Etablissement et calibration d'un modèle mécanique simplifié pour un sable artificiellement cimenté

William Hilth, David Ryckelynck

▶ **To cite this version:**

William Hilth, David Ryckelynck. Etablissement et calibration d'un modèle mécanique simplifié pour un sable artificiellement cimenté. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01815751

HAL Id: hal-01815751

https://minesparis-psl.hal.science/hal-01815751

Submitted on 14 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Etablissement et calibration d'un modèle mécanique simplifié pour un sable artificiellement cimenté

W. Hilth[1], D. Ryckelynck[1]

[1] *Mines ParisTech, PSL Research University, MAT - Centre des matériaux,*
CNRS UMR 7633, BP 87 91003 Evry, France , {william.hilth,david.ryckelynck}@mines-paristech.fr

Résumé — Nous proposons un modèle numérique d'essais in situ sous tomographe réalisés sur un agrégat de sable lié par une résine polymère. Un modèle hyper-réduit est généré à partir des champs de déplacement issus de la tomographie, préalablement complétés et lissés par une méthode Gappy POD. Cette approche permet une calibration d'un modèle Cemented Clay and Sand Model (CCASM) afin de reproduire la localisation des déformations avant rupture.
Mots clés — Sable cimenté, hyper-réduction, Calibration, Calculs 3D

1 Introduction

Le sable lié par de la résine polyuréthane est utilisé en fonderie afin de mouler les cavités internes de pièces telles que des culasses ou des traverses. A la fin de la solidification, les noyaux sont évacués par un procédé appelé débourrage, consistant à un martelage provoquant une fragmentation progressive des noyaux. Nous développons un modèle de comportement permettant de prévoir la localisation des déformations annonciatrices de la rupture des noyaux en sable. Ce modèle doit être raisonnablement simple pour permettre des simulations numériques en usine de cas anormaux de débourrage, tout en prévoyant la taille des fragments des noyaux de fonderie.
Le comportement mécanique des noyaux possède à la fois les caractéristiques des matériaux frictionnels comme le sable mais aussi celui de matériaux cohésifs comme les argiles du fait de la cimentation artificielle. La littérature se compose essentiellement d'études industrielles faisant varier le type de résine, le taux de résine ou le sable lors d'essais mécaniques standards (compression triaxiale ou flexion).
Concernant la modélisation, on dénombre quelques publications se plaçant à l'échelle microscopique et utilisant la Discrete Elements Method [1, 2]. De même, il existe une assez vaste littérature se consacrant à des modèles macroscopiques de sables seuls, de complexité variable. Citons à titre d'exemple le critère de Mohr-Coulomb, de Drucker-Prager [3], Modified Cam-clay [4, 5, 6], Revised Cam-clay [7] ou le Clay And Sand Model (CASM) [8]. Cependant, ces modèles-ci ne permettent pas de prendre en compte la cimentation du sable ou son évolution. Les modèles de cimentation sont très restreints et se situent essentiellement dans le cadre fixé par Gens et Nova en 1993 [9] : voir par exemple le CASM-n [10] ou le Cemented Clay And Sand Model (CCASM) [11, 12].
La démarche de cette étude consiste à établir un modèle macroscopique du comportement du noyau de fonderie. On se place dans le cadre de la mécanique des sols à état critique [5, 13]. On simplifie cependant notre modèle en considérant une élasticité linéaire et non pas un modèle hypoélastique.
Les résultats obtenus avec le modèle sont ensuite comparés à des essais standards réalisés en laboratoire sur les noyaux (on se focalisera ici uniquement sur les essais de compression uniaxiale). Afin de compléter cette étude, on exploite des essais de compression uniaxiale observés en tomographie effectué à l'INSA de Lyon dont on extrait des champs de déplacement afin de les imposer comme conditions de Dirichlet à d'un modèle mécanique. Cette étude permet d'évaluer l'impact et la pertinence des paramètres sur les faciès de rupture simulés. La littérature actuelle se focalise principalement sur des comparaisons de courbes macroscopiques d'essais et de simulations. Cependant, avec un matériau ayant un fort comportement adoucissant en cisaillement et donc des bandes de localisation, il est difficile d'exploiter de manière pertinente une courbe mettant en jeu des déformations (totales ou plastiques) ou les contraintes étant donné que ces grandeurs deviennent vite inhomogènes dans l'échantillon. La simulation doit rendre

compte de la localisation des déformations mesurées par correlation d'image des champs de déplacement issus de la tomographie. Le contraste des grains suffit ici à mettre en oeuvre cette corrélation d'image. Par ailleurs, les champs de déplacement permettent de construire un modèle hyper-réduit de l'essai de compression in situ, dont la complexité numérique se situe entre un calcul par éléments finis et un calcul à champ de déplacement complètement piloté par les mesures. Cette réduction du modèle de l'essai de compression permet une première calibration rapide des coefficients de la loi de comportement, sans recours à la simulation par éléments finis. Si nécessaire, celle-ci peut ensuite être affinée à l'aide de simulations par éléments finis. L'objectif final d'un tel modèle est la prévision des faciès de rupture du matériau lors du débourrage.

2 Modèle

2.1 Surfaces de charge et d'écoulement

Le modèle constitutif élastoplastique se base sur le Clay And Sand Model développé par Yu [8] et le modèle de cimentation mis au point par Gens et Nova [9]. Un tel modèle s'inscrit dans la lignée du Cemented Clay And Sand Model [11, 12] appliqué notamment à des sables naturellement cimentés. De plus, il se place dans le cadre de la mécanique des sols à état critique : on considère qu'il existe un seuil M où lors d'un chargement triaxial :

— Pour $\frac{q}{p+p_t} > M$: le noyau se contracte
— Pour $\frac{q}{p+p_t} = M$: le noyau se déforme à volume constant
— Pour $\frac{q}{p+p_t} < M$: le noyau se dilate

où l'on a noté q la contrainte de von Mises, p la pression hydrostatique et p_t la pression de résistance à la traction.
La cimentation est décrite par un paramètre scalaire b. Au cours de l'endommagement du matériau, b diminue. Ce paramètre tient compte de ponts de polymère entre les grains de sable et a pour effet d'agrandir la surface de charge et autoriser une résistance à la traction. On suppose que la forme de la surface de charge du sable cimenté est la même que celle du sable seul. L'agrandissement de la surface de charge est pilotée par les pressions hydrostatiques de compression et de traction :

$$p_o = p_c(1+b)$$
$$p_t = \alpha b p_c$$

où p_c, pression de préconsolidation, correspond à la pression maximum admissible en compression hydrostatique du sable seul. Cette grandeur permet de prendre en compte le comportement frictionnel du matériau tandis que le paramètre de cimentation modélise le comportement cohésif. α est un paramètre scalaire constant permettant de prendre en compte la résistance à la traction apportée par la cimentation. La surface de charge de ce modèle est :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}; p_c, b) = \left(\frac{q}{M(p+p_t)}\right)^n + \frac{1}{\ln r}\ln\left(\frac{p+p_t}{p_c(1+b)+p_t}\right)$$

Une représentation de la surface de charge est disponible en Figure 1. La courbe bleue représente la surface de charge pour le sable seul ($b = 0$), la courbe rouge met en évidence les modifications dues à la cimentation. La surface de charge peut se subdiviser en deux parties :

— Une partie quasiment linéaire, de pente M, rappelant notamment le critère de Drucker-Prager
— Une clôture hydrostatique elliptique pour les pressions hydrostatiques plus grandes

Cette allure de surface de charge ne diffère pas, en soit, de celle du critère de Drucker-Prager Cap [14]. Cependant, la formulation développée pour le Clay And Sand Model a l'avantage de définir une seule surface de charge avec une formulation mathématique relativement simple.

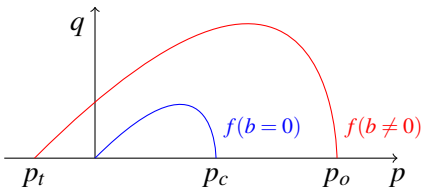


FIGURE 1 – Surface de charge dans le plan (p,q)

Comme dans [15, 12], on considère un écoulement non associé. La surface d'écoulement se déduit de la relation de Rowe reliant la déformation plastique volumique ε_v^p à la déformation plastique de cisaillement ε_s^p :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_s^p} = \frac{9(\frac{M}{m} - \frac{q}{p+p_t})}{9 + 3\frac{M}{m} - 2\frac{M}{m}\frac{q}{p+p_t}}$$

La fonction d'écoulement fait intervenir un nouveau paramètre $m > 1$ qui sert à atténuer l'effet de M dans le domaine plastique. En effet, le paramètre M peut être relié à l'angle de friction ϕ du critère de Drucker-Prager. Cependant, le critère de Drucker-Prager est généralement utilisé avec une formulation non associée, utilisant un second angle, appelé angle de dilatation β, de moindre valeur. Cette non-associativité principalement motivée par le fait que l'angle de friction est trop élevé et tend à surestimer les variations de volume en plasticité [15].

2.2 Evolution des variables d'écrouissage et d'endommagement

Ce modèle comporte une variable d'écrouissage, p_c, et une variable d'endommagement, h, assurant une décroissance de b. L'évolution de p_c obéit à l'équation classique de la mécanique des sols à état critique :

$$\frac{\dot{p_c}}{p_c} = \frac{v_0}{\lambda - \kappa}\dot{\varepsilon}_v^p$$

où v_0 est le volume spécifique initial et λ et κ les coefficients de compressibilité du sable. L'évolution de p_c est donc directement dépendante des variations volumiques de l'échantillon. Par exemple, une dilatation entraîne une augmentation de p_c.
Le paramètre de cimentation b dépend quant à lui de manière exponentielle à la déformation plastique cumulée d'endommagement h, avec :

$$b = b_0 e^{-h}$$
$$\dot{h} = h_0|\dot{\varepsilon}_v^p| + h_1|\dot{\varepsilon}_s^p|$$

où h est pilotée par les déformations plastiques. Les paramètres h_0 et h_1 permettent de prendre en compte la sensibilité relative au cisaillement ou aux déformations plastiques volumiques.
Il est à noter qu'il y a une compétition entre le comportement frictionnel et le comportement cohésif du matériau. Ce dernier provoque uniquement un adoucissement mais en cas de comportement dilatant, il y a compétition entre la diminition de b et l'augmentation de p_c.

Du fait de la rupture ou de la dégradation des ponts de résine entre les grains, on observe une diminition du module effectif d'élasticité. On écrit classiquement :

$$E = E_{ini}(1 - D)$$

avec D paramètre d'endommagement. Nous proposons une loi d'évolution de D dépend uniquement de la cimentation :

$$D(b; k_0, k_1) = 1 - \frac{\sinh(k_0(b - k_1)) + \sinh(k_1 k_0)}{\sinh(k_0(b_0 - k_1)) + \sinh(k_1 k_0)}$$

Où k_0 et k_1 sont des paramètres mathématiques constants. L'évolution de D en fonction de b/b_0 est tracée en Figure 2. Pour b proche de b_0, la perte de raideur est assez rapide puis finit par se ralentir. On a considéré ici que l'endommagement du matériau est uniquement dû à la perte de cimentation, c'est-à-dire à la décohésion du matériau. On ne considère donc pas de mécanisme d'endommagement des grains de sable eux-mêmes.

Cette loi est basée sur des essais de compression uniaxiale cyclée où on a estimé la perte de raideur au cours du chargement. Cette loi est purement empirique.

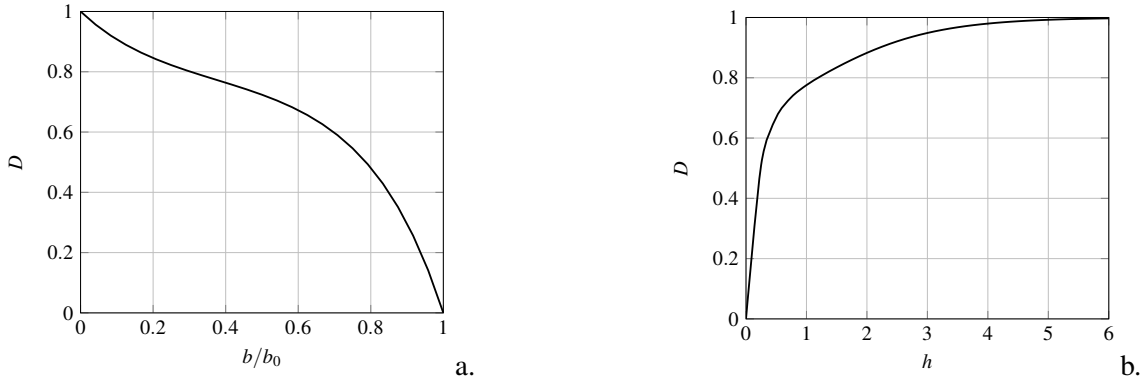


FIGURE 2 – Evolution de D en fonction de : a. b/b_0, b. h

3 Exploitation d'un essai de compression uniaxiale observé en tomographie

3.1 Motivations

Afin de modéliser au mieux les faciès de rupture du matériau lors de la compression uniaxiale, des observations au tomographe ont été menées sur une éprouvette parallélépipédique en collaboration avec le laboratoire Mateis de l'INSA de Lyon. Elles ont permis de déterminer les champs réels de déplacement dans l'échantillon au cours du temps. Ces données servent ensuite de conditions de Dirichlet et de modes de base réduite pour la simulation d'essais de compression afin de permettre une meilleure calibration des paramètres. La vérification des paramètres calibrés est réalisée par un calcul mécanique 3D à conditions limites issues de la tomographie.
Par corrélation d'images, on obtient un champ de déplacement contenant $l_x \times l_y \times l_z \times l_t$ points, où l'axe z est la direction de compression. Pour plus de détails sur la méthode de corrélation d'images utilisée, voir [16, 17]. Cependant, les champs de déplacement obtenus par tomographie se sont révélés bruités et incomplets du fait d'une corrélation d'image ne pouvant pas déterminer le champ complet à si faible magnitude de déplacement. Une méthode de reconstruction basée sur les méthodes de Gappy POD [18, 19] a donc été développée pour reconstruire de manière efficace ces champs. Cette méthode a aussi l'avantage de permettre un lissage des données et donc de diminuer le bruit assez présent en début d'essai.

3.2 Brève description de l'algorithme de reconstruction

Contrairement à une approche consistant à compléter le champ de déplacement à chaque pas de temps, on considère un champ lacunaire comme dépendant de la position et du temps. La philosophie derrière ce point de vue est la suivante : considérons un point d'un palier donné où l'information est manquante. La première idée consiste à considérer les voisins de ce point et d'interpoler. Cependant on peut aussi regarder ce même point aux autres paliers et constater que l'information est présente. Il est possible ainsi de prendre en compte les valeurs du champ de déplacement aux autres paliers, qui sont aussi pertinentes que celles des voisins.
Le coeur de l'algorithme de reconstruction Gappy POD est le suivant :

1. Construire une base de données de m points où l'information est connue à tout temps à une position (x,y,z) donnée appelés snapshots
2. Construire une base POD V de cette base de données
3. Pour les points où l'information est manquante, utiliser la base V pour reconstruire le déplacement

4. Enrichir la matrice de snapshots avec les nouveaux points ajoutés et continuer la procédure jusqu'à compléter le champ

Les données sont stockées dans une matrice ayant $l_x \times l_y$ colonnes et $l_z \times l_t$ lignes. Les snapshots correspondent aux déplacements aux différents plans (x, y) au cours du temps dans l'épaisseur de l'échantillon. Un exemple de plan reconstruit est représenté en Figure 3.

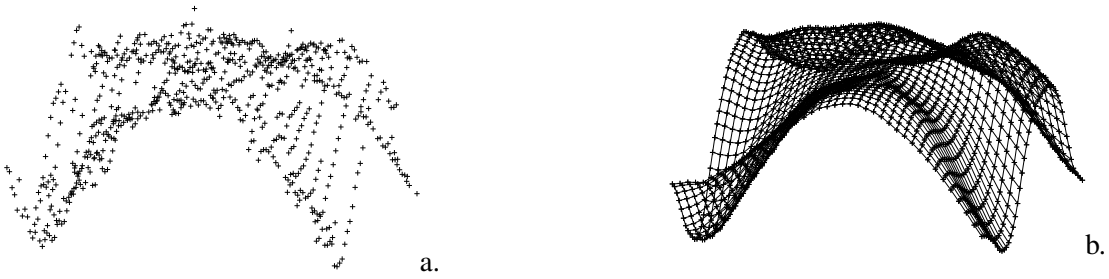


FIGURE 3 – a. Champ avant reconstruction, b. Champ après reconstruction

3.3 Modèle hyper-réduit de l'essai de compression

Dans le but d'extraire une base réduite des champs issus de la tomographie, on applique à nouveau la méthode POD afin de séparer les variables d'espace et de temps. Le maillage utilisé pour la simulation de l'essai de compression correspond à la pixellisation de l'éprouvette. On note $\mathbf{Q}$ la matrice des valeurs nodales des champs lissés par la Gappy POD. Chaque colonne de $\mathbf{Q}$ est un champ complet correspondant à un niveau de chargement. La base réduite notée $\mathbf{V}$ est obtenue par la décomposition aux valeurs singulières de $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}\,\mathbf{S}\,\mathbf{W}^T$$

où $\mathbf{S}$ est la matrice diagonale des valeurs singulières et $\mathbf{W}$ la matrice des vecteurs propres à gauche. Connaissant le champ expérimental lissé en tout point du maillage, nous en déduisons également une base réduite des champs de déformation par la méthode POD. En appliquant la méthode DEIM [20] à la base réduite des déplacements et à celle des déformations nous obtenons une liste de points d'interpolation dans le maillage. Un domaine réduit d'intégration est constitué en rassemblant les éléments connectés à tous les points d'interpolation. A ce maillage on rajoute une zone d'intérêt autour de la zone de localisation des déformations constatée expérimentalement. Du fait de la réduction du maillage, seule une partie des résidus du modèle éléments finis est accessible pour établir la formulation des équations hyper-réduites. Cette notion de résidus accessibles s'explique par le choix de conditions aux limites de type Dirichlet à l'interface entre le maillage réduit et la maillage complet [21]. On note $\mathbf{r}$ le résidu des équations d'équilibre éléments finis. On note $\mathcal{F}$ la liste des degrés de liberté non connectés aux éléments hors du maillage réduit. Soit Ω le domaine occupé par le maillage complet. Soit Ω_Z le domaine occupé par le maillage réduit. On en déduit $\mathcal{F}$ par :

$$\mathcal{F} = \left\{ i = 1, \ldots, \mathcal{N} | \int_{\Omega \setminus \Omega_Z} \varphi_i^2 \, d\Omega = 0 \right\}$$

où $\mathcal{N}$ est le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis et φ_i sa $i^{\text{ème}}$ fonction de forme. La formulation hyper-réduite des conditions d'équilibre s'écrit : trouver $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^N$ tel que,

$$\sum_{i \in \mathcal{F}} v_{ik} r_i(\mathbf{V}\boldsymbol{\gamma}) = 0 \quad \forall k = 1, \ldots, N$$

où N est le nombre de modes de déplacement issus de la tomographie et v_{ik} la composante en ligne i et en colonne k de ces modes. Le nombre d'équations à résoudre est $N \ll \mathcal{N}$ et l'intégration de la loi de comportement n'est effectuée que sur Ω_Z. Si on substitue la matrice identité à $\mathbf{V}$, alors le domaine réduit couvre tout le domaine et l'on obtient le modèle éléments finis complet. Il s'agit donc bien d'un modèle simplifié de l'essai de compression.

4 Validation

4.1 Compression uniaxiale idéalisée

La pertinence du modèle est évaluée par rapport à un essai de compression uniaxiale idéalisée où le déplacement a été imposé. La Figure 4 montre les courbes contrainte-déformation. Le modèle ne prévoit pas de durcissement pré-pic, et ne permet donc pas de modéliser cette première phase de plasticité. On a considéré ici le matériau comme élastique jusqu'au pic. Une modification du modèle avec des approches multi-surfaces (une pré-pic et une post-pic) est envisageable (voir par exemple [7]).
La démarche de calibration est similaire à celle décrite par Rios et al. [12] en exploitant des essais de compression uniaxiale, des essais de flexion 3 points et des essais de die pressing.

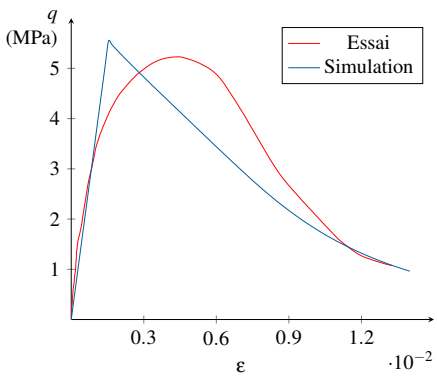


FIGURE 4 – Comparaison des courbes contrainte-déformation

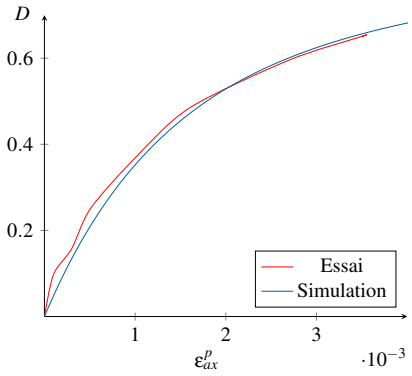
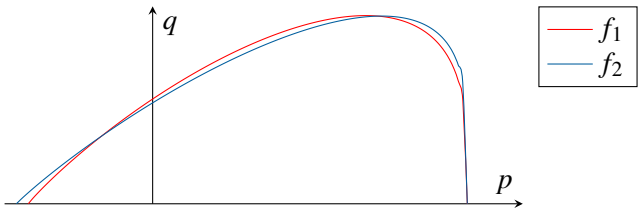


FIGURE 5 – Evaluation de la loi d'endommagement

L'exploitation de ces courbes macroscopiques a permis de dégager des intervalles d'admissibilité pour certains paramètres, notamment ceux intervenant dans la formulation de la surface de charge (voir Figure 6). Compte tenu des incertitudes dues aux essais, que ce soit au niveau des mesures elles-mêmes ou de la répétabilité des essais (effets de lots, inhomogénéité initiale de l'échantillon,...), il est impossible d'exhiber un ensemble unique de valeurs de paramètres pouvant calibrer l'ensemble du domaine avec la seule donnée de courbes macroscopiques d'essais standards. Toutefois, la donnée de ces intervalles est une première étape pour la calibration du modèle ainsi que sa validation.



	f_1	f_2
M	1.4	1.1
n	3.8	4.75
r	6000	2500
α	0.42	0.46

FIGURE 6 – Recouvrement des prévisions dans l'espace des paramètres

4.2 Champ réel issu de la tomographie

Le modèle ainsi développé est ensuite confronté à un cas où le chargement est plus réaliste. On s'intéresse donc au champ de déplacement reconstruit issu de la tomographie que l'on va imposer comme conditions de Dirichlet en haut et en bas de l'éprouvette hyper-réduite. On compare ensuite le champ de déformation trouvé avec celui issu du champ de déplacement obtenu avec le champ de déplacement Gappy POD imposé dans tout le maillage.
Toutefois, l'objectif du modèle simplifié n'est pas d'obtenir un champ de déformation exactement conforme à celui de l'essai. Notre approche se focalise sur une bonne détermination des faciès de rupture du matériau. La Figure 7 présente la déformation totale de cisaillement, ε_s, pour les deux approches étant donné que la rupture a lieu essentiellement par une localisation de la déformation de cisaillement. On a effectué les calculs sur un maillage hyper-réduit et un maillage complet (resp. Figure 7 a. et b.). On se place ici à un instant post-pic avant la rupture.

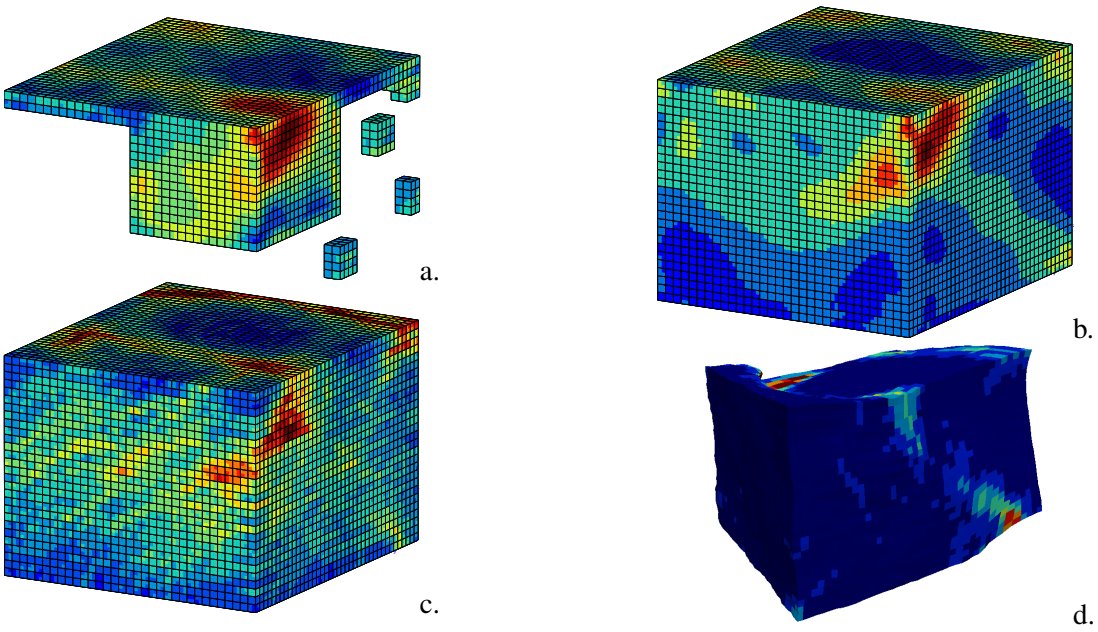


FIGURE 7 – a. ε_s sur la géométrie hyper-réduite b. ε_s du modèle, b. ε_s Gappy POD, d. Faciès de rupture final

D'un point de vue qualitatif, on constate que la simulation prévoit bien le premier glissement avec un détachement du coin supérieur. La seconde bande de glissement traversant le bloc à 45° est aussi prévue (Figure 7 b.). On constate à nouveau une tendance du modèle à surévaluer les déformations plastiques et la localisation. Celle-ci est principalement due à la non prise en compte du durcissement pré-pic. La simulation tend donc à anticiper les localisations. La Figure 7 c. montre ε_s pour le calcul où tout le champ de déplacement Gappy POD est imposé mais à un instant ultérieur à celui de la simulation montrée en Figure 7 b. C'est seulement à cet instant que la seconde bande de localisation commence à s'amorcer.
De plus, le calcul hyper-réduit a été effectué sur un maillage comprenant, en plus des zones d'intérêt sélectionnées par la méthode d'hyper-réduction, le haut de l'éprouvette (afin d'évaluer les efforts sur cette face) et le coin supérieur (zone d'intérêt mise en évidence par la visualisation des résultats de tomographie). La Figure 7 a. montre que, notamment, ε_s est correctement évalué sur les zones d'intéret. La démarche d'hyper-réduction permet ainsi de se focaliser en particulier sur des zones d'intérêt tout en ayant des résultats quantitativement pertinents et en diminuant sensiblement les temps de calculs (gain de temps de l'ordre de 10). L'étude de cette simulation a notamment permis de mieux appréhender l'impact de certains paramètres sur les bandes de localisation ou l'adéquation du champ de déformation simulé avec celui issu de la tomographie.

5 Conclusions

Cette étude sur "structure" s'est donc montrée plus riche pour la calibration du modèle et son évaluation que les courbes macroscopiques habituellement utilisées dans la littérature pour justifier les modèles. On a ainsi pu réduire les intervalles de paramètres admissibles et affiner la calibration du modèle.
L'étude s'est basée sur une démarche en trois temps :

1. Etablissement d'un modèle simplifié de comportement d'un sable artificiellement cimenté basé sur le Cemented Clay And Sand Model exposé notamment par Rios *et al.*[12]
2. Détermination d'un ensemble d'intervalles de paramètres admissibles basé sur l'exploitation de courbes macroscopiques d'essais standards (compressions triaxiales, flexion 4 points notamment). Il est important de noter que cet intervalle doit tenir compte des incertitudes de mesures et de répétabilité mais aussi de la redondance de certains jeux de paramètres.
3. Affinement final des paramètres par l'exploitation d'un calcul 3D hyper-réduit à chargement complexe et confrontation des résultats par rapport à un champ reconstruit issu de la tomographie.

L'utilisation de calculs 3D hyper-réduits est une méthode pertinente pour affiner les paramètres admissibles pour un matériau adoucissant comme présenté ici. Nous avons pu évaluer l'impact des paramètres sur les bandes de cisaillement sans recourir à la simulation par éléments finis.

Remerciements et références bibliographiques

Les auteurs souhaitent remercier l'Agence Nationale pour la Recherche pour le financement du projet FIMALIPO.

Références

[1] Damien André, Ivan Iordanoff, Jean-Luc Charles, and Jérôme Néauport. Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213–216 :113 – 125, 2012.

[2] Zhifu Shen, Mingjing Jiang, and Colin Thornton. DEM simulation of bonded granular material. Part I : Contact model and application to cemented sand. *Computers and Geotechnics*, 75 :192 – 209, 2016.

[3] D.C. Drucker and W. Prager. *Soil mechanics and plastic analysis for limit design*, volume 10. Quarterly of Applied Mathematics, 1952. pp. 157-165.

[4] K.H. Roscoe and J.B. Burland. On the generalized stress strain behaviour of 'wet' clay. *Engineering plasticity*, 1968.

[5] K.H. Roscoe, A.N. Schofield, and C.P. Wroth. On the yielding of soils. *Geotechnique 8(1)*, pages 22–52, 1958.

[6] K.H. Roscoe, A.N. Schofield, and A. Thurairajah. Yielding of clays in states wetter than critical. *Geotechnique 13(3)*, pages 211–240, 1963.

[7] R. Ami Saada, G. Bonnet, and D. Bouvard. Thermomechanical behavior of casting sands : Experiments and elastoplastic modeling. *International Journal of Plasticity*, 12(3) :273 – 294, 1996.

[8] H. S. Yu. CASM : a unified state parameter model for clay and sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(8) :621–653, 1998.

[9] A. Gens and R. Nova. Conceptual bases for a constitutive model for bonded soils and weak rocks. *Geotechnical engineering of hard soils-soft rocks*, 1(1) :485–494, 1993.

[10] H. S. Yu, S. M. Tan, and F. Schnaid. A critical state framework for modelling bonded geomaterials. *Geomechanics and Geoengineering*, 2(1) :61–74, 2007.

[11] R. Nova, R. Castellanza, and C. Tamagnini. A constitutive model for bonded geomaterials subject to mechanical and/or chemical degradation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27(9) :705–732, 2003.

[12] S. Rios, M. Ciantia, N. Gonzalez, M. Arroyo, and A. Viana da Fonseca. Simplifying calibration of bonded elasto-plastic models. *Computers and Geotechnics*, 73 :100 – 108, 2016.

[13] A.N. Schofield and P. Wroth. *Critical State Soil Mechanics*. European civil engineering series. McGraw-Hill, 1968.

[14] L. Resende and J.B. Martin. Formulation of Drucker-Prager Cap model. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(7) :855–881, 1985. cited By 34.

[15] W.F. Chen and D.J. Han. *Plasticity for Structural Engineers*. J. Ross Publishing classics. J. Ross Pub., 2007.

[16] Yaofeng Sun, John H. L. Pang, Chee Khuen Wong, and Fei Su. Finite element formulation for a digital image correlation method. *Appl. Opt.*, 44(34) :7357–7363, Dec 2005.

[17] Julien Réthoré, Stéphane Roux, and François Hild. From pictures to extended finite elements : extended digital image correlation (x-dic). *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3) :131 – 137, 2007.

[18] R. Everson and L. Sirovich. Karhunen–Loève procedure for gappy data. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(8) :1657–1664, Aug 1995.

[19] Kevin Carlberg, Charbel Bou-Mosleh, and Charbel Farhat. Efficient non-linear model reduction via a least-squares Petrov–Galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2) :155–181, 2011.

[20] S. Chaturantabut and D. C. Sorensen. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *Siam Journal on Scientific Computing*, 32(5) :2737–2764, 2010.

[21] David Ryckelynck, Komlanvi Lampoh, and Stéphane Quilici. Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, pages 1–9, 2015.