



**HAL**  
open science

## Etude de l'orientation d'une fibre dans un écoulement de cisaillement pour les fluides viscoélastiques.

Patrice Laure, Luisa Silva, Edith Peuvrel-Disdier, Rudy Valette

### ► To cite this version:

Patrice Laure, Luisa Silva, Edith Peuvrel-Disdier, Rudy Valette. Etude de l'orientation d'une fibre dans un écoulement de cisaillement pour les fluides viscoélastiques.. 48ème colloque annuel du Groupe Français de Rhéologie, Oct 2013, Nantes, France. 6 p. hal-01500665

**HAL Id: hal-01500665**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-01500665>**

Submitted on 3 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude de l'orientation d'une fibre dans un écoulement de cisaillement pour les fluides viscoélastiques

P. Laure<sup>a,b</sup>, L. Silva<sup>a</sup>, E. Peuvrel-Disdier<sup>a</sup> et R. Valette<sup>a</sup>

(a) Mines ParisTech, CEMEF, UMR CNRS 7635, 06904 Sophia Antipolis cedex

(b) Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR CNRS 7351, Université de Nice, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex

**Résumé :** Dans un fluide Newtonien, l'orientation d'une fibre est parfaitement décrite par l'équation de Jeffery. Dans cette étude, on utilise un rhéomètre numérique pour étudier l'évolution d'une fibre dans un champ de cisaillement simple pour des fluides viscoélastiques Oldroyd-B. Pour les fluides viscoélastiques, la période de rotation augmente avec le temps de relaxation (le nombre de Weissenberg) tandis que la fibre s'oriente le long de l'axe de vorticité. Par conséquent pour les fluides viscoélastiques l'équation Jeffery ne peut plus être utilisée pour prédire l'orientation d'une fibre.

**Mots-clé :** Fluide viscoélastique, Suspension, Fibres

## 1. Introduction

Les premiers travaux portant sur l'évolution d'une particule allongée datent de 1922. Ils sont dus à Jeffery [Jef22], qui a établi l'équation d'évolution de l'orientation d'une particule ellipsoïdale de révolution dans un fluide visqueux. La description de l'état d'un ellipsoïde de révolution nécessite la connaissance de deux paramètres : une longueur  $L$  et un vecteur orientation,  $\mathbf{p} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$  (voir figure 1).

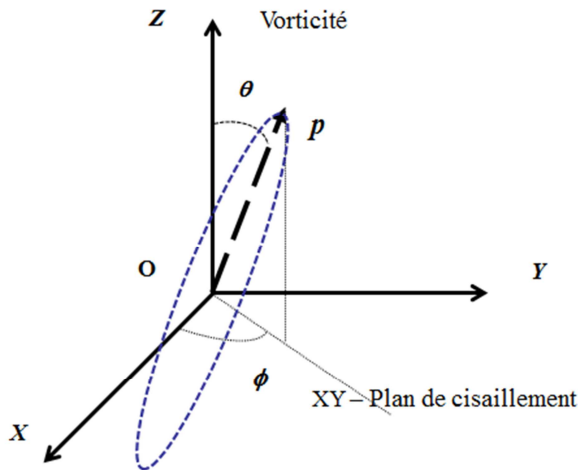


Figure 1 : Notations et position du vecteur  $\mathbf{p}$  orientation  $\mathbf{p}$  par rapport au plan de cisaillement et l'axe de vorticité.

Jeffery a montré que l'évolution de l'orientation  $\mathbf{p}$  dépend de l'écoulement et d'un seul paramètre géométrique propre à l'ellipsoïde de révolution : son rapport de forme  $\beta = L/D$ , où  $D$  est le diamètre de la

plus grande section (perpendiculaire à  $\mathbf{p}$ ) de l'ellipsoïde. L'équation de Jeffery est la suivante :

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\lambda + 1}{2} \nabla \mathbf{u} \mathbf{p} + \frac{\lambda + 1}{2} \nabla \mathbf{u}^t \mathbf{p} - \lambda (\nabla \mathbf{u} : [\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}]) \mathbf{p} \quad (1)$$

avec  $\lambda = \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2 + 1}$ .

Pour le rapport d'aspect  $\beta$  et un écoulement de cisaillement,  $\mathbf{u} = (\dot{\gamma}y, 0, 0)$ , on obtient la solution analytique pour les deux angles :

$$\tan \phi = \frac{1}{\beta} \tan \left( C_\phi - \frac{\beta}{\beta^2 + 1} \dot{\gamma} t \right) \quad (2)$$

$$\tan \theta = \frac{C_\theta}{(\beta^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

où les deux coefficients  $C_\theta$  et  $C_\phi$  dépendent des conditions initiales. Le taux de cisaillement macroscopique  $\dot{\gamma}$  peut être directement lié à la période de rotation de l'ellipsoïde  $T$  :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\gamma}} \left( \frac{\beta^2 + 1}{\beta} \right) \quad (4)$$

Par conséquent, l'ellipsoïde suit une orbite autour de l'axe  $Oz$ . L'amplitude de cette orbite dépend des conditions initiales et la particule allongée a un mouvement de type rame de kayak.

Pour les fluides viscoélastiques, il y a de nombreuses études qui montrent que cette équation n'est plus valide. Les premiers travaux [2] ont regardé les effets

Rhéologie, Vol. 13 (2008)

des premières contributions non-Newtoniennes ('second-order fluid') : les auteurs montrent que la fibre tend à s'aligner le long de l'axe de vorticité. Pour ce modèle, cet effet est relié à la deuxième différence de contrainte normale. Cependant d'autres études théoriques [3] montrent le même comportement pour un fluide d'Oldroyd-B mais en mettant en évidence le rôle de la première différence de contrainte normale. Ce comportement est observé expérimentalement pour de faible élasticité et de faible concentration en fibre [4]. Cependant pour des élasticités ou des taux de cisaillement plus importants, le comportement observé peut être plus complexe [5, 6, 7]. Plus récemment, la référence [8] montre que dans le cas d'une sphère ( $\beta = 1$ ) la période de rotation  $T$  diminue quand l'élasticité augmente (cette élasticité peut être reliée à un nombre de Weissenberg définie comme le rapport entre la première différence de contrainte normale et la contrainte de cisaillement).

Dans ce travail, on va utiliser la simulation numérique directe pour étudier le mouvement d'une particule ellipsoidale dans un champ de cisaillement. La particule sera placée dans un fluide de type Oldroyd-B. Cela permettra d'étudier plus précisément l'influence du temps de relaxation et des forces élastiques sur le mouvement d'une fibre.

## 2. Méthode Numérique

Une méthode des éléments finies a été développée pour le calcul de l'écoulement de particules dans un fluide [4]. Cette formulation est basée sur la méthode des domaines fictifs [9], qui consiste à considérer le domaine de calcul total (fluide + solides) comme un fluide. On sépare les parties solides et liquides de façon implicite en utilisant une fonction distance signée. On ajoute une contrainte de rigidité

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{u}) = 0 \quad (5)$$

sur le domaine solide afin d'avoir un mouvement de corps rigide. Cela revient à ajouter un multiplicateur de Lagrange sur la région solide à la formulation faible classique pour un écoulement de Stokes (ou Navier-Stokes) [10,11].

### 2.1 Le Modèle d'Oldroyd-B

Dans cette étude, la loi de comportement d'Oldroyd-B [12] est utilisée pour décrire le comportement viscoélastique du fluide. Ce modèle peut s'écrire comme :

$$\sigma = -P \mathbb{I} + 2 \eta_s \dot{\epsilon}(\mathbf{u}) + \frac{\eta_p}{\lambda} (3 \mathbf{s} - \mathbb{I}) \quad (6)$$

où  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $\eta_s$ , la viscosité du solvant Newtonien,  $\dot{\epsilon}(\mathbf{u})$  le tenseur du taux de déformation,  $\eta_p$  et  $\lambda$  respectivement la viscosité et le temps de relaxation de la partie polymérique. On a exprimé ici, l'extra-contrainte polymérique comme

une fonction du tenseur de conformation  $\mathbf{s}$  qui vérifie la relation

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{s} - [\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{s} \cdot \nabla \mathbf{u}^T] + \frac{1}{\lambda} (3 \mathbf{s} - \mathbb{I}) = 0 \quad (7)$$

On utilise la formulation avec le tenseur de conformation car de nombreux modèles comme POM-POM ou FENE peuvent être décrits par des modifications mineures de la relation (7). Ce système d'équations est résolu en utilisant la méthode des éléments finis décrite dans [13] car les équations de continuité et de masse,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8)$$

sont découplées de l'équation de comportement (7) et sont donc résolues séparément. L'extra-contrainte polymérique est donc explicite dans (8). On a rajouté une boucle afin d'avoir une convergence complète en  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{s}$  à chaque pas de temps.

Le champ de vitesse étant calculé, on peut déplacer et orienter chaque particule en interpolant la vitesse et le vecteur rotation au centre de masse,  $\mathbf{X}_c$ , de la particule. La nouvelle position et l'orientation sont données par les équations,

$$\frac{d\mathbf{X}_c}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}_c) \text{ et } \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{p} \quad (9)$$

où  $\boldsymbol{\omega}_c = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{X}_c)$ . Ces équations sont discrétisées en temps par un schéma en temps d'Adam-Bashforth. La fonction distance signée,  $\alpha$ , qui permet de séparer les domaines solides et liquides pour une particule ellipsoide de demi-grand axe  $L/2$  et de demi-petit axe  $R$  est donnée par

$$\alpha(\mathbf{X}) = \frac{L}{2} - \sqrt{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_c \cdot \mathbf{p}|^2 + \frac{L^2 |\mathbf{X}_\perp|^2}{4R^2}}, \quad (10)$$

avec

$$\mathbf{X}_\perp = \mathbf{X} - \mathbf{X}_c - ((\mathbf{X} - \mathbf{X}_c) \cdot \mathbf{p}) \mathbf{p} \quad (11)$$

### 2.2 Géométrie et conditions aux limites

Un domaine cubique est choisi avec la particule ellipsoidale située au centre (voir figure 2). La taille du domaine est normalisée à 1. Comme on a une seule particule et que l'on veut seulement étudier l'évolution de l'orientation, on impose que le centre de masse de la particule est fixe, on modifiera seulement l'orientation  $\mathbf{p}$  à chaque pas de temps et il faut transporter l'extra-contrainte avec la vitesse,  $\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{X}_c)$ , dans l'équation (7). Un écoulement de cisaillement,  $\dot{\gamma}$ , est imposé en fixant la vitesse sur les parois inférieures et supérieures du cube :

$$u_x \left( x, \frac{1}{2}, z \right) = \frac{\dot{\gamma}}{2}; \quad u_x \left( x, -\frac{1}{2}, z \right) = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \quad (13)$$

$$u_y \left( x, \pm \frac{1}{2}, z \right) = u_z \left( x, \pm \frac{1}{2}, z \right) = 0$$

De plus, des conditions sur les parois verticales sont ajoutées pour avoir un écoulement de Couette sur la frontière :

$$u_y \left( \pm \frac{1}{2}, y, z \right) = u_z \left( \pm \frac{1}{2}, y, z \right) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \left( \pm \frac{1}{2}, y, z \right) = 0$$

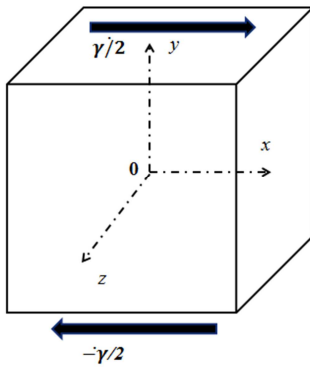


Figure 2 : Domaine de calcul et notation, particule dans un champ de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . La vitesse est imposée sur les côtés supérieurs et inférieurs.

Pour le tenseur de conformation, on impose la solution de Couette sur toutes les parois du cube, c'est-à-dire

$$\mathbf{s}_{xy} = \frac{1}{3} \lambda \dot{\gamma}; \quad \mathbf{s}_{xx} = \frac{2}{3} (\lambda \dot{\gamma})^2 + \frac{1}{3}; \quad (15)$$

$$\mathbf{s}_{yy} = \mathbf{s}_{zz} = \frac{1}{3};$$

les autres termes étant nuls.

### 3. Résultats numériques

Les calculs sont faits pour  $\dot{\gamma} = 1$ . La particule ellipsoïde a les dimensions :  $L = 0.3; R = 0.05$ , ce qui correspond à un rapport d'aspect  $\beta = 3$ . La position initiale est  $\theta_0 = 30^\circ$  et  $\phi_0 = 45^\circ$ . Le fluide d'Oldroyd-B a les caractéristiques suivantes :  $\eta_s = 0.1; \eta_p = 0.9; \lambda = 0.1, 0.5$  et  $1$ . Le pas de temps,  $\Delta t$ , est égal à  $0.01$ .

#### 3.1 Le cas Newtonien

Le calcul pour un fluide Newtonien de viscosité unitaire a été faite pour vérifier que l'on retrouve la solution de Jeffrey. En comparant la période mesurée à partir de la solution numérique et la formule (4), on peut déduire un rapport d'aspect équivalent  $\beta_{eq} = 3.12$ . La Figure 3 montre que la solution calculée par la simulation numérique directe correspond à la

solution de Jeffrey (2) et (3). La période en temps est  $21.645$ , et l'angle  $\theta$  par rapport à l'axe de vorticité  $0z$  varie entre  $25^\circ$  et  $55^\circ$  et à une période divisé par deux.

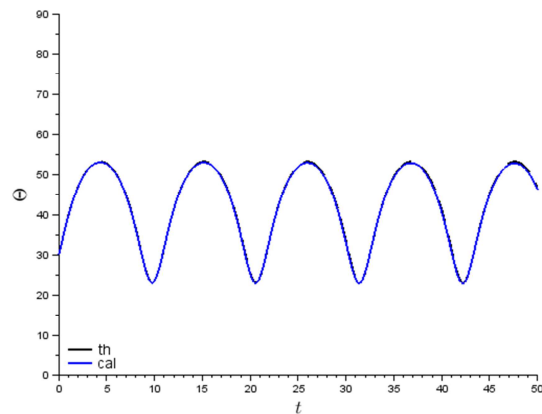
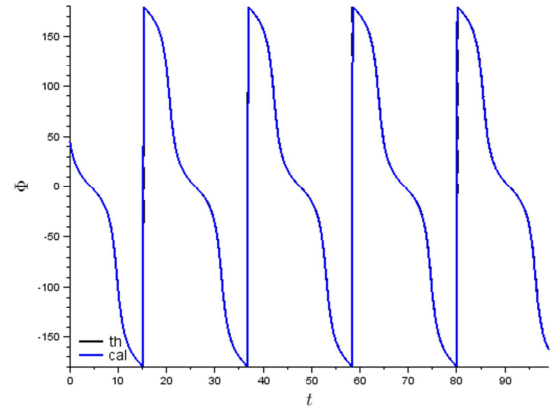


Figure 3 : Evolution des deux angles  $\phi$  et  $\theta$  en fonction du temps. La solution analytique (2) et (3) pour  $\beta_{eq} = 3.12$  est donné en pointillé.

La figure 4 montre que l'extrémité du vecteur  $\mathbf{p}$  décrit une orbite fermée centrée sur l'axe de vorticité. Pour la suite, il peut être intéressant de tracer l'évolution du vecteur rotation  $\boldsymbol{\omega}$  en fonction du temps. La figure 5 montre que ces composantes sont aussi périodiques ( $\omega_x$  et  $\omega_y$  ayant la même période de rotation que  $\phi$ ; celle de  $\omega_z$  étant la même que celle de  $\Theta$ ). Les valeurs moyennes de ces composantes sont reportées dans le tableau 1 et confirment que l'on a principalement une rotation autour de l'axe de vorticité  $0z$ .

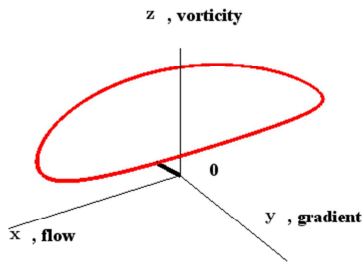


Figure 4 : Orbite correspondant de l'extrémité du vecteur  $\mathbf{p}$  ; à  $t = 0$ , le vecteur  $\mathbf{p}$  est donné par le trait noir.

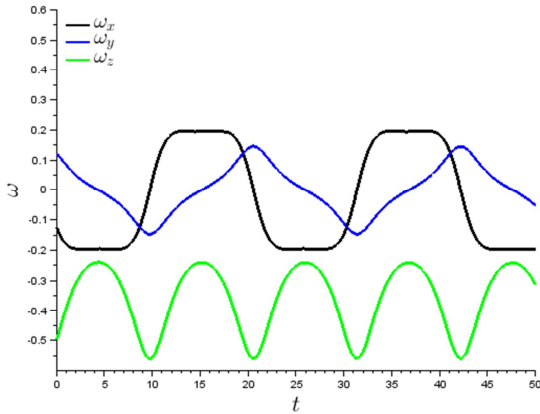
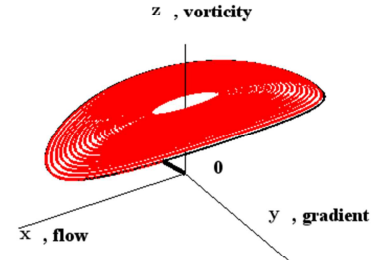
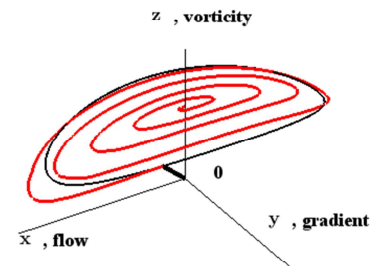
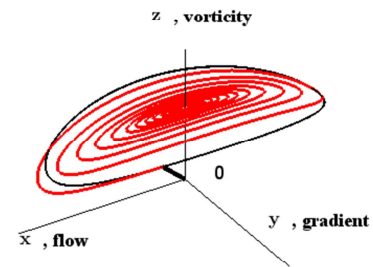


Figure 5 : Evolution des composantes du vecteur rotation  $\omega$  en fonction du temps.



1, la particule est clairement colinéaire à l'axe  $Oz$ , tandis que pour  $\lambda = 0.1$ , il y a une orbite limite correspondant à de petites variations de  $\theta$  proche de 0.

	Newtonien	$\lambda = 0.1$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 1$
$\langle \omega_x \rangle$	-0.0129	-0.001	-0.0038	-0.0074
$\langle \omega_y \rangle$	-0.0045	0.000	-0.0001	-0.0010
$\langle \omega_z \rangle$	-0.3685	-0.4484	-0.4136	-0.3374
$T_\phi$	21.65	22.00	31.31	29.12

Table 1 : Valeurs Moyennes des composantes du vecteur rotation  $\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{X}_c)$  et la période  $T_\phi$  de l'évolution de l'angle  $\phi$ .

### 3.2 Le cas viscoélastique

Quand on introduit un comportement viscoélastique, la particule s'oriente vers l'axe de vorticité. Les figures 6 montrent que l'on n'a plus une orbite fermée. Pour  $\lambda =$

Figure 6 : Trajectoires de l'extrémité du vecteur orientation  $\mathbf{p}$ , pour  $\lambda = .1 ; .5$  et 1. En noir l'orbite correspondant au cas Newtonien.

L'évolution de l'angle  $\phi$  est comparable à celle du cas Newtonien (figure 3a) avec une période plus grande (voir tableau 1). Pour  $\lambda = 1$ , cet angle n'est plus adapté pour décrire le comportement car la particule est

colinéaire à l'axe Oz. L'évolution de l'angle  $\theta$  représentée sur la figure 7 montre clairement le rôle de l'élasticité avec un transitoire qui diminue quand on augmente la viscoélasticité.

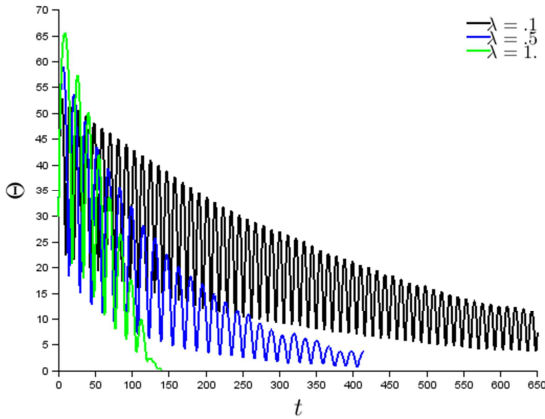


Figure 7 : Evolution de l'angle  $\theta$  pour les différentes valeurs de temps de relaxation  $\lambda$ .

L'évolution des composantes du vecteur rotation est tracée sur les figure 8 pour  $\lambda = .1$  et 1. Pour  $\lambda = .1$ , on peut voir que cette évolution reste périodique mais avec une très faible fluctuation. Pour  $\lambda = 1$ , on obtient des valeurs limites constantes et la particule tourne autour de son axe de révolution avec la période  $2\pi/\omega_z$ .

Il faut pour avoir cette période prendre la valeur limite de  $\omega_z$  à la place de la valeur moyenne donnée dans la table 1. Mais la tendance est la même et on montre que la période de rotation augmente avec l'élasticité comme dans le cas d'une sphère.

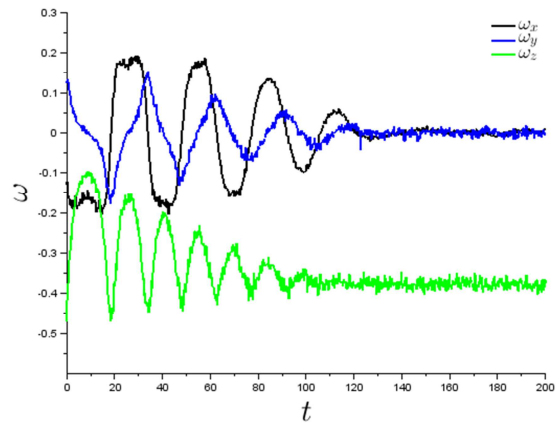
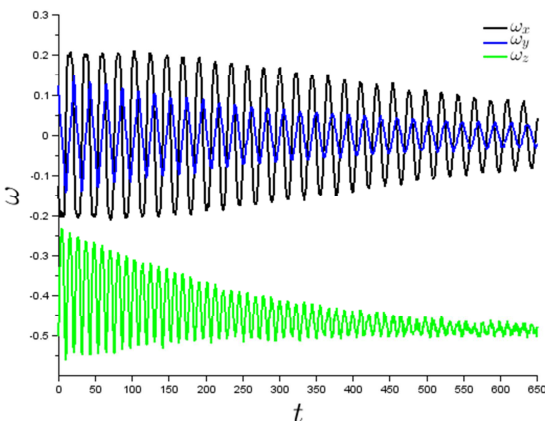


Figure 8 : Evolution des composantes du vecteur rotation en fonction du temps : (a)  $\lambda = .1$ ; (b)  $\lambda = 1$ .

#### 4. Conclusion

Les calculs numériques effectués pour des fluides de type Oldroyd-B montrent que pour des valeurs de temps de relaxation faibles et modérées, la particule s'oriente vers l'axe de vorticité. Cela confirme les résultats théoriques et certains résultats expérimentaux. La durée de ce transitoire dépend du temps de relaxation. A la fin de ce transitoire la particule tourne principalement autour de son axe de révolution. Pour des temps de relaxation et des taux de cisaillement plus importants, un modèle de comportement de type FENE permettra de mieux modéliser les écoulements élongationnels qui peuvent apparaître dans certaines parties de la cavité (surtout si il y a des interactions entre des particules).

[1] Jeffery, G.B. The motion of ellipsoidal particles immersed in viscous fluid. *Proc. R. Soc. London A*, 102, 161-179 (1922).  
 [2] Leal, L. The slow motion of slender rod-like particles in a second-order fluid, *J. Fluid Mechanics*, 69, 305-337 (1975).  
 [3] Harlen, O. G. & Donald L. Koch, L. Simple shear flow of a suspension of fibres in a dilute polymer solution at high Deborah number, *J. Fluid Mechanics*, 252, 187-207 (1993).  
 [4] Iso, Y.; Koch, D. L. & Cohen, C. Orientation in simple shear flow of semi-dilute fiber suspensions 1. Weakly elastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 62, 115-134 (1996).  
 [5] Iso, Y.; Cohen, C. & Koch, D. L. Orientation in simple shear flow of semi-dilute fiber suspensions 2. Highly elastic fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1996, 62, 135 - 153 (1996).  
 [6] Petrich, M.; Chaouche, M.; Koch, D. & Cohen, C. Oscillatory shear alignment of a non-Brownian fiber in a weakly elastic fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 91, 1-14 (2000).  
 [7] Gunes, D.; Scirocco, R.; Mewis, J. & Vermant, J. Flow-induced orientation of non-spherical particles: Effect of

Rhéologie, Vol. 13 (2008)

aspect ratio and medium rheology, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 155, 39 - 50 (2008)

[8] Snijkers, F.; D'Avino, G.; Maffettone, P.; Greco, F.; Hulsen, M. and Vermant, J. Effect of viscoelasticity on the rotation of a sphere in shear flow, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166, 363-372 (2011).

[9] Coupez, T.; Digonnet, H.; Hachem, E.; Laure, P.; Silva, L. & Valette, R. Multidomain Finite Element Computations: Application to Multiphase Problems In *Arbitrary Lagrangian-Eulerian and Fluid-Structure Interaction. Numerical Simulation* Edited by M. Souli and D.J. Benson. Wiley, 221-289 (2010).

[10] Glowinski, R.; Pan, T.W. & J. Periaux, J. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 111, 283-303 (1994).

[11] Laure, P.; Beaume, G.; O. Basset, Silva, L. and Coupez T., Numerical methods for solid particles in particulate flow

simulations, *Eur. J. Computational Mechanics*, 16, 365-383 (2007).

[12] Oldroyd, J.G. On the formulation of rheological equations of state, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 200, 523-541 (1950).

[13] Silva L.; Valette, R.; Laure, P. and Coupez, T. A New Three-Dimensional Mixed Finite Element for Direct Numerical Simulation of Compressible Viscoelastic Flows with Moving Free Surfaces, *Int. J. Material Forming*, 5(1), 55-72 (2012).