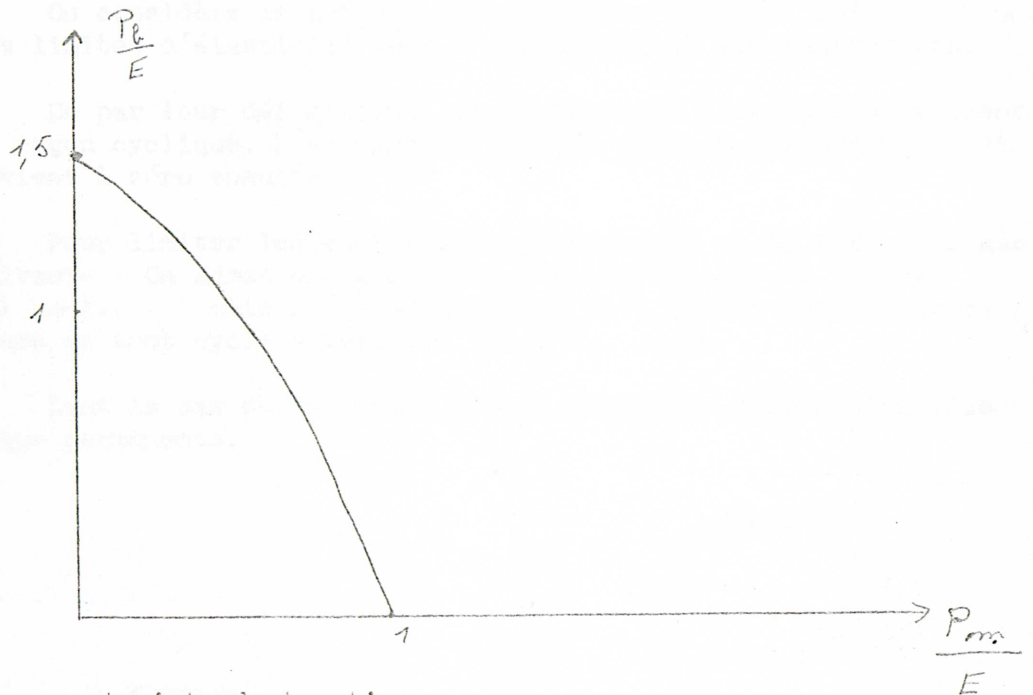


figure 2

- $P_m$  = contrainte de traction
- $P_b$  = contrainte de flexion
- $E$  = limite d'élasticité.

La figure 2 répond à l'équation approchée :

$$\frac{P_b}{E} = - \frac{5}{4} \left( \frac{P_m}{E} \right)^2 - \frac{P_m}{4E} + 1,5$$

Lorsque  $P_m = 0$  on a  $P_b = 1,5 E$  mais lorsque  $P_m = E$  on ne peut tolérer de flexion. La section III a utilisé des diagrammes du type de la figure 2 pour déterminer les limites de :

- la contrainte primaire de membrane générale  $P_m$
- la contrainte de flexion  $P_b$ .

Les critères ont de plus ajouté des coefficients de sécurité, ils limitent :

- P m à  $\frac{2}{3} E$
- P b à E - P m

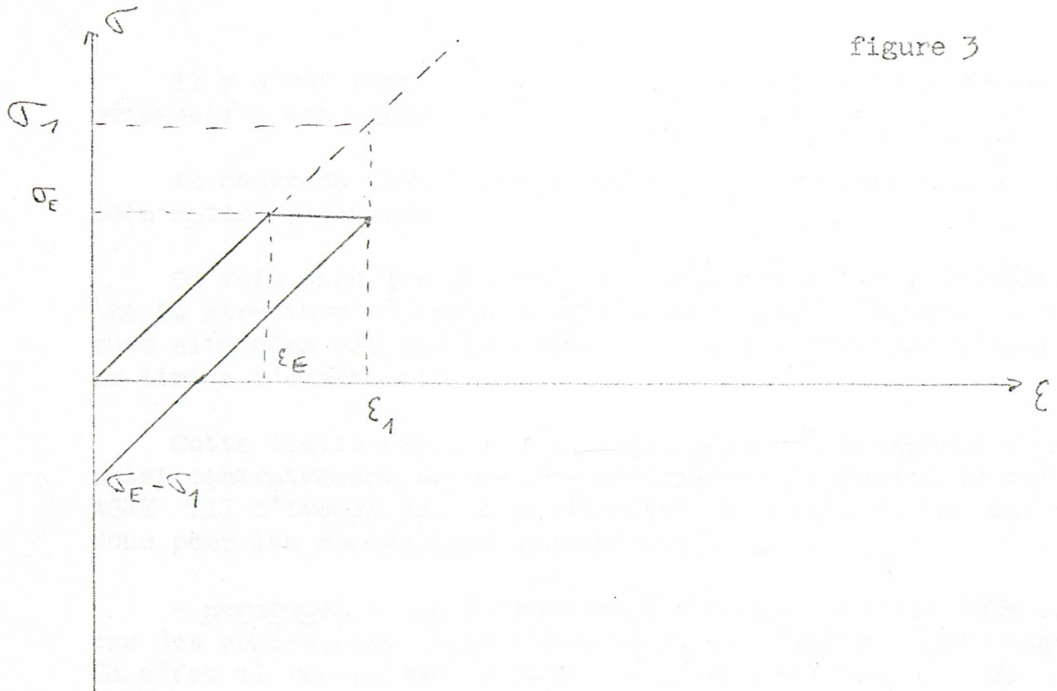
- Cas des contraintes secondaires : Supposons pour simplifier l'exposé  $P m = 0$  dans ce paragraphe, sinon il conviendra de remplacer  $Q$  par  $Q + P m$ .

On considère le métal comme plastique parfait. Soit  $\epsilon_E$  et  $\sigma_E$  les limites d'élasticité pour l'élongation et les contraintes.

De par leur définition, les contraintes secondaires évoluent de façon cyclique. L'élongation atteint donc un maximum  $\epsilon_m$  et revient à zéro ensuite.

Pour limiter les contraintes secondaires on se fixe la règle suivante : On admet une déformation plastique sur le trajet  $0 \rightarrow \epsilon_m$  mais cette déformation doit rester permanente au cours de tout cycle ultérieur  $0 \rightarrow \epsilon_m \rightarrow 0$

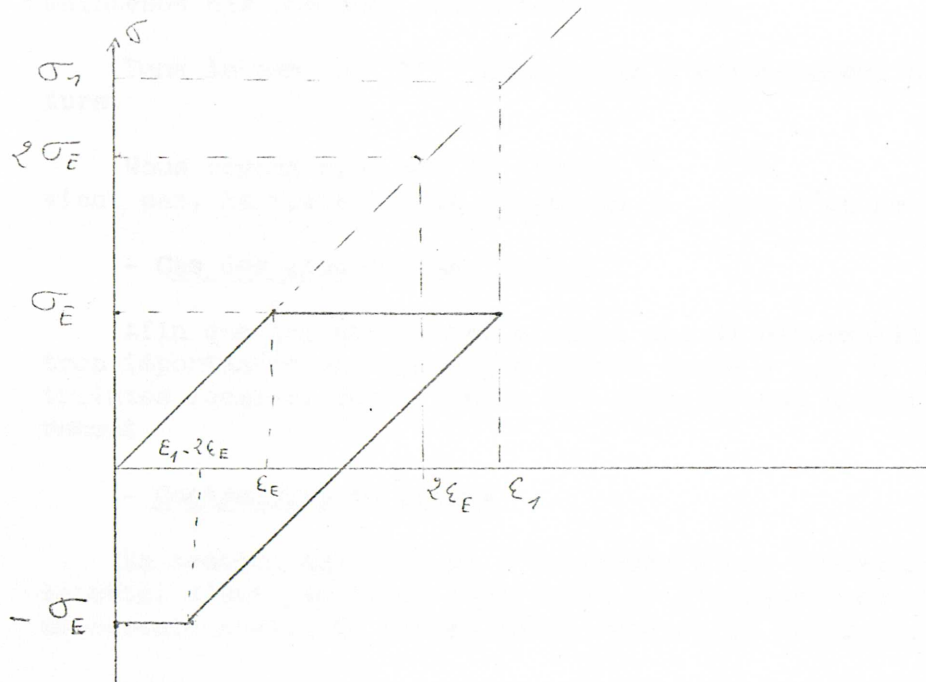
Dans le cas de la figure 3 nous avons une déformation plastique permanente.



Au cours du circuit de la figure 3 le métal s'allonge élastiquement jusqu'à  $(\sigma_E, \epsilon_E)$  puis il s'allonge plastiquement sans augmentation de la contrainte jusqu'à  $(\sigma_1, \epsilon_1)$  avec  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_E}{\sigma_E} \sigma_1$

Si on fait redescendre jusqu'à zéro il y a une contrainte résiduelle égale à  $\sigma_E - \sigma_1$  mais cette contrainte étant inférieure à  $\sigma_E$  en valeur absolue il n'y a pas de déformation plastique au cours de ce retour au zéro.

Dans le cas de la figure 4 il y a par contre une déformation plastique alternée.



Il y a déformation plastique au cours du retour au zéro cette déformation est égale à  $\epsilon_1 - 2\epsilon_E$  soit  $(\sigma_1 - 2\sigma_E) \frac{\epsilon_E}{\sigma_E}$

Au cours de tout nouveau cycle il y aura donc une nouvelle déformation plastique.

On voit donc que la condition nécessaire et suffisante pour que la structure s'adapte plastiquement sans déformations plastiques alternées est que la contrainte soit inférieure à deux fois la limite d'élasticité.

Cette limite résulte d'un raisonnement apparemment rigoureux aussi contrairement au cas des contraintes primaires le code ASME III n'impose pas de coefficient de sécurité. On retient donc pour les contraintes secondaires :  $\sigma \leq 2\sigma_E$

- Remarques : Le raisonnement fait par le code ASME dans le cas des contraintes secondaires me paraît faux et donc dangereux. En effet il repose sur le fait que l'on admet que  $\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_E} \epsilon_E$

/....

Or cette égalité n'a aucune raison d'être, elle ne se justifie par rien.

La vraie équation est :  $\varepsilon_1 = \lambda \frac{\sigma_1}{\sigma_E} \varepsilon_E$  avec  $\frac{\sigma_E}{\sigma_1} \leq \lambda \leq +\infty$

Dans le cas où  $\lambda = \frac{\sigma_E}{\sigma_1}$  nous avons  $\varepsilon_1 = \varepsilon_E$   
pour tout  $\sigma_1$  c'est-à-dire que la zone plastifiée est maintenue par une zone parfaitement rigide.

Dans le cas  $\lambda = \infty$  nous avons l'effondrement de la structure.

Nous voyons bien que la limite  $\sigma_1 = 2\sigma_E$  n'intervient pas, la vraie limite dépend de  $\lambda$  que l'on ne connaît pas.

- Cas des contraintes locales

Afin que les structures n'aient pas de déformations locales trop importantes on impose une limite égale à  $1,5 \sigma_E$  aux contraintes locales. Cette limite est définie tout à fait arbitrairement.

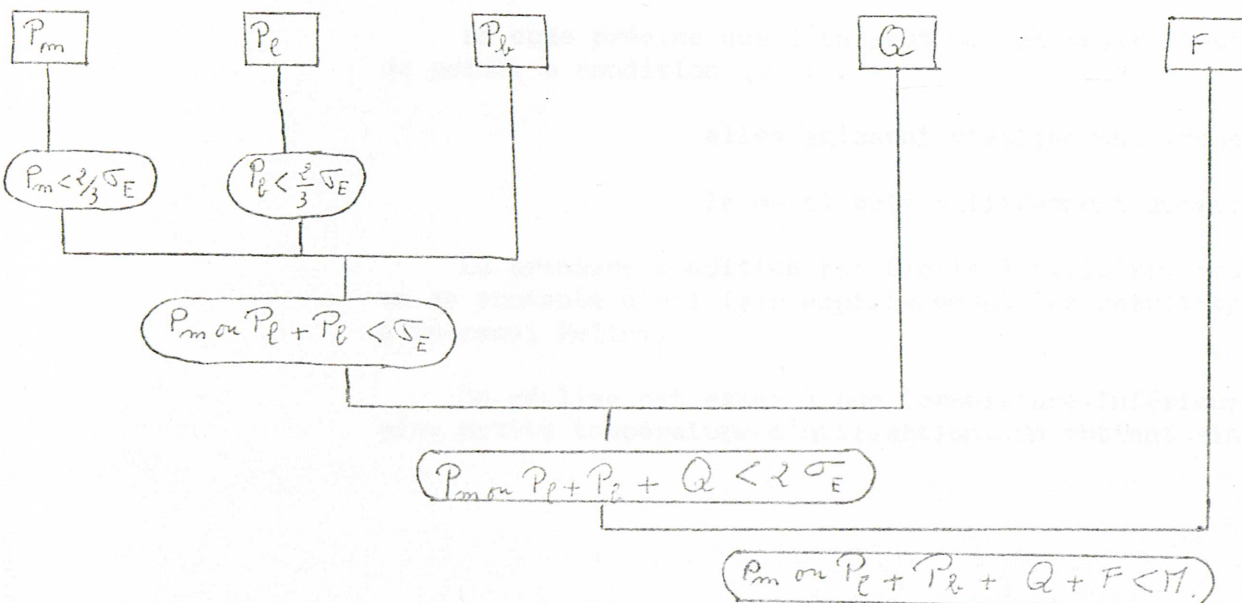
- Contraintes de pointe

La section ASME III ne s'intéresse à ces contraintes que si le métal n'est pas assez ductile ou si l'appareil est soumis à un certain nombre de cycles (d'où risques de fatigue).

Le code donne des courbes reliant le nombre de cycles d'utilisation à la limite supérieure M de la somme de toutes les contraintes.

- Schéma global de contrôle des contraintes

Contrairement au code français qui utilise la notion de taux de travail, le code ASME III donne une série de limitations pour les contraintes. On part des contraintes globales pour terminer par les contraintes localisées





d) Les autres critères du code ASME III

J'ai particulièrement insisté sur les critères du code ASME III, destinés à éviter la destruction des enceintes par déformation plastique. A titre indicatif seulement ( car ces critères n'ont pas de rapport avec cette étude) il convient de mentionner deux autres critères utilisés par le code ASME III.

- Charge de rupture

Pour éviter la destruction d'enceintes construites avec des matériaux dont le rapport entre limite élastique et charge de rupture est élevé le code tient compte de la charge de rupture R dans le calcul des contraintes admissibles.

Les limites des contraintes sont rassemblées ci-dessous :

contrainte	limite pour distruption par plasticité	limite pour rupture
$P_m$	$\frac{3}{2} \sigma_E$	$\frac{R}{3}$
$P_e$	$\sigma_E$	$\frac{R}{2}$
$P_m$ ou $P_e + P_b$	$\sigma_E$	$\frac{R}{2}$
$P_m$ ou $P_e + P_b + Q$	$2\sigma_E$	R.

- Condition de ductilité

Le code précise que l'on peut ne pas tenir compte des contraintes de pointe à condition que :

elles agissent statiquement (donc pas de fatigue)

le métal soit suffisamment ductile

La première condition est facile à vérifier, pour la seconde on se contente d'utiliser empiriquement les résultats obtenus lors d'un essai Pelini.

On réalise cet essai à une température inférieure de 30° à la plus petite température d'utilisation. On obtient ainsi un niveau de

résilience qui doit être supérieur à une valeur donnée par une table du code.

Ce dernier critère permet de limiter également les risques de rupture fragile.

Dans le cas des chaudières nucléaires, une règle encore plus arbitraire vient d'être proposée, elle limite simplement la résilience de la cuve à 5,2 Kgm/cm<sup>2</sup> à une température de - 12° C.

C - Contraintes dynamiques, résonnances, exemple des ondes de surface

1°) Les contraintes dynamiques

Une enceinte peut être soumise à des vibrations. Ces vibrations induisent donc des contraintes supplémentaires (contraintes dynamiques). Par interférence constructive les vibrations peuvent entrer en résonance ; les contraintes dynamiques prennent alors des valeurs importantes et peuvent entraîner la ruine de l'enceinte.

Un cas particulièrement intéressant d'instabilités dynamiques est celui des ondes de surface (Love et Rayleigh).

Ces ondes se propagent le long du dioptré formé par deux milieux différents. Elles jouent un rôle particulièrement important dans les tremblements de terre (ondes S et P).

2°) Présentation du problème

Pour simplifier j'étudierai les ondes de surface dans le cas simple suivant :

Soit une couche plane et infinie de métal (cas limite des parois d'une enceinte). On suppose que cette couche baigne de part et d'autre dans un deuxième milieu infini isotrope.

On note :

- $2h$  l'épaisseur du métal
- $\rho$  et  $\rho'$  les densités du métal et du milieu
- $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\lambda'$  et  $\mu'$  les coefficients de Lamé du métal et du milieu
- $\omega$  et  $\omega'$  la vitesse des ondes transversales dans le métal et dans le milieu
- $U$  et  $U'$  la vitesse des ondes longitudinales dans le métal et dans le milieu.

Par ailleurs le repère orthonormé choisi aura son axe Oz perpendiculaire à la couche et l'origine sera dans le plan médian de la couche.

La vibration  $\vec{\xi}$  aura pour composantes

$$\begin{cases} \xi & \text{sur Ox} \\ \eta & \text{sur Oy} \\ \zeta & \text{sur Oz} \end{cases}$$

On place Ox parallèlement à la direction de propagation des ondes. Les ondes sont supposées avoir une fréquence  $N = \frac{\omega}{2\pi}$  et une vitesse de phase V.

Pour se fixer les idées on choisit  $U' > U$ ,  $\omega' > \omega$ .

### 3°) Les ondes de Rayleigh

Leur structure est caractérisée par :

- une décroissance exponentielle des amplitudes dans le milieu
- la nullité de la composante  $\eta$  de  $\vec{\xi}$  sur Oy
- une condition d'existence :  $\omega' > u$
- une équation reliant la vitesse de phase V à la fréquence N. Il existe donc une vitesse Vg de groupe, vitesse de propagation de l'énergie donnée par  $Vg = \frac{V}{1 - \frac{\omega}{V} \frac{dV}{d\omega}}$
- l'existence de nombreux harmoniques.

Ces ondes sont régies par des équations complexes insolubles analytiquement aussi ai-je préféré m'attarder sur les ondes de Love qui sont plus simples.

### 4°) Les ondes de Love

- Caractères généraux :

- . L'amplitude de vibration dans le milieu est une fonction exponentielle décroissante de  $z$ .
- . L'amplitude de vibration est une fonction circulaire de  $z$  dans le métal.
- . L'amplitude de vibration dans le métal et dans le milieu est une fonction circulaire de  $x - vt$
- . Il existe deux types d'ondes :
  - + les ondes symétriques (la vibration est symétrique par rapport au plan  $z = 0$ )
  - + les ondes antisymétriques (la vibration est antisymétrique par rapport au plan  $z = 0$ ).

Chaque type d'ondes se divise lui-même en harmoniques,

- . Seule la composante  $\eta$  de  $\vec{\xi}$  est non nulle.
- . Pour chaque type d'onde et chaque harmonique il existe une relation entre la vitesse de phase V et  $\omega$ . Tout comme dans le cas des ondes de Rayleigh il existe donc une vitesse de l'énergie Vg ou vitesse de groupe.

- Equation de propagation :

Pour les deux types d'ondes, k est un paramètre de résolution, k est un entier positif ou nul.

Pour  $k = 0$  on a les deux modes fondamentaux

Pour  $k \neq 0$  on a les harmoniques d'ordre k.

.../...

Onde symétrique

dans le milieu  $|z| \geq h$

$$\eta = e^{-\alpha|z| + \alpha h} \cos \beta p h \cos f(x - vt)$$

dans le métal  $|z| \leq h$

$$\eta = \cos \beta p z \cos f(x - vt)$$

on a les relations :

$$-\alpha^2(1 + \beta^2) = v^2$$

$$-\alpha'^2(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}) = v^2$$

$$f = \frac{\omega}{v}$$

l'équation de propagation s'écrit :

$$\left(\frac{\omega h}{v}\right) \frac{\sqrt{v^2 - \alpha^2}}{\alpha} = \text{Arctg} \left[ \frac{\alpha \alpha'}{\alpha \beta} \sqrt{\frac{\alpha'^2 - v^2}{v^2 - \alpha^2}} \right] + \frac{1}{2} \pi$$

onde antisymétrique

dans le milieu  $|z| \geq h$

$$\eta = e^{-\alpha|z| + \alpha h} \sin \beta p h \cos f(x - vt) \left(\frac{|z|}{z}\right)$$

dans le métal  $|z| \leq h$

$$\eta = \sin \beta p z \cos f(x - vt)$$

on a les relations :

$$-\alpha^2(1 + \beta^2) = v^2$$

$$-\alpha'^2(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}) = v^2$$

$$f = \frac{\omega}{v}$$

l'équation de propagation s'écrit :

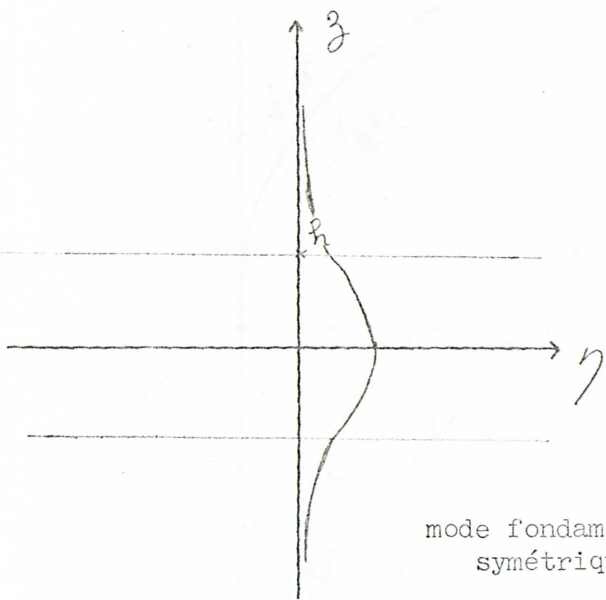
$$\frac{\omega h}{v} \left[ \frac{\sqrt{v^2 - \alpha^2}}{\alpha} \right] = - \text{Arctg} \left[ \frac{\alpha \beta}{\alpha \beta'} \sqrt{\frac{v^2 - \alpha^2}{\alpha'^2 - v^2}} \right] + \frac{1}{2} \pi$$

La vitesse de phase est toujours comprise entre la vitesse transversale dans le métal et celle dans le milieu.

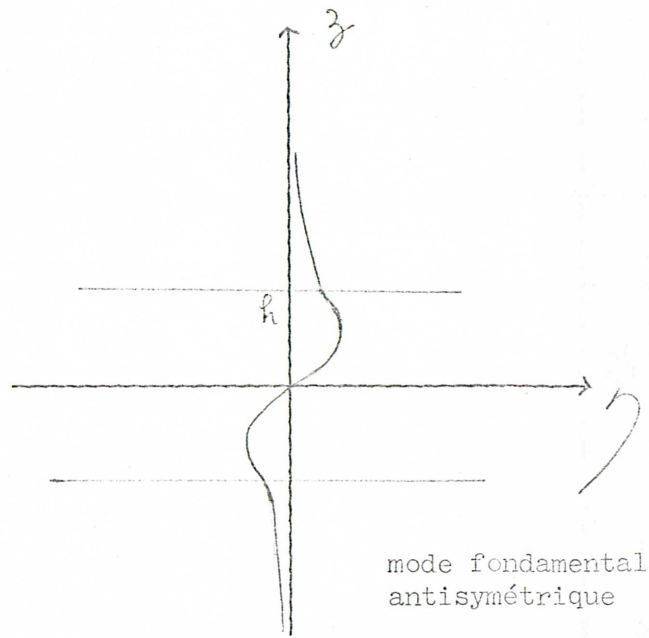
Chaque mode apparait pour une valeur déterminée de la pulsation  $\omega$ , ces valeurs sont en progression arithmétique de raison

$$A = \frac{\pi}{2h} \times \frac{r' r}{\sqrt{r'^2 - r^2}}$$

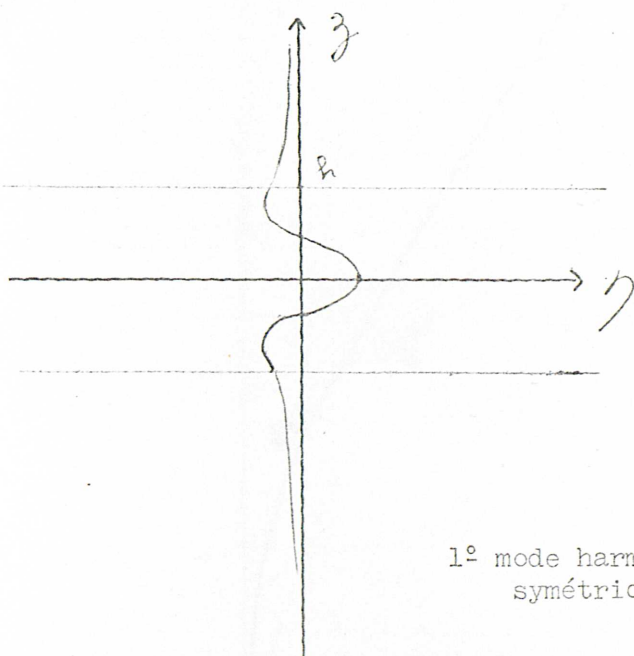
- courbes d'élongation et de dispersion



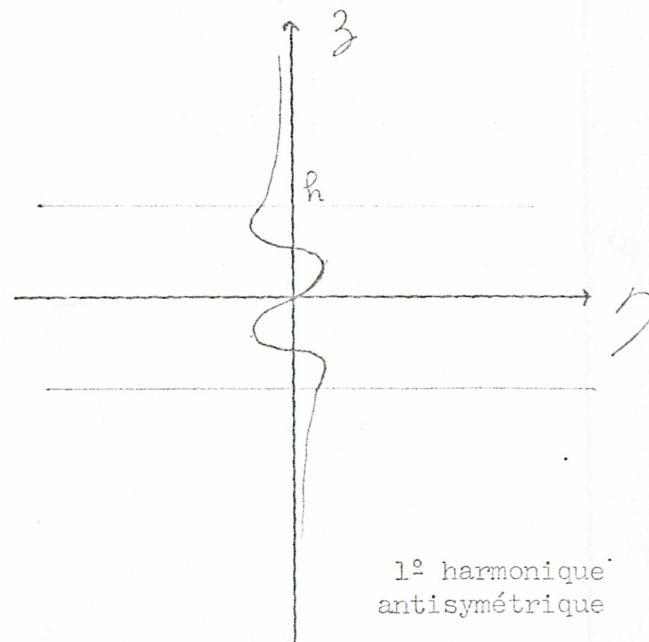
mode fondamental symétrique



mode fondamental antisymétrique

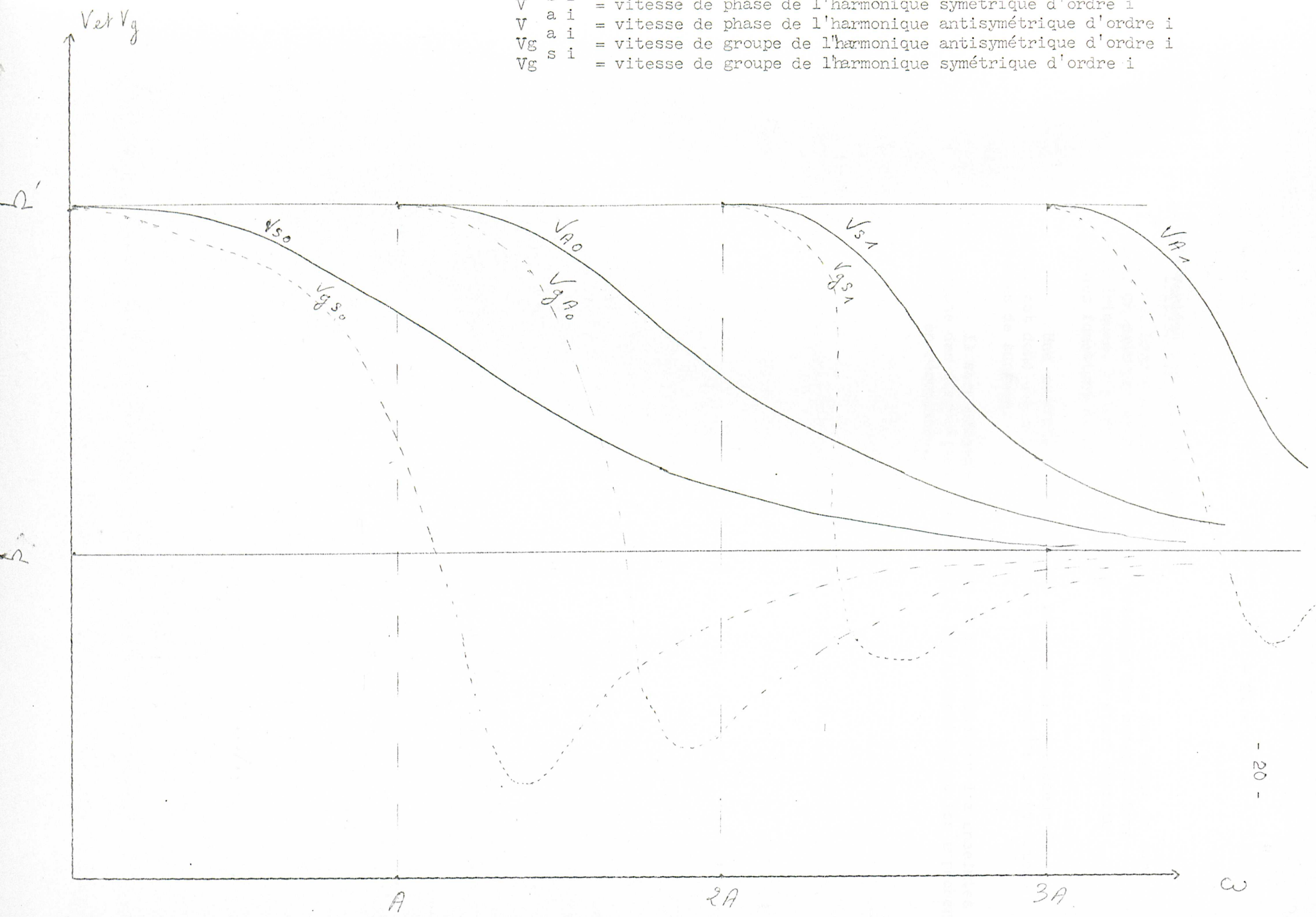


1<sup>o</sup> mode harmonique symétrique



1<sup>o</sup> harmonique antisymétrique

$V_{s i}$  = vitesse de phase de l'harmonique symétrique d'ordre  $i$   
 $V_{a i}$  = vitesse de phase de l'harmonique antisymétrique d'ordre  $i$   
 $V_{g s i}$  = vitesse de groupe de l'harmonique antisymétrique d'ordre  $i$   
 $V_{g a i}$  = vitesse de groupe de l'harmonique symétrique d'ordre  $i$



5°) Variété des ondes de surface

Pour chaque forme de dioptré il existe des ondes de surface. On peut par exemple mettre en évidence des ondes de Love cylindriques, l'élongation radiale de ces ondes étant décrite par des fonctions de Bessel.

Une enceinte constituée par une certaine épaisseur de métal est donc une structure permettant l'instauration de systèmes d'ondes de surface.

Il sera nécessaire que lors de la construction des enceintes on prenne des dispositions pour amortir les vibrations et les empêcher d'entrer en résonance.

.../...

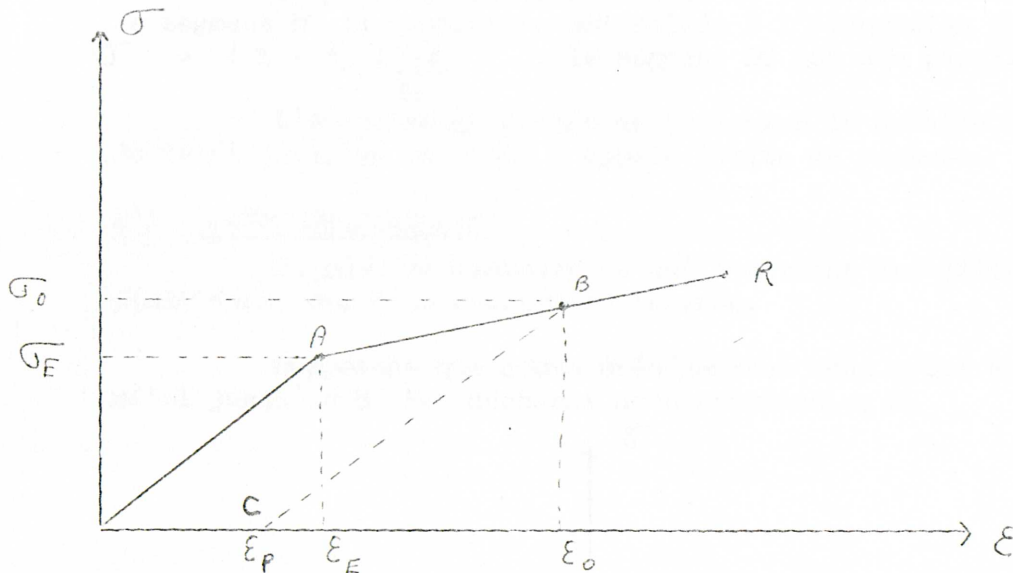


II - PRESENTATION DE L'ELASTOPLASTICITE -

A - Résultats expérimentaux

1°) L'écroutissage

Si on soumet une éprouvette à une traction simple, la contrainte est reliée à l'allongement par la courbe ci-dessous :



Si on charge l'éprouvette, on décrit une droite OA.

Cette évolution est réversible, c'est-à-dire que si on décharge, on revient en 0 sans déformation persistante. On dit que l'on est dans le domaine d'élasticité linéaire de l'éprouvette ( $\sigma$  et  $\epsilon$  sont directement proportionnels). En fait il est fréquent qu'au voisinage du point A la relation entre  $\epsilon$  et  $\sigma$  ne soit plus tout à fait linéaire.

Au-delà du point A les déformations sont permanentes par opposition aux déformations élastiques réversibles, on les appelle déformations plastiques.

A est le seuil de plasticité,  $\sigma_E$  et  $\epsilon_E$  sont les limites du domaine élastique initial, pour la contrainte et pour la déformation.

Si on applique une contrainte  $\sigma_0$  supérieure à  $\sigma_E$  on produit un allongement  $\epsilon_0$ . Si on supprime la contrainte on arrive en C et non en 0 comme précédemment. La déformation se décompose donc en deux parties :

- la déformation élastique  $\epsilon_0 - \epsilon_P$
- la déformation plastique permanente  $\epsilon_P$

.../...

Si on recharge l'éprouvette jusqu'en B, la contrainte est cette fois une fonction linéaire de l'allongement ; de plus les phénomènes sont réversibles.

Tout se passe donc comme si on avait étendu le domaine d'élasticité jusqu'en B. On dit qu'il y a eu écrouissage.

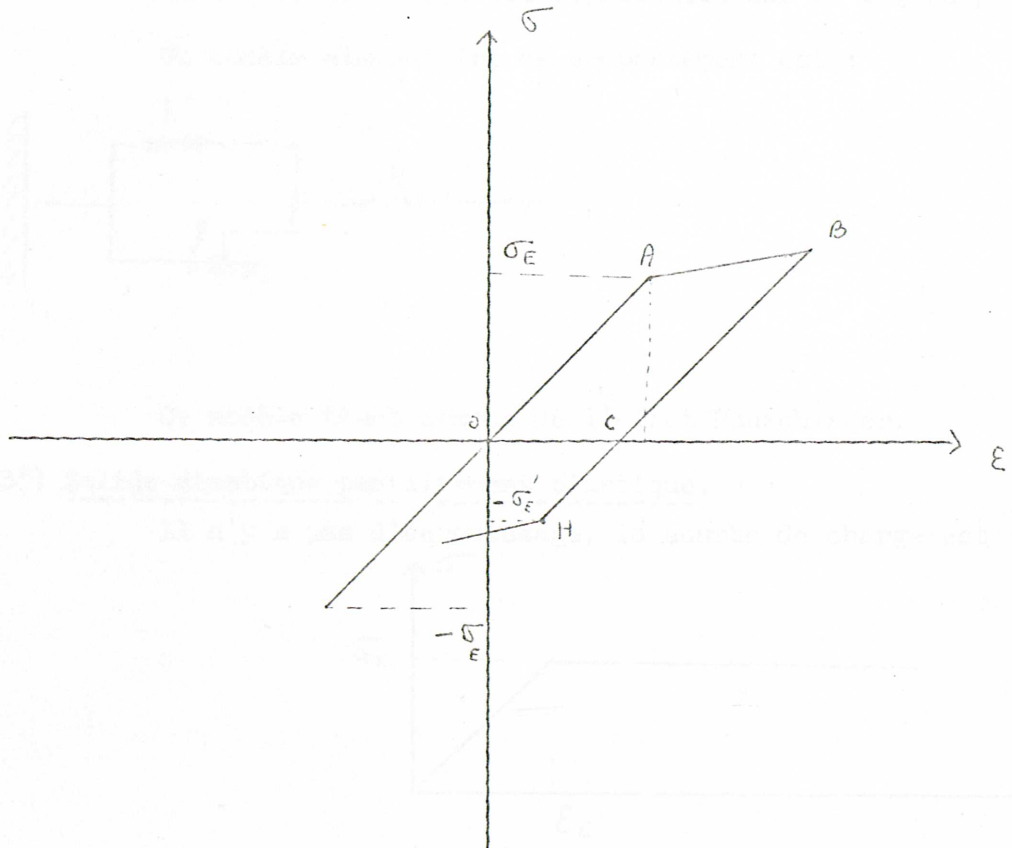
Le point B est appelé seuil de plasticité actuel. Sur le segment BC la contrainte est reliée à l'élongation par :  
$$\sigma = (\epsilon - \epsilon_p) \frac{\sigma_E}{\epsilon_E}$$
, le segment BC est donc parallèle à OA.

L'écrouissage permet de prolonger le domaine d'élasticité du métal jusqu'en un point R appelé limite de rupture.

## 2°) L'effet Bauschinger

On peut se demander ce qu'il advient des déformations plastiques lors d'un chargement inverse.

Supposons que comme précédemment nous ayons écroui le métal jusqu'en B. Par décharge nous arrivons en C.



Si on comprime l'éprouvette nous trouvons un comportement élastique jusqu'en H, au-delà de H il y a écrouissage.

Si on compare la contrainte  $\sigma'_E$  du seuil de plasticité à la valeur initiale  $\sigma_E$  on constate une diminution du domaine élastique. C'est l'effet Bauschinger.

B - Modèles théoriques -

1°) Description des modèles

Les phénomènes dus à la plasticité sont très complexes.

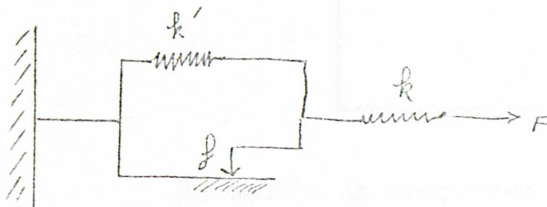
On est donc amené à adopter des schémas plus ou moins simplifiés.

Pour cela on peut représenter un corps plastique par un système comprenant deux ressorts de constantes  $k$  et  $k'$  et un patin susceptible de glisser pour une force appliquée supérieure à une valeur  $f$ .

2°) Cas général du métal écrouissable

La courbe de charge est représentée sur la figure précédente.

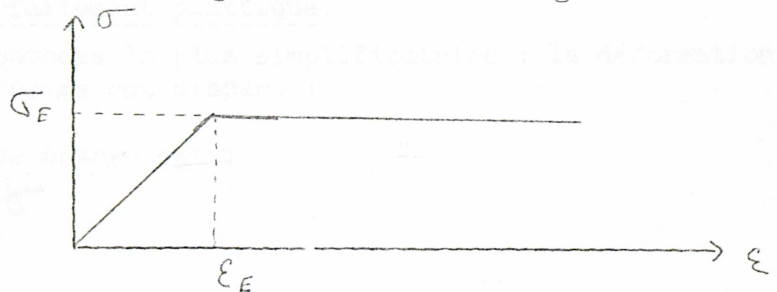
Un modèle élémentaire de comportement est :



Ce modèle tient compte de l'effet Bauschinger.

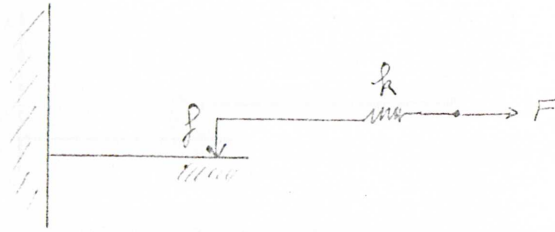
3°) Solide élastique parfaitement plastique.

Il n'y a pas d'écrouissage, la courbe de charge est :



.../...

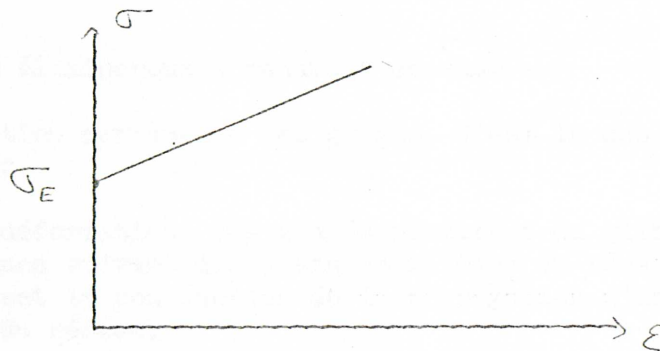
Le modèle élémentaire correspondant est :



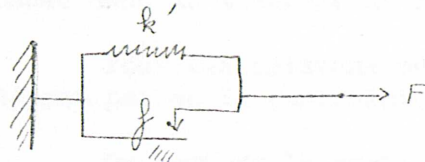
4°) Solide rigide plastique avec écrouissage.

Ce coup ne subit aucune déformation élastique.

La courbe de charge est :



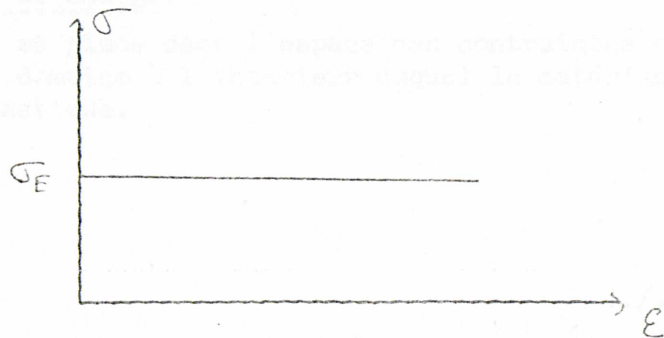
Un modèle de comportement est :



5°) Solide rigide parfaitement plastique.

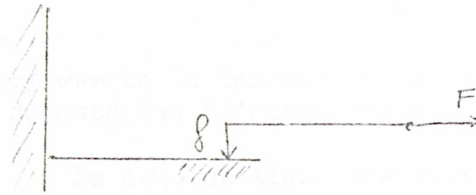
C'est l'hypothèse la plus simplificatrice : la déformation élastique et l'écrouissage ont disparu :

La courbe de charge est :



.../..

Un modèle de comportement est :



6°) Interprétation de la déformation plastique.

Un modèle est un assemblage de grains cristallins.

La déformation plastique peut être due à deux causes :

- au déplacement relatif des grains ; la déformation est rendue irréversible par le frottement entre les grains. C'est le cas des terres.

Nous éliminerons dorénavant ce cas.

- à la déformation permanente des grains. C'est le cas des métaux et des roches.

Les déformations des grains résultent du glissement de rangées atomiques suivant des plans parallèles du réseau cristallin. Ce glissement est la conséquence de la propagation d'une dislocation à l'intérieur du réseau.

La conséquence de ce glissement des rangées atomiques est énoncée dans le théorème de Schmid :

Pour les cristaux métalliques, la résistance au glissement ne dépend pas de la contrainte normale au plan de glissement.

On peut de la sorte montrer que la frontière du domaine d'élasticité dépend du déviateur des contraintes et est indépendante de la pression hydrostatique ( $P = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ )

III - LA THEORIE DE L'ELASTOPLASTICITE AVEC ECROUISSAGE ISOTROPE

---

1°) La fonction de charge.

Si on se place dans l'espace des contraintes on a vu qu'il existe un domaine à l'intérieur duquel le matériau a un comportement élastique.

.../...

Ce domaine est limité par une surface dite surface de charge dont l'équation est :

$$f(\bar{\sigma}; H) = 0$$

$\bar{\sigma}$  représente le tenseur des contraintes et H représente l'histoire du matériau (l'écroutissage est contenu dans H).

Le domaine élastique correspond à l'inéquation :

$$f(\bar{\sigma}; H) \leq 0$$

- Si on suppose que le corps est isotrope avant écroutissage, on peut montrer que  $f(\bar{\sigma}; H)$  est une fonction scalaire symétrique des trois contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

- Si de plus on suppose l'écroutissage isotrope, le paramètre H devient un paramètre scalaire  $k$

soit :  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, H) = 0 \iff \hat{f}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = k$ .

- Si par ailleurs le corps est suffisamment plastique, on constate expérimentalement que seul le déviateur du tenseur des contraintes intervient pour la définition de f.

Dorénavant on suppose les trois conditions ci-dessus réalisées.

Dans ces conditions la surface de charge (S) définie par  $f(\bar{\sigma}; H) = 0$  présente les caractéristiques suivantes dans l'espace des contraintes principales :

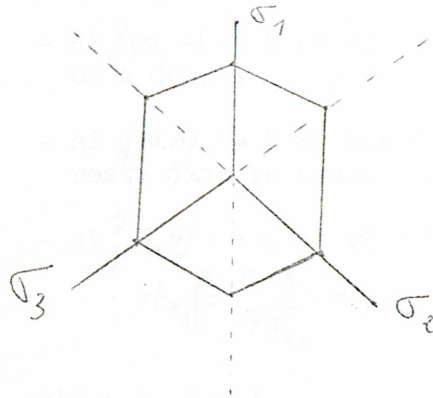
- (S) est un cylindre d'axe  $(\Delta)$   
 $(\Delta)$  est la droite  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$
- (S) est synétrique par rapport aux trois plans bissecteurs des dièdres formés par les axes  $O\sigma_1, O\sigma_2, O\sigma_3$   
 Ces plans bissecteurs contiennent la droite  $(\Delta)$ .
- Dans le cas d'un métal (cas étudié ici), la loi de Schmid permet de montrer que (S) est de plus symétrique par rapport à l'origine O.
- En définitive pour connaître (S) il suffit de connaître la section de (S) par le plan perpendiculaire à  $(\Delta)$  en O. Cette section est elle même connue dès que l'on en connaît un secteur compris dans un angle de  $\frac{\pi}{6}$  et de sommet O.

2°) Exemples de fonctions de charge.

\* Critère de Trésca :

Il s'écrit simplement :  $\sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0$  pour  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

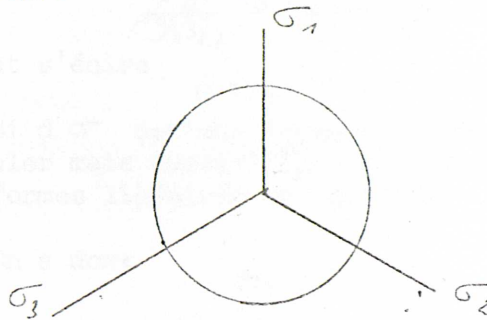
La section de (S) par un plan perpendiculaire à  $(\Delta)$  est donc un hexagone régulier.



\* Critère de Mises :

Il s'écrit : 
$$\frac{1}{6} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] - k^2 = 0$$

La section de (S) par un plan perpendiculaire à  $(\Delta)$  est un cercle.



\* Remarque :

Le choix d'un critère est purement arbitraire. Les deux critères ci-dessus sont choisis en général pour leur simplicité. Ils sont très voisins l'un de l'autre. En prenant des valeurs adéquates des  $k$  respectifs on peut en effet, soit inscrire le cercle dans l'hexagone soit l'hexagone dans le cercle.

Si on fait des calculs analytiques, il est plus simple d'utiliser le critère de Mises car on dispose d'une fonction régulière infiniment dérivable.

Si on fait des calculs numériques il vaut mieux utiliser le critère de Tresca car on dispose alors d'une fonction linéaire par morceaux ce qui est idéal pour faire un calcul par approximation.

### 3°) La déformation plastique.

Soit l'état actuel de contraintes :  $\sigma$  ; à partir de cet état on impose une variation  $d\sigma$  de contrainte.

$d\sigma$  entraîne une variation  $d\varepsilon$  des déformations cette variation  $d\varepsilon$  se décompose en partie élastique  $d\varepsilon_e$  et partie plastique  $d\varepsilon_p$

- si  $f(\sigma, H) < 0$  on est à l'intérieur du domaine élastique.  
On a donc  $d\varepsilon_p = 0$

- si  $f(\sigma, H) = 0$  et que  $d\sigma$  correspond à une décharge on reste dans le domaine élastique et  $d\varepsilon_p = 0$

- si  $f(\sigma, H) = 0$  et si  $d\sigma$  est une charge c'est-à-dire si

$$d_H f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} > 0 \quad \text{on a } d\varepsilon_p \neq 0$$

C'est ce dernier cas que nous allons traiter.

Si on applique  $d\sigma$  la fonction  $f$  devient  $f + d f$  et comme il y a écrouissage on a :  $f = f + d f = 0$

On en tire  $d f = 0$  soit :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \cdot d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial H} dH = 0$$

$d\varepsilon_{ij}^p$  peut s'écrire :  $d\varepsilon_{ij} = H_{ijkl} d\sigma_{kl}$

Si  $d\sigma$  devient tangent à la surface de charge  $d\varepsilon = f$  doit s'annuler mais aussi  $d\varepsilon_{ij}^p$  ; il y a donc proportionnalité entre les formes linéaires en  $d\sigma_{kl}$

On a donc

$$H_{ijkl} = A_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}$$

Soit :  $d\varepsilon_{ij}^p = A_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = A_{ij} d_H f$

#### 4°) Le principe du travail maximal ou critère de Hill

Par application directe de la loi de Schmid on démonte aisément le critère de Hill.

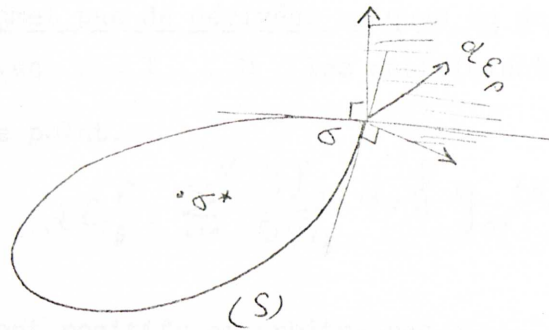
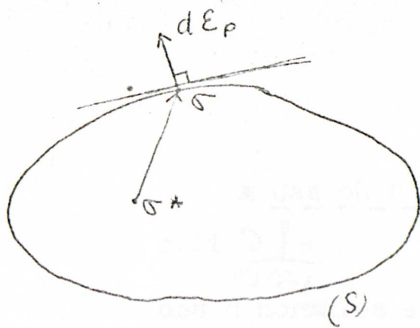
Dans la déformation plastique réelle  $d\varepsilon_p$  le travail des contraintes réelles  $\sigma_{ij}$  est supérieur ou égal au travail de tout autre état de contraintes admissibles ( c'est-à-dire que  $f(\sigma_{ij}^*) \leq 0$  ).

$$\sigma_{ij} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$$

On en déduit que la surface de charge est convexe et qu'en tout point où elle admet un plan tangent, le vecteur  $d\varepsilon_p$  lui est orthogonal.

Si elle n'admet pas de plan tangent, le vecteur  $d\varepsilon_p$  est compris dans le cône des normales extérieures à (S).





5°) Le potentiel plastique.

Dans le cas où  $f$  est dérivable on a  $d\varepsilon_p$  orthogonal à  $(S)$ .

On en déduit donc :  $d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$ ;  $d\lambda$  dépend des  $d\sigma_{ij}$  et on a  $d\lambda \geq 0$

$f$  prend donc le nom de potentiel plastique.

\* Remarque :

Dire que  $f$  ne dépend que du déviateur de  $\sigma$  revient à dire  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ii}} = 0$  ce qui compte tenu de la relation ci-dessus équivaut à dire que la déformation plastique se fait sans variation de volume.

Il était donc équivalent de supposer que  $f$  ne dépend que du déviateur de  $\sigma$  ou de supposer que les déformations plastiques se font sans variations de volume.

\* Autre forme de  $d\varepsilon_p$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = A_{ij} d_H f$$

on tire :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d_H f g(H) \text{ avec } g(H) \geq 0$$

où  $g$  ne dépend plus que de l'histoire du matériau.

.../...

\* Cas où f n'admet pas de dérivées uniques en un point

soit  $\frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}}$  avec  $n = 1 \dots N$  les coefficients directeurs des N normales en ce point.

$$d \mathcal{E}_{ij}^p \text{ s'écrit : } d \mathcal{E}_{ij}^p = \sum_{m=1}^N \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d_H f g_m^{(H)}$$

les  $g_m^{(H)}$  sont positifs et arbitraires.

\* Cas du matériau parfaitement plastique

Dans ce cas on a  $d_H f = 0$  par conséquent g doit être infini et  $g d_H f = d\lambda$  devient un paramètre positif arbitraire :

$$\text{si } d f = 0 \text{ et } f = 0 \Rightarrow d \mathcal{E}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

$$\text{si } d f < 0 \text{ ou } f < 0 \Rightarrow d \mathcal{E}_{ij}^p = 0$$

6°) Passage aux vitesses.

On peut introduire les vitesses de déformation dans les calculs. Cette introduction de l'élément de temps dt permet de simplifier certaines interprétations, elle n'est absolument pas nécessaire pour l'élaboration de la théorie.

$$\text{On note } v_{ij} = \frac{d \mathcal{E}_{ij}}{dt} \text{ en coordonnées d'Euler}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left( \frac{D \sigma_{kl}}{Dt} \right)_{\mathcal{C}} \text{ dérivée au sens de Truesdell}$$

$$\text{si de plus on note : } d \mathcal{E}_{ij}^e = \Lambda_{ijkl} d \sigma_{kl}$$

on arrive aux équations suivantes :

$$v_{ij} = v_{ij}^e + v_{ij}^p = \left( \Lambda_{ijkl} + g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \dot{\sigma}_{kl}$$

$$\text{si } f = 0 \text{ et si } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \geq 0$$

$$v_{ij} = v_{ij}^e = \Lambda_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}$$

$$\text{si } f < 0 \text{ ou si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} < 0$$

7°) Cas des déformations infiniment petites.

Dans beaucoup de cas, les zones plastiques sont maintenues par des zones élastiques. On peut donc souvent considérer que les déformations plastiques et élastiques sont infiniment petites.

On a dans ce cas la possibilité de confondre dérivées au sens de Truesdell et dérivées en variables de Lagrange.

En définitive on dispose de :

- trois équations d'équilibre :  $\sum_j \frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = 0$  en négligeant les forces de masse.

- six équations de comportement :

$$v_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \begin{cases} \left( \lambda_{ijkl} + g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \dot{\sigma}_{kl} \\ \text{si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \geq 0 \\ \wedge_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} < 0 \end{cases}$$

On dispose donc de neuf équations pour les neufs inconnues  $v_i$  et  $\dot{\sigma}_{ij}$ .

Si de plus on se donne les conditions initiales et les conditions aux limites on peut en intégrant sur l'histoire du matériau obtenir la solution donnant l'état actuel. Il y a unicité de la solution (théorème de Melan).

\* Cas parfaitement plastique.

Il faut remplacer dans les équations précédentes le terme

$$g \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \quad \text{par} \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{avec } \lambda \text{ positif arbitraire.}$$

Il y a cette fois une inconnue de plus  $\lambda$  dans les zones qui se déforment plastiquement.

Il y a unicité du champ des contraintes, mais il n'y a plus unicité du champ des vitesses.

\* Relations de Prandtl Reuss.

On peut prendre comme exemple le critère de Misés qui s'écrit  $f(\sigma; k) = J_2 - k^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] - k^2$

Dans ce cas les relations de comportement s'écrivent

$$v_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \lambda \dot{s}_{ij}$$

$E$  = module d'Young  
 $\nu$  = coefficient de Poisson

$\dot{s}_{ij}$  est le dérivé de  $\dot{\sigma}_{ij}$  .../..

IV - THEORIE DES CHARGES LIMITEES

1) Position du probleme

avec  $\lambda = g \dot{J}_2$  si le matériau est écrouissable  
 et  
 si  $\dot{J}_2 = k^2$  et  $\dot{J}_2 \geq 0$   
 $\lambda \geq 0$  arbitraire si le matériau est parfaitement plastique  
 et si  $\dot{J}_2 = k^2$  et  $\dot{J}_2 = 0$   
 $\lambda = 0$  dans les autres cas.

Ces relations sont appelées relations de Prandtl Reuss.

2) Cas de l'écrouissement de la structure

On s'intéresse à l'écrouissement libre de la structure sous charge limite.

Pour cela on dispose en coordonnées d'Euler :

- trois équations d'équilibre :

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$$

- six relations d'écrouissement :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \lambda \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{eq}}$$

- le critère :

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

\* Choix des inconnues :

On prend cette fois comme inconnues  $v_i, \lambda$  soit neuf inconnues. Dans les zones en écrouissement  $\lambda$  est inconnue

IV - THEORIE DES CHARGES LIMITES

1) Position du problème

On suppose le matériau rigide parfaitement plastique. Si on applique un champ de contraintes à un édifice, celui-ci reste tout d'abord entièrement dans le domaine élastique (donc sans déformation). Puis si les contraintes augmentent, des zones plastifiées apparaissent mais ces zones sont maintenues par une enveloppe élastique (il n'y a toujours pas de déformation). Si les contraintes augmentent encore, les zones plastifiées ne sont plus maintenues et il y a destruction de l'édifice, on dit que l'on a atteint la charge limite.

\* Remarque : Le cas du solide rigide est parfaitement théorique, il faut donc se demander quelle est l'influence de l'élasticité sur la charge limite.

On peut montrer que si les déformations élastiques restent infiniment petites, le champ des contraintes et donc la charge limite sont indépendants du Module d'YOUNG E. On peut donc faire tendre E vers l'infini ce qui est le cas du solide rigide.

2) Cas de l'écoulement de la structure

On s'intéresse à l'écoulement libre de la structure sous sa charge limite.

Pour cela on dispose en coordonnée d'EULER de :

- trois équations d'équilibre :

$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$  en supposant les forces de masse nulles.

- six relations d'écoulement :

$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$

- le critère :

$f(\sigma_{ij}) = 0$

\* Choix des inconnues

On prend cette fois comme inconnues :  $v_i, \sigma_{ij}$  soit neuf inconnues. Dans les zones en écoulement on a de plus l'inconnue  $\lambda$

.../...

\* Conditions aux limites :

On doit se fixer des conditions aux limites sur les inconnues  $v_i$  et  $\sigma_{ij}$

Il faut que ces conditions soient compatibles entre elles. On doit se donner en chaque point de la frontière soit  $v_i$  soit  $\sigma_{ij}$

\* résolution dans les zones en écoulement

Dans les zones en écoulement on dispose de dix inconnues et de dix équations, le système est donc défini de façon unique.

\* résolution dans les zones statiques

On a  $v_i = 0$  et donc il ne reste que six inconnues  $\sigma_{ij}$  mais on ne dispose plus que des trois équations d'équilibre, c'est une des difficultés du problème car il n'y a plus unicité.

3) Principes variationnels

\* champ de contraintes licite

Un champ est licite s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

- il est statiquement admissible : c'est-à-dire s'il satisfait aux conditions d'équilibre et aux conditions imposées en surface par les forces données  $\vec{T}^d$

si  $\vec{\alpha}$  est le vecteur normal sur la surface on a donc :

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \text{ et } \sum_j \sigma_{ij} \alpha_j = T_i^d$$

- il est plastiquement admissible : en tout point  $f(\sigma_{ij}) \leq 0$

\* champ de vitesses de déformation licite

Un champ de vitesses de déformation est licite si :

- il est cinématiquement admissible : c'est-à-dire s'il dérive d'un champs de vitesse  $v_i$  par  $v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

et si sur la surface il satisfait aux conditions de vitesses imposées soit :  $v_i = v_i^d$

- il est plastiquement admissible :

c'est-à-dire s'il existe un champ de contraintes telles que  $V_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  avec  $\lambda > 0$

\* principe de HILL pour les contraintes

Soit (S) la surface limitant l'édifice,  $\vec{\alpha}$  est le vecteur normal à (S).

On appelle fonctionnelle des contraintes l'expression :

$$J_b(\sigma) = \sum_{ij} \int_{(S)} \sigma_{ij} \alpha_j v_i^d dS$$

L'intégration n'est faite qu'aux points où la vitesse  $V_i^d$  est donnée.

Soit  $\sigma_{ij}$  le champ des contraintes correspondant à la solution  $V_{ij}$ . Soit  $\sigma_{ij}^*$  un autre champ licite.

Si en un point de (S) la vitesse n'est pas donnée la contrainte

$$T_i = \alpha_j \sigma_{ij} \text{ l'est et on a } \sigma_{ij} \alpha_j = \sigma_{ij}^* \alpha_j$$

donc

$$J_b(\sigma) - J_b(\sigma^*) = \sum_{ij} \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) v_{ij} dV$$

L'intégration est faite sur toute la surface

Par le théorème des travaux virtuels on tire :

$$J_b(\sigma) - J_b(\sigma^*) = \sum_{ij} \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) v_{ij} dV$$

Le principe du travail maximal donne alors :

$$J_b(\sigma) - J_b(\sigma^*) \geq 0$$

On en déduit que la fonctionnelle des contraintes  $J_b(\sigma)$  est maximum parmi les champs de contraintes licites pour un champ solution  $\sigma$ .

\* Principe de MARKOW pour les vitesses

Soit  $v^*$  un champ de vitesses licite et  $v$  le champ solution.

Soit  $M(v^*)$  la fonctionnelle des vitesses :

$$(Q_1 - Q_2) \dot{q} = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) v_{ij} dV = 0$$
  
$$(Q_1 - Q_2) \dot{q} \geq 0$$

.../...

$$M(v^*) = \int_V \sigma_{ij}^* v_{ij}^* dV - \int_S T_i^d v_i^* dS$$

- 37 -

Soit  $E$  l'ensemble des charges  $Q$  sur la frontière de  
Soit  $Q$  un point de chargement limite

$Q$  appartient à  $E$

L'intégrale sur  $(S)$  n'est faite que pour les points où  $T_i = T_i^d$  est donné.

En utilisant les mêmes raisonnements qu'au paragraphe précédent on démontre que :  $M(v) \leq M(v^*)$

Parmi tous les champs de vitesses licites la fonctionnelle des vitesses est minimum pour le champ solution.

Par ailleurs le théorème des travaux virtuels appliqué au champ solution donne :  $M(v) = J_b(\sigma)$

donc :  $J_b(\sigma^*) \leq J_b(\sigma) = M(v) \leq M(v^*)$

#### 4) La théorie des charges limites

##### a) Généralités

Si on applique un système de forces  $\lambda Q_1^1, \dots, \lambda Q_m^1$  à  $\gamma^{(p.o.)}$  une structure avec  $\lambda$  croissant depuis zéro, il arrive un moment où une valeur  $\lambda_1$  il a écoulement.

Dans l'espace des  $Q_i$  on a donc un point de coordonnées  $\lambda_1 Q_1^1, \dots, \lambda_1 Q_m^1$  correspondant à une charge limite.

On peut réitérer l'opération avec une autre distribution des forces et on définit un point  $\lambda_2 Q_1^2, \dots, \lambda_2 Q_m^2$

L'ensemble des points obtenus constitue une hypersurface  $F$  dans l'espace des  $(Q_1, \dots, Q_m)$  que l'on appelle frontière d'écoulement.

En fait dans la plupart des cas on ne sait pas définir la charge limite, on se contente donc d'encadrer la charge limite en utilisant les théorèmes d'extremum vus au paragraphe précédent.

Remarque : on démontre aisément en faisant tendre le module d'YOUNG vers  $\bar{1} \bar{1} \bar{1} \bar{1} \bar{1} \bar{1}$ , que les résultats qui suivent peuvent s'appliquer au solide élastique parfaitement plastique.

##### b) Théorèmes fondamentaux, Procédé statique

Soit  $Q$  ( $Q_1, \dots, Q_n$ ) un point de chargement limite,  $\dot{q}_i$  les vitesses correspondantes (le travail des forces est  $Q_i d q_i$ ),  $\sigma_{ij}$  les contraintes correspondantes,  $Q^*$  une autre charge correspondant à un champ de contraintes  $\sigma_{ij}^*$  licite.

Le système étant supposé rigide plastique on a en utilisant le théorème de HILL :

$$(Q_i - Q_i^*) \dot{q}_i = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) v_{ij} dV \geq 0$$

d'où

$$(Q_i - Q_i^*) \dot{q}_i \geq 0$$

.../...



Soit E l'ensemble des charges  $Q^*$  et F la frontière de E.  
Soit Q un point de chargement limite

\* Q appartient à E

\* Q n'est pas à l'intérieur de E sinon il existerait des  $Q^*$  tels que  $(Q_i - Q_i^*) \dot{q}_i < 0 \Rightarrow Q$  est sur F

\* Pour la même raison F doit être toute entière du même côté par rapport à la normale à  $\vec{q}$

\* Tout point de F est point limite sinon on pourrait continuer le chargement au delà.

On tire donc les conséquences suivantes :

- premier théorème

Il existe une frontière d'écoulement indépendante du trajet suivi à partir de l'état initial.

- deuxième théorème

Les forces pour lesquelles on peut trouver un champ de contraintes licites sont en deça ou sur la frontière d'écoulement.

- troisième théorème

La frontière F est convexe, en un point ordinaire le vecteur  $\vec{q}$  lui est orthogonal.

- quatrième théorème

Pour des forces proportionnelles  $\vec{F} = \lambda \vec{f}$  ( $\lambda > 0$ ) la charge limite  $\lambda \vec{f}^*$  est la plus grande des charges pour lesquelles existe un champ de contrainte licite.

Tout champ licite en donne une valeur par défaut.

c) Procédé dynamique, théorèmes fondamentaux

Soit Q un point de E associé au champ de contraintes licites  $\sigma_{ij}$   
Soit  $v_{ij}$  un champ de vitesses licite.

Le théorème des travaux virtuels et le théorème de MARKOW donnent :

$$Q_i \dot{q}_i^* = \int_V \sigma_{ij} v_{ij}^* dv$$

$$\int_V \sigma_{ij} v_{ij}^* dv \leq \int_V \sigma_{ij}^* v_{ij}^* dv$$

$$\Rightarrow Q_i \dot{q}_i^* \leq \int_V \sigma_{ij}^* v_{ij}^* dv$$

- premier théorème : La puissance d'un système de forces licites dans un champ de vitesses licite ne peut dépasser la puissance totale dissipée à l'intérieur du corps (pour les vitesses de déformation de ce champ).

- deuxième théorème : L'ensemble E est l'intersection des régions

$Q_i \dot{q}_i^* \leq \int_V \sigma_{ij}^* v_{ij}^* dv$  relatives à tous les champs de vitesses  $v_{ij}^*$  licites.

- troisième théorème : La frontière F est l'enveloppe des plans

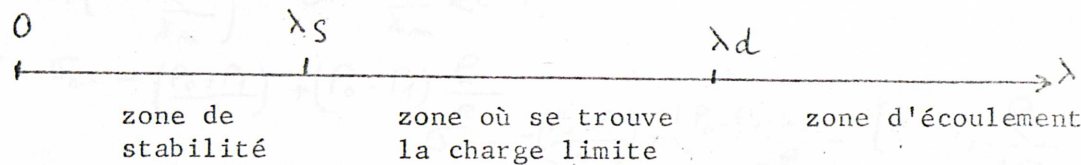
$$Q_i \dot{q}_i^* = \int_V \sigma_{ij}^* v_{ij}^* dv.$$

- quatrième théorème :

Pour des forces proportionnelles  $\vec{F} = \lambda \vec{f}$  la charge limite est la plus petite des charges dont la puissance parvient à égaler la puissance dissipée dans certains champs de vitesses licites. N'importe quel champ de vitesses licites en donne une approximation par excès.

d) Utilisation pratique

Dans la pratique on considère les chargements proportionnels. Par la méthode statique on définit un  $\lambda_s$  tel que  $\lambda_1 \geq \lambda_s$ . Par la méthode dynamique on détermine un  $\lambda_d$  tel que  $\lambda_d \geq \lambda_1$  :



V - EXEMPLES D'APPLICATION

A) Cas de la sphère creuse

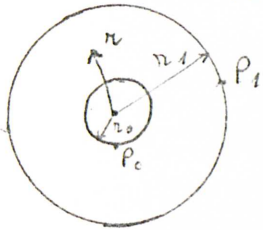
Une sphère creuse est un bon exemple d'enceinte à pression. Par ailleurs les symétries du problème permettent aisément de trouver des solutions analytiques aux problèmes posés.

1) Cas d'une déformation élastique

Soient  $P_1$  et  $P_0$  les pressions extérieures et intérieures,  $r_0$  et  $r_1$  les rayons intérieurs et extérieurs.

Le déplacement  $\vec{\xi}$  est radial et a pour valeur sur le rayon

vecteur : 
$$\vec{\xi} = \frac{(P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3) r}{(r_1^3 - r_0^3) (3\lambda + 2\mu)} + \frac{(P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{(r_1^3 - r_0^3) 4\mu r^2}$$



$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de LAMÉ.

Les contraintes  $\sigma_r$  suivant le rayon vecteur et  $\sigma_\theta$  suivant une normale à ce rayon ont pour valeur :

$$\sigma_r = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} - \frac{1}{3} \frac{(P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_0 r_0^3 - P_1 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3} + \frac{1}{2r^3} \frac{(P_0 - P_1) r_0^3 r_1^3}{r_1^3 - r_0^3}$$

Si on applique par exemple le critère de TRESCA on voit que la limite d'élasticité est atteinte sur l'intérieur de la sphère ( $r = r_0$ ).

Le domaine d'élasticité est défini par : 
$$\frac{3r_1^3}{2(r_1^3 - r_0^3)} (P_0 - P_1) \leq K$$

x Cas d'une enveloppe mince

Dans ces conditions on note :  $r_1 + r_0 = 2 r_m$

$$r_1 - r_0 = e$$

$$r = r_m \left( 1 + \frac{e}{r_m} \right) \quad \text{et} \quad \frac{e}{r_m} \ll 1$$

on obtient : 
$$\sigma_r = - \left( \frac{P_0 + P_1}{2} \right) + (P_0 - P_1) \frac{e}{2r}$$

$$\sigma_\theta = - \left( \frac{P_0 + P_1}{2} \right) + (P_0 - P_1) \frac{r_m}{2e} - [P_0 - P_1] \frac{e}{2e}$$

Le domaine élastique est donné par :  $|P_0 - P_1| \frac{r_m}{2e} \leq K$

x Cas d'une bulle à l'intérieur d'une pièce de métal

Il peut exister à l'intérieur d'une pièce métallique (une enceinte à pression par exemple) une bulle. Cette bulle est supposée de petit diamètre devant les dimensions de la pièce. On se ramène donc au cas de la sphère creuse en faisant :  $\frac{r_1}{r_0} \rightarrow +\infty$

La pression qui règne à une certaine distance de la bulle est P (d'où  $P_1 = P$ ), on suppose par ailleurs la pression nulle dans la bulle..

On a : 
$$\sigma_r = -P + \frac{Pr_0^3}{r^3}$$

$$\sigma_\theta = -P - \frac{Pr_0^3}{2r^3}$$

Le domaine d'élasticité correspond donc à 
$$\frac{3P}{2} \leq K$$

2/ Cas de la sphère creuse parfaitement plastique avec déformations infiniment petites

On suppose que la pression extérieure est nulle ( $P_i = 0$ ).

Nous venons de voir que lorsque  $p_0 = \frac{2K}{3} \left(1 - \frac{R_0^3}{R_1^3}\right)$  des déformations plastiques apparaissent.

Si on augmente  $P_0$ , la sphère est plastifiée pour :  $R_0 \leq r \leq C$  ; la sphère est élastique pour :  $C \leq r \leq R_1$

Soit  $p$  la pression qui s'exerce sur le contour extérieur de la zone plastique ; on a :  $p = \frac{2K}{3} \left(1 - \frac{C^3}{R_1^3}\right)$

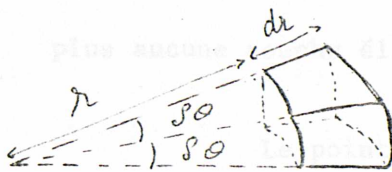
Dans la zone élastique, les contraintes et le déplacement sont donnés par :

$$\sigma_r = \frac{2K}{3} \frac{C^3}{r^3} \left(1 - \frac{R_1^3}{r^3}\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2K}{3} \frac{C^3}{r^3} \left(1 + \frac{R_1^3}{r^3}\right)$$

$$\xi = \frac{r}{3(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{2K}{3} \frac{C^3}{r^3}\right) + \frac{1}{4\mu} \left(\frac{2K}{3} \frac{C^3}{r^3}\right) \left(\frac{R_1^3}{r^2}\right)$$

Si on considère un petit élément dans la zone plastique limité par les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  et par deux dièdres orthogonaux entre eux, se coupant en  $O$  et d'angle  $\rho\theta$ .



Si on écrit que l'élément est un équilibre, par projection sur l'axe, on a :

on tire :  $\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$

Par ailleurs, on a :  $|\sigma_r - \sigma_\theta| = K$

pour  $r = C$  on a  $\sigma_r = -p < 0$  et  $\sigma_\theta > 0$

~~§~~

.../...

D'où  $\sigma_{\theta} = \sigma_r + K$

Par intégration, on obtient :  $\sigma_r = 2K \log r + \text{Constante}$

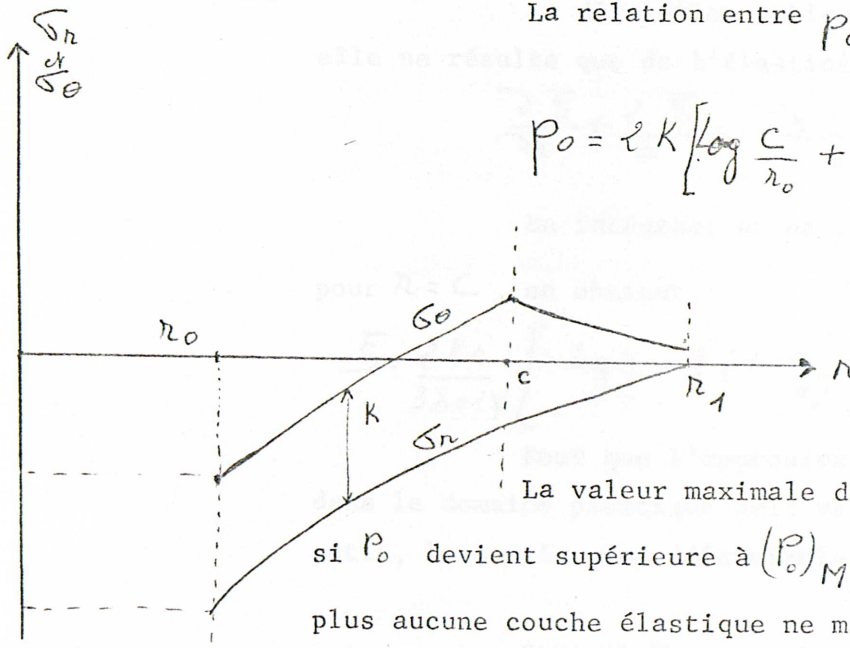
Mais  $\sigma_r$  est, continu en  $r = c$  , on peut ajuster la constante .

Dans la zone plastifiée, on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_r = 2K \left[ \log \frac{r}{c} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{c^3}{r^3} \right) \right] \\ \sigma_{\theta} = K + \sigma_r \end{cases}$$

La relation entre  $p_0$  et  $c$  est :

$$p_0 = 2K \left[ \log \frac{c}{r_0} + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{r_1^3}{c^3} \right) \right]$$



La valeur maximale de la pression est  $(p_0)_M = 2K \log \frac{r_1}{r_0}$

si  $p_0$  devient supérieure à  $(p_0)_M$  il y a destruction car plus aucune couche élastique ne maintient la zone plastifiée.

Le point  $(p_0)_M$  est un point d'instabilité, en effet si  $p_0 = (p_0)_M + \delta p_0$  pendant un court instant, il y a dilatation de l'enveloppe ;  $r_0$  devient  $r_0 + \delta r_0$  ,  $r_1$  devient  $r_1 + \delta r_1$  mais il n'y a pas augmentation de volume donc :  $\frac{\delta r_0}{\delta r_1} = \frac{r_1^2}{r_0^2}$

.../...

Après cette dilatation, la sphère ne supporte plus qu'une pression :

$$(P_0)'_n = 2K \left[ \log\left(\frac{r_1}{r_0}\right) - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{r_0^3}{r_1^3}\right) \right]$$

Nous n'avons pas encore défini le déplacement dans la zone plastifiée.

Les dilatations linéaires sont  $\frac{\partial \xi}{\partial r}$  sur le rayon vecteur et  $\frac{\xi}{r}$  sur ses normales.

La dilatation cubique a pour valeur :  $\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2}{r} \xi$  elle ne résulte que de l'élasticité, d'où :

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{2}{r} \xi = \frac{\sigma_r + 2\sigma_\theta}{3\lambda + 2\mu}$$

En intégrant et en exprimant que  $\xi$  est continu pour  $r = C$ , on obtient :

$$\xi = \frac{2Kr}{3\lambda + 2\mu} \left[ \log \frac{r}{C} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{C^3}{r^3}\right) \right] + \frac{Kc^3}{r^2} \left( \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \right)$$

Pour que l'approximation faite sur la petitesse de  $\xi$  dans le domaine plastique soit valable, il faut que  $\xi$  reste petit, le cas le plus défavorable correspond à :  $r = R_0$  et  $r_1 = C$ .

On voit donc que le terme  $K \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^3 \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$  doit être petit.

Ce n'est pas le cas pour une enceinte très épaisse et soumise à de fortes pressions.

... / ...

3/ Sphère parfaitement plastique, déformations finies

On désigne par  $r$  la distance actuelle d'un élément et par  $r_i$  sa distance initiale.

\* Cas où le coefficient de Poisson est égal à 1/2

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \frac{1}{2}$$

Il n'y a donc pas de variation de volume.

Pour deux rayons  $r$  et  $r'$  on a :  $(r_i^3 - r_i'^3) = (r^3 - r'^3)$

La différence  $r^3 - r_i^3 = u$  est donc indépendante de  $r_i$ .

Dans la région élastique, les déformations sont infiniment petites et on a :  $\xi = r - r_i = \frac{u}{3r_i^2}$ .

En utilisant les équations donnant  $\xi$  relatives à la sphère élastique, on obtient :  $u = \frac{2K}{3E} c^3$   
 $E$  est le module d'Young.

On confond  $r$  et  $r_i$  dans le domaine élastique, en particulier  $r_i = r_{i0}$ .

La formule du paragraphe précédent donnant  $P_0$  en fonction de  $c$  reste valable mais  $r_0$  etc représentent des variables d'Euler.

$$P_0 = \frac{2K}{3} \left[ \log \frac{c^3}{r_0^3 + u} + 1 - \frac{c^3}{r_1^3} \right]$$

$$\text{or : } u = \frac{3Kc^3}{3E} \Rightarrow \frac{dP_0}{du} = \frac{1}{4} - \frac{1}{r_0^3 + u} - \frac{2E}{3K r_1^3}$$

$$P_0 \text{ est maximum pour } u = \frac{1}{2} \sqrt{r_0^6 + \frac{6K}{E} r_0^3 r_1^3} - \frac{r_0^3}{2}$$

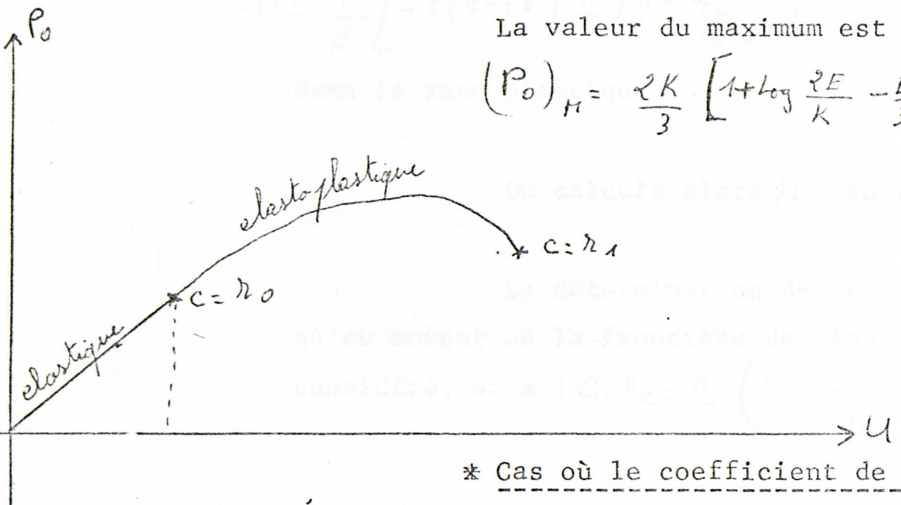
.../...

Cette valeur de  $u$  correspond à une valeur de  $C$  inférieure à  $r_1$ .

$P_0$  est maximum avant plastification complète.

La valeur du maximum est :

$$(P_0)_H = \frac{2K}{3} \left[ 1 + \log \frac{2E}{K} - \frac{E}{3K} \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^3 \left( \sqrt{1 + \frac{6K}{E} \frac{r_1^3}{r_0^3}} - 1 \right) \right] + \frac{2K}{3} \log \left[ \frac{\sqrt{1 + \frac{6K}{E} \frac{r_1^3}{r_0^3}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{6K}{E} \frac{r_1^3}{r_0^3}} + 1} \right]$$



\* Cas où le coefficient de Poisson  $\nu$  est différent de 1/2

On assimile  $C$  à un paramètre cinématique :  $dc = dt$

La variation de volume est élastique donc :

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = \frac{1-2\nu}{E} \frac{d(\sigma_r + 2\sigma_\theta)}{dt}$$

en notant

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dc}$$

Les équations du paragraphe précédent donnant  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  dans la zone plastifiée sont encore valables en variables d'Euler,

$$\text{donc } \sigma_r + 2\sigma_\theta = 6K \log \frac{r}{C} + 2K \frac{C^3}{r_1^3}$$

En négligeant  $\frac{3K}{E}$  devant 1 on obtient :

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = - \frac{6(1-2\nu)}{C} \frac{K}{E} \left( 1 - \frac{C^3}{r_1^3} \right)$$

.../...



$v$  est continue pour  $r = c$ , d'après le paragraphe précédent,

$$v = \frac{k}{E} \left( 1 + \nu + (2 - 4\nu) \frac{c^3}{r_1^3} \right) \quad \text{sur la limite de la zone élastique d'où :}$$

$$v = \frac{k}{E} \left[ -2(1 - 2\nu) \frac{r}{c} \left( 1 - \frac{c^3}{r_1^3} \right) + \frac{3(1 - \nu)c^2}{r^2} \right]$$

dans la zone plastique.

On calcule alors  $r$  en intégrant  $\frac{dr}{dc} = v$  pour  $r \leq c$

La détermination de la constante se fait en disant qu'au moment où la frontière de plasticité atteint l'élément considéré, on a :  $c = r_e = r_i \left( 1 + \frac{k(1 + \nu)}{3E} + \frac{2k}{3E} (1 - 2\nu) \frac{3r_i^3}{r_1^3} \right)$

cette égalité est la conséquence des résultats des calculs faits pour la zone élastique et donc sur sa frontière.

Dans la zone plastifiée, on trouve donc :

$$r^3 = r_e^3 \left( \frac{r_e}{c} \right)^{3\alpha} e^{\alpha \left( \frac{c^3 - r_e^3}{r_1^3} \right) + 3(1 - \nu) \frac{k}{E} c^{-3\alpha} e^{\frac{\alpha c^3}{r_1^3}} \int_{r_e^3}^{c^3} \gamma^\alpha e^{-\frac{\gamma}{r_1^3}} d\gamma}$$

avec  $\alpha = 2(1 - 2\nu) \frac{k}{E}$

On peut montrer que dans ce cas la pression limite  $(P_c)_M$  est également obtenue avant plastification totale.

.../...

4/ Cas de l'écroutissement

On suppose  $V = \frac{1}{2}$  de sorte que le volume se conserve.

$n = r_i^3 + u \Rightarrow n^2 dr = r_i^2 dr_i$  pour un élément de longueur  $dr_i$

Soit  $\epsilon = \text{Log} \left( \frac{dr}{dr_i} \right) = -2 \text{Log} \left( \frac{n}{r_i} \right)$

Soit  $\sigma = -F(-\epsilon)$  la relation déviateur de contrainte-déformation

$\sigma_\theta - \sigma_r = F \left( -\text{Log} \frac{dr}{dr_i} \right) = F \left( 2 \text{Log} \frac{n}{r_i} \right)$

L'équilibre d'un élément donne comme au paragraphe précédent :

$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$

$\Rightarrow \sigma_r = 2 \int_{r_1}^r \frac{F \left( 2 \text{Log} \frac{n}{r_i} \right)}{r} dr$  ( $r_i$  est une fonction de  $r$ )

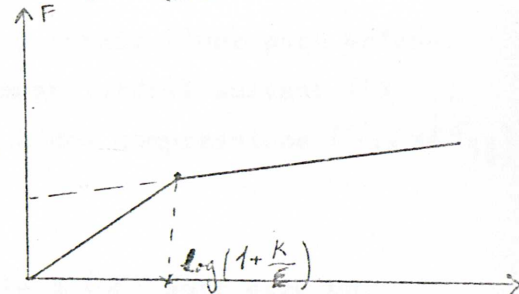
$P_0 = 2 \int_{r_0}^{r_1} \frac{F \left( 2 \text{Log} \frac{n}{r_i} \right)}{r} dr$

$\Rightarrow P_0 = 2 \int_{r_{0i}}^{r_{1i}} \frac{F \left( \frac{2}{3} \text{Log} \left( 1 + \frac{u}{r_i^3} \right) \right)}{1 + \frac{u}{r_i^3}} \frac{dr_i}{r_i}$

$P_0$  est fonction du paramètre cinématique  $u$

Soit  $F(z) = \begin{cases} E'z & \text{si } z < \text{Log} \left( 1 + \frac{K}{E} \right) \\ K' + E'z & \text{si } z > \text{Log} \left( 1 + \frac{K}{E} \right) \end{cases}$

avec :  $K' = (E - E') \text{Log} \left( 1 + \frac{K}{E} \right)$



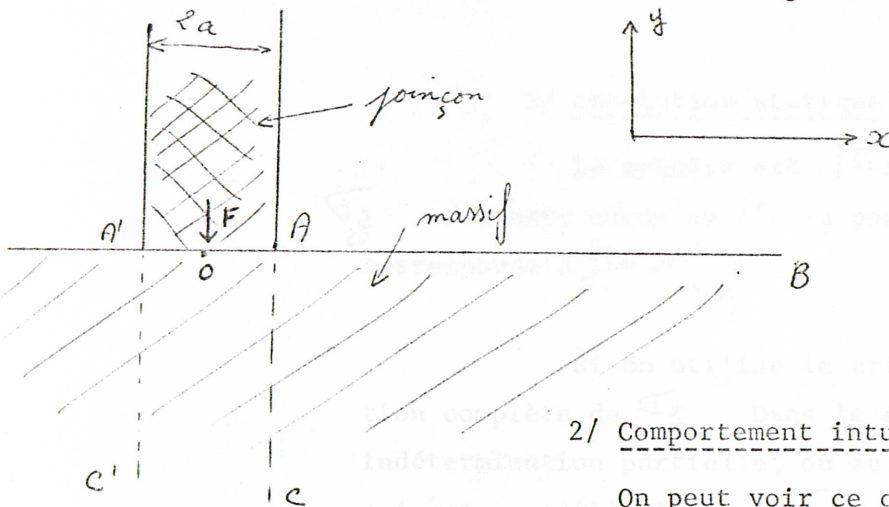
Le rayon tel que  $\text{Log} \left( \frac{n}{r_0} \right)^2 = \text{Log} \left( 1 + \frac{K}{E} \right)$  est la frontière élastoplastique. Dans le cas où  $E' < \frac{3K}{\epsilon}$  on montre que  $P_0$  est maximale avant que la plastification soit complète.

.../...

B/ Poinçonnement d'un massif semi-infini

1/ Présentation du Problème

Soit un massif semi-infini (rigide parfaitement plastique) poinçonné par un poinçon plat sans frottement et infiniment rigide. Le poinçon a pour largeur  $2a$ , il est infini suivant l'autre dimension (voir figure)



L'axe des  $z$  est orthogonal au plan de coupe.

2/ Comportement intuitif du système

On peut voir ce qu'il se passerait si le massif était très légèrement élastique.

Dans les zones  $B'A'C'$  et  $BAC$  il y aurait un déplacement latéral suivant  $Ox$ , ces zones seraient en compression (d'où un  $\sigma_{xx}$  négatif).

Dans la zone  $AC'AC$ , il y aurait d'une part enfoncement parallèlement à  $Oy$  et déplacement latéral suivant  $Ox$ , ces deux déplacements correspondraient à des compressions ( $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  positifs).

Le déplacement parallèle à  $Oz$  doit être nul (il n'y a aucune raison qu'il se fasse plutôt vers les  $z$  positifs que vers les  $z$  négatifs et on peut supposer le déplacement parallèlement à  $Oz$  maintenu nul à l'infini).

.../...

Nous avons donc  $\xi_3 = 0$  quand on se trouvera sur la frontière élastoplastique, on aura  $\xi_3 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \xi_3} = 0$  d'où on peut tirer  $\sigma_{33}$ .

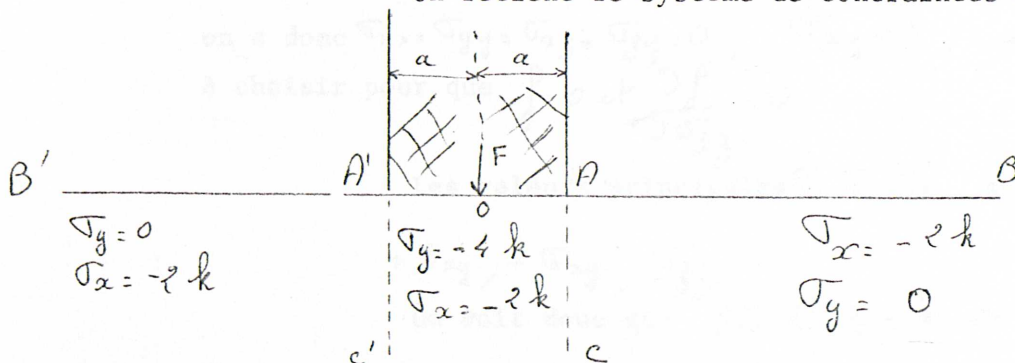
Par raison de symétrie  $\sigma_x, \sigma_y$  et  $\sigma_z$  doivent être parallèles aux directions principales des contraintes.

### 3/ Résolution statique

Le critère est  $|\sigma_x - \sigma_y| \leq r k$ , la contrainte  $\sigma_z$  s'ajuste comme on l'a vu pour que le point  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  corresponde à  $f=0$  et  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_z} = 0$ . Ce qui est possible si  $|\sigma_x - \sigma_y| \leq r k$ .

Si on utilise le critère de Misés, il y a détermination complète de  $\sigma_z$ . Dans le cas du critère de Tresca, il y a indétermination partielle; on se trouve sur le côté de l'hexagone qui est parallèle à l'axe  $\sigma_z$ .

On retient le système de contraintes suivant :



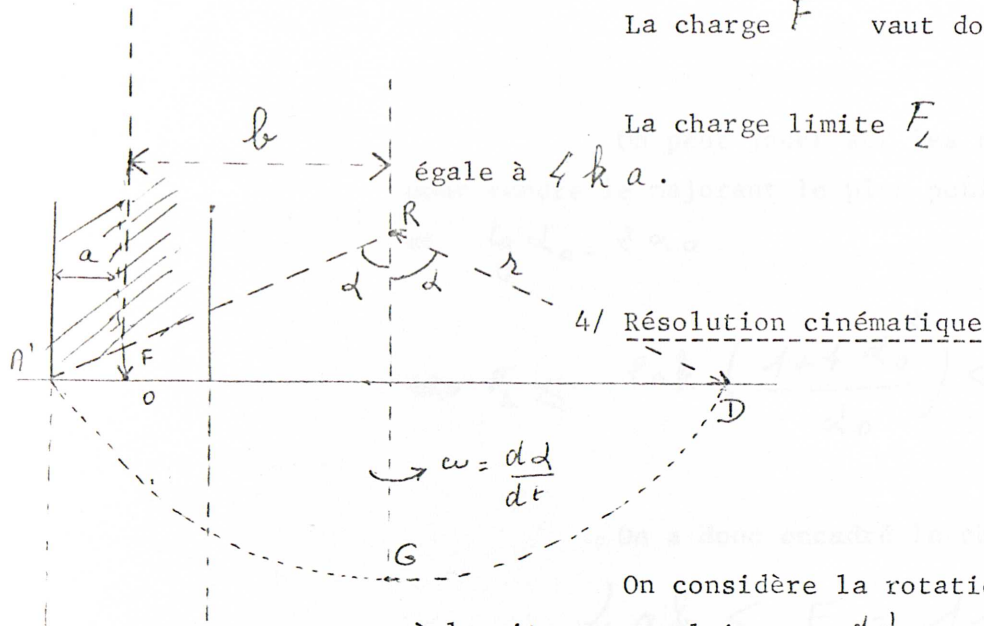
Le système est bien licite car

- il est en équilibre
- il satisfait partout aux conditions, aux limites
- il ne viole pas le critère  $|\sigma_x - \sigma_y| \leq r k$ .

.../...

La charge  $F$  vaut donc  $4ka$

La charge limite  $F_2$  est donc supérieure ou égale à  $4ka$ .



$$RD = RA' = r$$

On considère la rotation en bloc autour du point  $R$  à la vitesse angulaire  $\omega = \frac{dd}{dt}$  du bloc  $A'GD$ .

Cette rotation se fait en glissant le long de  $A'GD$  le reste du massif reste immobile.

La puissance du chargement est  $Fb\omega$

En  $A'$  par exemple, nous avons un cisaillement, on a donc  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = 0$ ,  $\sigma_{xy} \neq 0$  et  $\sigma_{zz}$  à choisir pour que  $f = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}} = 0$

Les valeurs principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont égales à  $+\sigma_{xy}, -\sigma_{xy}, \sigma_{zz}$

$$\text{On voit donc que } |\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2k \Rightarrow |\sigma_{xy}| \leq k$$

Le cisaillement maximal est donc  $k$ .

La puissance dissipée a pour valeur :  $krc\omega$  et  $r$

$$\text{on } r = (a+b) \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow F = \frac{2 k \alpha \omega (a+b)^2}{b \sin^2 \alpha} \geq F_L$$

On peut jouer sur les paramètres  $b$  et  $\alpha$  pour rendre le majorant le plus petit possible. On trouve  $b=a$  et  $\tan \alpha_0 = 2 \alpha_0$

$$\Rightarrow F_L \leq 2ak \left( \frac{1+4\alpha_0^2}{\alpha_0} \right) < 12ak.$$

On a donc encadré la charge limite par :

$$4ak \leq F_L \leq 12ak.$$

## VI - Possibilités de réglementation

### A) Position du problème

Jusqu'à présent nous avons présenté les théories reposant sur l'élasto-plasticité ; ces théories sont plus proches de la réalité physique que la théorie de l'élasticité pure.

Si on pouvait tenir compte de ces théories dans la réglementation concernant les enceintes à pression, les normes de sécurité seraient sensiblement améliorées (élagage des coefficients de sécurité inutiles par exemple des coefficients dits d'ignorance ou renforcement de certains coefficients trop faibles).

Jusqu'à présent sauf dans des cas simples (sphère ou cylindre) on ne pouvait résoudre les équations d'élasto-plasticité. Il était donc impossible d'appliquer un quelconque règlement faisant intervenir ces équations.

A présent, le problème est fondamentalement transformé, en effet si on ne sait toujours pas définir de solutions analytiques dans le cas général, on sait par contre trouver grâce aux ordinateurs des solutions numériques aux problèmes posés.

### B) La résolution numérique

#### 1) Cas du solide élasto-plastique

On suppose connues les caractéristiques du métal : coefficients de Lamé, coefficients d'érouissage ou plasticité parfaite, critère d'élasticité (en général Tresca pour le calcul numérique), densité, ...

Il convient de tenir compte du mode de chargement (on sait que l'histoire de l'édifice influe sur sa limite de rupture).

En ce qui concerne les enceintes à pression on ne prend en considération que les modes de chargements proportionnels (Si les forces extérieures sont  $F_1 \dots F_m$  elles ne peuvent que prendre les valeurs  $\lambda F_1 \dots \lambda F_m$  avec  $\lambda$  quelconque mais identique pour toutes les  $F_i$ ).

Cette hypothèse est logique, en effet de par son essence même, une force de pression ne peut être que proportionnelle à moins de considérer deux enceintes non communicantes et juxtaposées.

Dans le cas où les déplacements sont petits on peut utiliser directement des relations du type Prandtl Reuss ; il faut néanmoins rester prudent car comme on l'a vu dans l'exemple de la sphère il arrive fréquemment que les déformations soient importantes.

...

Dans le cas général on peut utiliser en variable d'Euler -

- soit les équations directes sur l'écoulement

- soit les équations sur les vitesses (le temps étant ici comme nous l'avons vu un paramètre de calcul).

Il faut convenir que l'introduction du temps et le passage aux vitesses apportent peu de chose à la résolution des calculs.

En tout état de cause dans les deux cas, la résolution sera obtenue par la méthode d'analyse numérique dite "des éléments finis".

La méthode des éléments finis

Elle consiste à découper l'enceinte en petits octaèdres et à calculer le comportement de chacun d'eux si on fait passer par étapes la pression de zéro à P.

La justification du découpage en octaèdres est une conséquence de la théorie de Galerkin :

Si on cherche une fonction  $\sigma^*$  sur un espace vectoriel H de dimension infinie dénombrable telle qu'une fonction  $I(\sigma)$  soit minimale pour  $\sigma = \sigma^*$ , on obtient une série convergente  $\sigma_n^*$  vers  $\sigma^*$  en résolvant le problème dans des espaces vectoriels de dimension finie n, contenus dans H :

$H_n$  de dimension n est tel que  $H_n \subset H_{n+1} \subset H$   
Dans  $H_n$  on trouve  $\sigma_n^*$  tel que  $I(\sigma_n^*)$  soit minimal dans  $H_n$   
~~Dans  $H_n$~~  si  $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \sigma_n^* \rightarrow \sigma^*$

Supposons l'état de l'enceinte connu pour une pression P si on applique une surpression petite dP en supplément, les équations d'écoulement permettent de calculer  $d\sigma$  et  $d\bar{u}$  dans chaque octaèdre (on fait une approximation de  $d\sigma$  et  $d\bar{u}$  en prenant successivement un nombre n d'octaèdres n = 1 à N, N correspondant à la précision désirée). On connaît donc ainsi l'état correspondant à la pression P + dP, on réitère alors l'opération.

La précision du calcul est d'autant meilleure que N et  $\frac{1}{dP}$  sont élevés.

Remarque : L'espace vectoriel des points de l'enceinte a la puissance du continu mais on sait qu'une fonction continue sur  $R^3$  est connue à partir du moment où on la connaît sur  $Q^3$  (Q est le corps des rationnels et est donc dénombrable). On applique le même raisonnement aux points de l'enceinte.

Remarque : Si l'enceinte n'est pas trop épaisse on peut également appliquer la théorie des coques. L'inconvénient de cette théorie est que l'on ne connaît pas exactement les conséquences de l'approximation faite.



2) Cas des charges limites

On dispose dans ce cas des relations variationnelles de Hill et Markov, ce sont des moyens de calcul très puissants.

- dans les cas où on le peut on cherchera la charge limite  $F_L = \lambda_L f$  en résolvant une relation variationnelle de Hill ou de Markov dans le cas limite correspondant à l'égalité ;
- Dans les autres cas on se contentera d'encadrer la valeur  $\lambda_L$  par  $\lambda_H \leq \lambda_L \leq \lambda_M$   
 $\lambda_H$  correspondant à une solution de contraintes licites (Hill)  
 $\lambda_M$  correspond à une solution de vitesses licites (Markov)

C) Possibilités de réglementation

1) Généralités :

Le choix de coefficients de sécurité est nécessairement arbitraire dès qu'il ne repose plus entièrement sur des raisonnements physiques.

A ce choix on peut opposer la notion de règle de sécurité, une règle de sécurité dérivant directement d'une théorie physique. Comme on peut faire de nombreuses théories (par exemple : rigidité, écrouissage, plasticité parfaite...) on a donc encore le choix parmi plusieurs règles.

Exemple : En théorie de l'élasticité on montre qu'une barre est détruite pour une force supérieure à  $f_E$

En théorie de l'élasto-plasticité cette force est  $f_P$

On a donc le choix entre deux règles  $\begin{cases} F \leq f_E \\ F \leq f_P \end{cases}$

On peut également penser qu'il faut être absolument certain que la barre résiste à la force  $F$  même si une impureté existe dans le métal ou on peut penser que les théories ne représentent pas avec une fidélité satisfaisante la réalité physique.

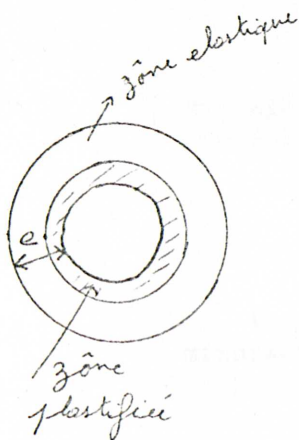
On est donc amené à imposer un coefficient de sécurité supplémentaire  $k$  à la règle retenue :  $F \leq k f_E$  ou  $F \leq k f_P$  avec  $1 \geq k \geq 0$

Le coefficient de sécurité  $k$  est donc un coefficient d'imperfection qui doit tenir compte de faits plus ou moins prévisibles,  $k$  sera choisi d'autant plus petit que l'on veut être certain de la non rupture de l'édifice. Dans ce qui suit je ne m'intéresserai plus qu'aux règles de sécurité.

Pour le choix d'une règle de sécurité on peut ou non combiner plusieurs règles différentes ;

par exemple :  $F \leq \sup \{ f_E, f_P \}$   
ou  
 $F \leq \inf \{ f_E, f_P \}$

Le seul impératif est que les critères intervenant dans la règle de sécurité doivent être cohérents entre eux.



2) Cas du solide élasto-plastique avec ou sans écrouissage

Soit un point M à la surface de l'enceinte, celle-ci a une épaisseur e en M

zone élastique

zone plastifiée

Soit  $e_p$  l'épaisseur de la zone plastifiée en M.

On peut choisir la règle suivante :

en tout point :  $e_p \leq k e$ .  $0 \leq k \leq 1$  pour tout M de la surface.

$k = 0$  correspond au cas où on désire que toute l'enceinte reste élastique.

$k = 1$  correspond au cas où on ne veut pas que des points extérieurs de l'enceinte dépassent le seuil d'élasticité.

Si le métal est très écrouissable on pourrait prendre  $k > 1$ .

3) Limitation sur les pressions

Soit  $P_p$  la pression maximum telle que les points extérieurs de l'enveloppe soient tous dans le domaine élastique.

On peut choisir la règle :  $P \leq k P_p$

Si  $k = 1$  on a la même règle que dans le paragraphe ci-dessus.

Si  $k \neq 1$  nous avons une règle globale par opposition au cas précédent où la règle était locale ; il fallait l'appliquer à chaque point de la surface de l'enceinte.

4) Limitation sur les élongations

Soit un point N de l'enceinte.

Le déplacement  $\vec{s}$  du point N se décompose en partie élastique  $\vec{s}_e$  et en partie plastique  $\vec{s}_p$

La règle de limitation des élongations sera :  $|\vec{s}_p| \leq k |\vec{s}_e|$

C'est une règle locale, pour tout N

La valeur  $k = 0$  correspond au cas où toute l'enceinte reste dans le domaine élastique.

5) Cas des charges limites, solide rigide plastique

Soit  $P_h$  le plus grand minorant connu de la pression limite  $P_L$

On peut imposer la règle globale suivante :

$$P \leq k P_H$$

...

6) Autre règle dans le cas des charges limites

Soit  $( f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) ) - 1 = 0$  l'équation donnant la limite de rigidité avec  $( f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) ) - 1 < 0$  et  $f(0, 0, 0) = 0$  dans le domaine rigide.

Soit  $P_H$  le plus grand minorant de la pression limite  $P_L$ .

Si on considère un matériau dont le critère de rigidité soit  $( f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) ) - k = 0$  avec  $0 \leq k \leq 1$  on définit  $P_H^k$  le plus grand minorant de la pression limite  $P_L^k$ .

On peut imposer la règle globale :

$$P \leq P_H^k$$

D) Conclusion

J'ai présenté dans ce dossier les différentes approches possibles de l'étude des enceintes sous pression en théorie élasto-plastique :

- solide élastique avec écrouissage
- solide élastique à plasticité parfaite
- solide rigide plastique
- charges limites.

Cette étude n'est bien entendu pas exhaustive, son but est de présenter les bases d'une éventuelle transformation des règlements de sécurité concernant les enceintes à pression.

A la fin du dossier j'ai exposé quelques unes des règles qui me paraissent les plus logiques. On peut en trouver d'autres qui seront peut-être meilleures. Cependant si on veut établir de nouvelles règles il faut absolument créer quelque chose de neuf et non pas essayer d'adapter des règles qui ont été conçues pour d'autres théories.

L'évolution du code américain ASME III me paraît à cet égard symptomatique. On a rajouté par endroits des règles dérivant de la plasticité pour finalement obtenir un ensemble assez disparate et sans support autre qu'empirique.

Une nouvelle réglementation française doit donc être conçue globalement et non pas être un replâtrage de l'ancienne réglementation (basée sur l'élasticité linéaire) ou une adaptation du code ASME III (qui est déjà lui-même une adaptation plus ou moins heureuse).