



HAL
open science

Méthode level-set pour la simulation d'une membrane immergée

Ghalia Guiza

► **To cite this version:**

Ghalia Guiza. Méthode level-set pour la simulation d'une membrane immergée. [Rapport de recherche] Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. 2016, pp.14. hal-01492597

HAL Id: hal-01492597

<https://minesparis-psl.hal.science/hal-01492597>

Submitted on 20 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

CENTRE DE MISE EN FORME DES MATERIAUX



Méthode level-set pour la simulation d'une membrane immergée

Ghalia GUIZA

2 février 2016

Dans ce travail, on s'intéresse à l'interaction fluide-structure dans le cas où la structure est constituée d'une membrane. Cette étude a pour but d'exposer les différentes méthodes numériques utilisées dans la littérature pour modéliser ce phénomène. La plupart de ces approches implique une modification des équations de Navier-Stokes en ajoutant un terme source qui traduit la force qu'exerce la membrane sur le fluide. La technique la plus intéressante, dans le cadre des méthodes numériques développées au CEMEF, consiste à exprimer cette force en fonction d'une fonction level-set et d'une masse de Dirac régularisée. L'avantage avec cette méthode est qu'elle expose les caractéristiques géométriques et physiques de la structure. Néanmoins, on peut aussi constater que l'approche phase-field donne des résultats intéressants. On commencera donc par implémenter ces deux méthodes, pour pouvoir les comparer en termes de précision, de stabilité et de temps de calcul en les appliquant à des cas-tests simples trouvés dans la littérature. Une fois choisie la méthode appropriée, on l'utilisera pour modéliser l'aéroélasticité.

Table des matières

Introduction	3
Contexte de la thèse	3
1. Modélisation du système physique :	4
2. Modélisation du couplage fluide-membrane	5
2.1. Méthode des frontières immergées	6
2.2. Méthode de pénalisation du volume :	7
2.3. Approche Level-set	8
2.4. Approche level-set « augmentée »	9
2.5. Approche phase-field	10
Conclusion & perspectives	12

Introduction

Le couplage fluide-structure sera sans doute un des domaines de recherche les plus actifs en simulation numérique dans les prochaines années. Les applications immédiates et potentielles concernent la grande majorité des domaines industriels, sociétaux et environnementaux.

La simulation de l'interaction fluide-structure est rendue possible par les progrès considérables des moyens informatiques et technologiques mais aussi à la maturité des méthodes numériques pour l'étude des systèmes physiques complexes mettant en jeu des fluides laminaires ou turbulents et des structures rigides ou flexibles.

Un nombre important d'applications relèvent de cette thématique, notamment dans les domaines du génie civil (ponts, tours), la médecine (écoulement du sang dans les artères) ou encore l'aéronautique (écoulement autour d'ailes d'avion). En pratique, différents codes de calcul sont utilisés pour modéliser ce phénomène d'interaction, qui doivent être à la fois peu coûteux, précis mais aussi assurant la conservation de l'énergie et des données relatives à la structure, au fluide et à l'interface. Les résultats de la simulation numérique, plus précisément sa stabilité et sa précision, dépendent donc fortement des paramètres et caractéristiques du modèle physique choisi ainsi que des méthodes et algorithmes employés. On peut distinguer ainsi trois types d'approches pour modéliser le couplage. La première est l'approche analytique qui consiste à calculer directement l'action de chaque milieu sur l'autre à partir de modèles simplifiés qui peuvent être résolus sans discrétisation spatiale. L'approche partitionnée permet de résoudre à l'aide de codes de calcul dédiés la mécanique du fluide d'une part et du solide d'autre part. Par conséquent, pour chaque milieu, un code de calcul spécifique est utilisé et la difficulté consiste à faire transiter l'information d'un code à l'autre. La dernière, appelée approche monolithique, représente théoriquement la solution la plus pratique du point de vue de la simulation, étant donné que le fluide et le solide sont traités par un même code de calcul. Toutefois, lorsque les géométries ou la physique du problème deviennent complexes, comme c'est le cas d'une membrane immergée dans un fluide turbulent, ce type de méthode peut nécessiter une résolution spécifique.

Contexte de la thèse

Le projet STRATOBUS, dans lequel s'inscrit cette thèse, a pour objectif d'étudier un ballon dirigeable de 100 m de long, d'un volume de 50.000 m³, pilotable à distance, transportant 300 kg de charge utile et pouvant atteindre les 20 km d'altitude, localisé au niveau de la stratosphère (voir figure 1). Proposé par le groupe Thales Alenia Space, ce dirigeable aura pour rôle : la surveillance des frontières ou de la piraterie maritime, la gestion des catastrophes naturelles l'analyse des données météorologiques ou encore le renforcement de la connexion internet dans les zones désertiques et difficiles d'accès. Néanmoins, certaines contraintes techniques posent encore problème



Figure 1: Dirigeable Stratobus

du fait de son important volume, de sa longueur considérable, des conditions stratosphériques et de sa flexibilité membranaire.

Compte tenu de ces défis et des enjeux discutés avec Thales Alenia Space, trois grands axes sont fixés :

- Aéroélasticité et analyse de déformation : modélisation de l'interaction entre fluide turbulent et couche mince (membrane).
- Aérodynamique et étude de stabilité (au décollage et en croisière) : résolution non linéaire et instationnaire des petites échelles pour la turbulence.
- Aérothermique et interaction intérieur-extérieur : mise au point d'une méthode d'immersion précise pour la thermique conjuguée (convection, conduction et radiation).

Dans ce rapport, une étude bibliographique est proposée pour traiter le premier axe. En effet, le ratio 'épaisseur de l'enveloppe' / 'dimension du ballon' nous amène à étudier et analyser les méthodes numériques pour l'interaction fluide-membrane. En particulier, il sera envisagé d'exploiter le potentiel des méthodes d'immersion et de maillage adaptatif anisotrope développées au CEMEF [1,2,3,4,5,23,24] et de l'étendre à la simulation des membranes immergées. Il est possible de s'inspirer des méthodes décrites dans ce rapport pour modifier les solveurs existants au CEMEF en rajoutant une contrainte prenant en considération la déformation de l'enveloppe.

Mots clés : Aéroélasticité, Interaction Fluide-Structure, Membrane, Méthodes numériques, level-Set.

1. Modélisation du système physique :

On rappelle dans cette section, les principaux outils de modélisation utilisés pour l'immersion de domaine. On considère un domaine Ω dans lequel est immergée une membrane flexible dont la surface est délimitée par Γ . Dans la figure ci-dessous, on montre la différence entre d'une part, l'interaction entre un milieu fluide et un solide immergé, et d'autre part, l'immersion d'une membrane séparant deux domaines Ω_1 et Ω_2 représentant chacun un fluide, qu'on considère dans un premier temps incompressibles.

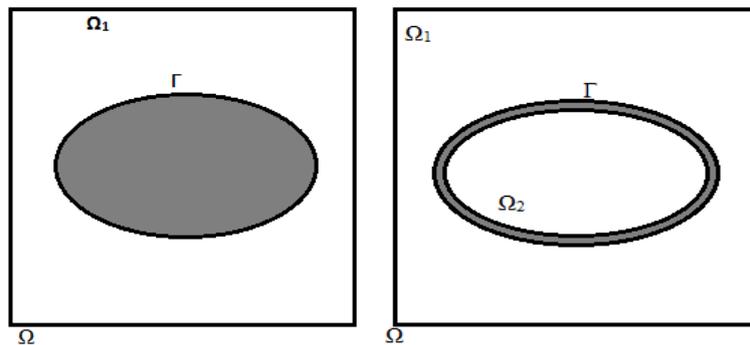


Figure 2 : Prise en compte d'un solide immergé (à gauche) ou d'une membrane immergée (à droite)

L'écoulement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes incompressibles suivantes:

$$\begin{cases} \rho(\partial & v) \end{cases} \quad (1)$$

où ρ est la masse volumique, μ la viscosité dynamique, les deux champs inconnus $v(x,t)$ la vitesse et $p(x,t)$ pression. Le terme source F représente les forces volumiques. Comme le montre la suite de ce rapport, il peut jouer un rôle important pour la modélisation de la membrane en ajoutant une contrainte due à la déformation de l'enveloppe. Dans la littérature, cette modélisation d'interaction entre un fluide et une telle membrane a été essentiellement utilisée dans le domaine de la biologie pour simuler l'écoulement du sang autour de vésicules ou de fibres lipidiques ainsi que dans les artères.

L'immersion du domaine [6,7,8,9, 25,26,27,28] peut se faire à l'aide d'une simple fonction donnant la distance à un point quelconque de l'objet. Appelée fonction level-set $\phi(x, t)$ (x une position quelconque dans l'espace), cette fonction est définie dans tout le domaine, tel que :

$$\Gamma(t) = \{x, \phi(x, t) = 0\} \quad (2)$$

Pour calculer et initialiser cette fonction, deux méthodes peuvent être utilisées. Si la géométrie est simple, l'isovaleur zéro est directement obtenue de sa fonction analytique. Si la géométrie est compliquée, on calcule la fonction distance entre un maillage surfacique représentant la surface immergée (en pratique un fichier de type STL) et les nœuds du maillage de calcul (voir [10]).

Pour suivre le déplacement de la membrane immergée, il suffit d'appliquer une équation de transport au scalaire ϕ . Autrement dit, cette équation traduit l'évolution de ce dernier en fonction d'une vitesse v donnée, et s'écrit :

$$\frac{d\phi}{dt} + v \cdot \nabla \phi = 0 \quad (3)$$

On rappelle que cette fonction distance nous donne, à tout instant de la simulation, accès à deux quantités intéressantes, la normale n à la surface et sa courbure κ :

$$\overline{\|\nabla \phi\|} \quad \overline{\|\nabla \phi\|} \quad (4)$$

2. Modélisation du couplage fluide-membrane

On trouve dans [11] un classement, selon trois critères, des méthodes numériques pour modéliser le phénomène de couplage entre un fluide et une structure : (i) la formulation de l'écoulement du fluide (Eulérienne, Lagrangienne ou Eulérienne-Lagrangienne), (ii) la méthode de localisation de l'interface par suivi ou capture, et (iii) la technique de couplage entre le fluide et la structure. Ce classement laisse penser que l'approche monolithique Eulérienne est la plus adaptée aux interactions fluide-membrane. En effet, cette approche permet l'utilisation de maillages anisotropes avec des éléments fortement étirés, la résolution unifiée de l'équation de Navier-Stokes entre les différents domaines et la déformation de la membrane obtenue par simple résolution d'une équation de transport. Ces caractéristiques constituent des atouts décisifs par rapport aux autres méthodes. Néanmoins, cette partie du

rapport commencera en donnant un aperçu plus large des méthodes utilisées dans la littérature pour l'interaction fluide-membrane.

2.1. Méthode des frontières immergées

La méthode des frontières immergées, introduite par Peskin dans [12], est utilisée pour simuler des fibres unidimensionnelles agissant sur un fluide. Bien que la méthode ne s'applique pas complètement dans le contexte monolithique eulérien, elle relève le défi d'analyser précisément l'interaction entre des structures 'minces' et le fluide autour. Elle consiste à introduire des marqueurs lagrangiens qui suivent le déplacement de la structure. Ces marqueurs sont transportés par le fluide, qui est représenté de manière eulérienne sur un maillage fixe. Le passage entre les deux domaines se fait à l'aide d'une interpolation. Mathématiquement ceci se traduit par l'utilisation d'une masse de Dirac au niveau de l'interface, et donc par un terme source dans les équations de Navier-Stokes.

Dans le cas d'une membrane soumise à une tension, on considère les variables suivantes :

- $X(t, \xi) \in [0, T] \times [0, L]$, la position des points matériels de la membrane de longueur L , avec ξ la coordonnée curviligne attachée à la membrane.
- $f(X)$ la densité de force élastique de la membrane, déterminée à partir de son étirement proportionnel à $|X_\xi|$.

La valeur de la force élastique se dérive alors à partir de l'énergie, et s'exprime en fonction de la position des particules de la membrane :

$$\varepsilon(X) = \int_0^L E(|X_\xi|) d\xi, \quad f(X) = \frac{1}{|X_\xi|} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(E'(|X_\xi|) \frac{X_\xi}{|X_\xi|} \right) \quad (5)$$

La dernière étape consiste à transformer, en utilisant le principe de CSF (Continuum Surface Force), introduit par [13], la force surfacique en force volumique en multipliant par un Dirac régularisé à l'interface :

$$F(X) = f(X) \delta_{\Gamma(t)} \quad (6)$$

Cette approche est reprise par les travaux de Heintz [14] pour simuler cette fois une membrane soumise à des contraintes dues à l'étirement et la flexion. En se basant sur la physique de cette membrane, l'énergie est exprimée en fonction de la courbure moyenne H , la rigidité de flexion κ , le coefficient de tension de surface σ , et finalement la pression θ entre les deux domaines séparés par la membrane :

$$E_\Gamma = \int_\Gamma (2KH^2 + \sigma) dS + \theta \int_\Gamma dx \quad (7)$$

Reste à déterminer la force F qui traduit l'interaction à l'interface fluide-membrane-fluide. L'auteur introduit la fonction de Willmore :

$$W = \Delta_\Gamma H + 2H(H^2 - K) \quad (8)$$

Où Δ_Γ représente le Laplacien surfacique. La variation de l'énergie fonctionnelle E par rapport à la perturbation générale de la surface dans la direction de $\vec{\varphi}$ est :

$$\delta E_\Gamma(\vec{\varphi}) = \int_\Gamma -(\vec{W} + 2\sigma H \vec{n} + \nabla_\Gamma \sigma) \cdot \vec{\varphi} dS + \int_\Gamma \theta \vec{n} \cdot \vec{\varphi} dS \quad (9)$$

Cette dernière nous permet d'obtenir l'expression de la densité de force à implémenter comme terme source dans les équations de Navier-Stokes :

$$\vec{F} = \vec{W} + 2\sigma H\vec{n} + \nabla_{\Gamma}\sigma + \theta\vec{n} \quad (10)$$

La figure 3 montre le grand potentiel de ces approches pour modéliser des membranes extrêmement fines, séparant deux fluides, et à suivre l'évolution de leurs déformations.

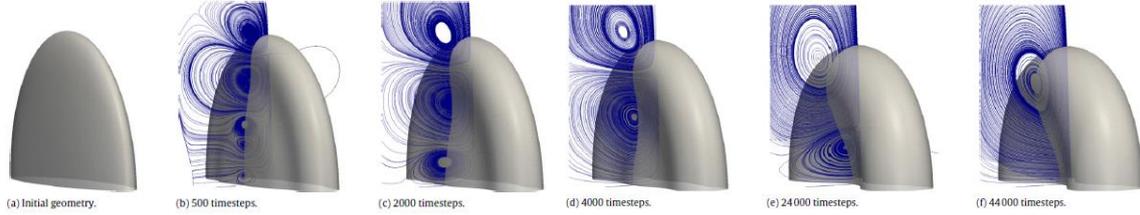


Figure 3: Déformation d'une membrane lipidique au cours du temps

2.2. Méthode de pénalisation du volume :

Dans [15], les auteurs proposent un nouveau schéma pour la simulation numérique de l'interaction fluide-structure basé sur la méthode de pénalisation du volume pour les surfaces déformables. Elle consiste à ajouter un terme supplémentaire de pénalisation aux équations de Navier-Stokes :

$$\rho(\partial_t v + v \cdot \nabla v) = F - \nabla p + \mu \nabla^2 v - \frac{\chi}{\varepsilon} (v - v_s), \quad (11)$$

Où

$$\chi(x, t) = \begin{cases} 1 & x \in \Omega_2 \\ 0 & x \in \Omega_1 \end{cases} \quad (12)$$

Est une fonction caractéristique du domaine, v_s est la vitesse de la structure et $\varepsilon \ll 1$ est le paramètre de pénalisation. La force hydrodynamique agissant sur la structure peut être exprimée en fonction du tenseur des taux de déformation :

$$\underline{F} = \oint_{\partial\Omega_s} \sigma \cdot \underline{n} \, dy \quad (13)$$

Avec

$$\sigma = -\nabla p + \frac{\nu}{2} (\nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T) \quad (14)$$

Ce terme de pénalisation remplace l'utilisation des conditions aux limites pour séparer un domaine fluide et un domaine solide. Selon la valeur numérique de ε on peut passer d'un solide rigide à un corps déformable. L'interaction entre les domaines est prise en compte par le terme source F contrôlant ainsi la déformation et le déplacement de la structure. Finalement, pour suivre l'évolution de l'interface, les auteurs proposent de rajouter une équation de transport de la fonction caractéristique :

$$\partial_t \chi + v_s \cdot \nabla \chi = 0 \quad (15)$$

Une idée originale est aussi proposée pour régulariser l'interface en introduisant une fonction Heaviside lissée :

$$H(x) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{t-x}{\delta} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{t+x}{\delta} \right) \right] \quad (16)$$

Où

$$\delta = c_{sm} \Delta x \max \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{c_{sm} \Delta x}{\sqrt{\pi}} [\exp(-4) - 1] \quad (17)$$

Le paramètre c_{sm} contrôle l'épaisseur δ de la membrane en fonction la taille de maille. Contrairement aux méthodes précédentes, celle-ci a été testée sur des ailes d'insectes. Les résultats sont encourageants et précis pour des nombre de Reynolds moyen. Cependant, cette méthode souffre d'oscillation numérique si l'écoulement autour de la membrane est turbulent.

2.3. Approche level-set

Cottet et Maitre [13] et [16] ont étudié en profondeur l'application des approches level-set pour simuler des applications en biomécanique. On résume ces travaux par trois étapes essentielles : (i) la localisation et le transport des membranes par une approche level-set avec réinitialisation, (ii) la détermination de l'expression de la force élastique de la membrane à partir de l'énergie totale du système, et enfin (iii) la réécriture des équations de Navier-Stokes en introduisant l'expression de la force régularisée en terme source.

Par rapport aux méthodes level-set classiques, trois aspects originaux rendent leur approche robuste, précise et conservative. Tout d'abord, l'étape de réinitialisation classique de la fonction level-set est remplacée par une technique de normalisation (voir [9, 10]). Ensuite, pour assurer la conservation de masse, la loi de mélange des densités est exprimée en fonction des densités des fluides de part et d'autre de l'interface ainsi que de la densité surfacique de la membrane :

$$\rho(\phi) = \bar{\rho} + H \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \delta\rho + \lambda_\theta \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \quad (18)$$

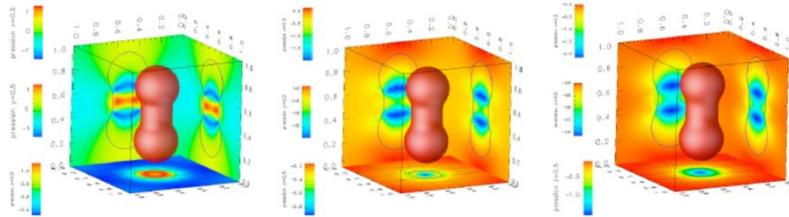
$$\mu(\phi) = \mu_1 + H \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) (\mu_2 - \mu_1) \quad (19)$$

Avec $\bar{\rho} = (\rho_e + \rho_i)/2$, $\delta\rho = (\rho_e - \rho_i)/2$ et λ_θ la densité de surface de la membrane

Finalement, un nouveau modèle est proposé pour calculer la force élastique exprimée en fonction de l'énergie régularisée :

$$F(x, t) = \left\{ \nabla[E'(|\nabla\phi|)] - \nabla \cdot \left[E'(|\nabla\phi|) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right] \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right\} |\nabla\phi| \frac{1}{\varepsilon} \zeta \left(\frac{\phi}{\varepsilon} \right) \quad (20)$$

Cette force est ajoutée comme terme source dans les équations de Navier-Stokes, résolue par différence finies et testée sur différentes applications en biomécanique, comme l'évolution des globules rouges dans un fluide sanguin (figure 4).



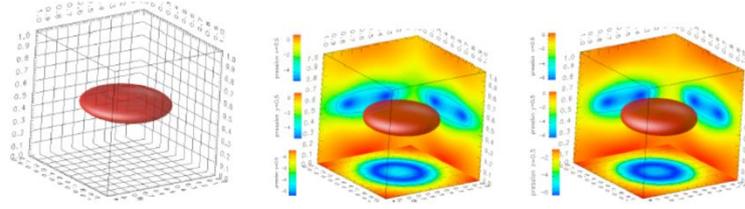


Figure 4: Evolution des globules rouges dans un fluide sanguin

2.4. Approche level-set « augmentée »

Une méthode de level-set originale est proposée dans [18] pour simuler des vésicules lipidiques à membrane incompressible évoluant dans du sang (figure 5). Cette approche consiste à transporter à la fois la fonction distance Φ et son gradient ψ d'une manière lagrangienne :

$$\frac{d\Phi}{dt} = -v \cdot \nabla \Phi \quad (21)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -v \cdot \nabla \psi - \kappa \psi \quad (22)$$

Pour ce faire, à chaque incrément de temps, les valeurs de Φ et ψ sont calculées pour tous les nœuds du maillage à partir d'interpolation précises de leurs valeurs à l'incrément précédent ainsi que du vecteur vitesse v .

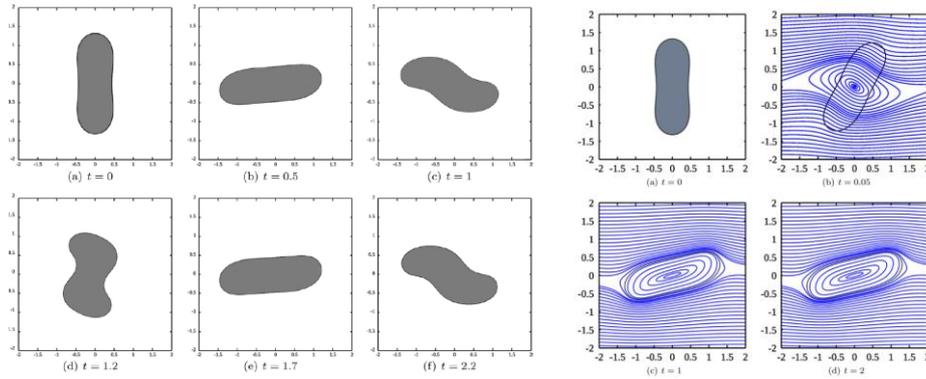


Figure 5: Déformation des vésicules lipidiques au cours de temps

L'énergie correspondant à la déformation de la membrane s'écrit sous la forme suivante :

$$\int \left(\frac{1}{2} b_n \kappa^2 + \gamma \right) dA \quad (23)$$

Avec b_n la rigidité à la flexion, κ la courbure de la membrane et γ la tension surfacique. Comme expliqué précédemment, la variation de l'énergie par rapport à la perturbation générale de la surface nous donne l'expression de la force sur la membrane :

$$\left(\nabla \cdot \left(\frac{1}{2} b_n \kappa^2 + \gamma \right) \right) n \quad (24)$$

Où l'indice s désigne un vecteur tangentiel et $\nabla_s^2 = \nabla_s \cdot \nabla_s$ est le laplacien surfacique. Multipliée par une fonction Dirac et exprimée en fonction de la fonction level-set, on obtient l'équation de Navier-Stokes modifiée suivante :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla v + \nabla^T v)) \\ &+ \delta(\phi)(|\nabla\phi|\nabla_s \gamma - \gamma\kappa\nabla\phi) + b_n \delta(\phi) \left(\nabla_s^2 \kappa + \frac{1}{2} \kappa^3 \right) \nabla\phi \\ \nabla \cdot v &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Les auteurs proposent une méthode de projection à 4 étapes qui permet d'éviter une résolution mixte de (23) tout en assurant l'incompressibilité du fluide et de la surface à la fois, en plus d'un calcul précis des termes sources supplémentaires :

$$\rho \frac{a - u_d}{\Delta t} = \frac{1}{Bn} \nabla \cdot (\mu \nabla^T u_n) + \frac{1}{Bn} \left(\nabla_s^2 \kappa + \frac{1}{2} \kappa^3 \right) \delta(\phi) \nabla\phi \quad (26)$$

$$\rho \frac{b - a}{\Delta t} = -\nabla p_{n+1} \quad \text{avec} \quad \nabla \cdot u_{n+1} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (27)$$

$$\rho \frac{c - b}{\Delta t} = \frac{1}{Bn} \nabla \cdot (\mu \nabla c) \quad (28)$$

$$\rho \frac{u_{n+1} - c}{\Delta t} = \delta(\phi)(|\nabla\phi|\nabla_s \gamma_{n+1} - \gamma_{n+1} \kappa \nabla\phi) \quad \text{avec} \quad \nabla_s \cdot u_{n+1} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \quad (29)$$

Où a, b, c sont des champs intermédiaires.

Plusieurs tests numériques sont proposés et les résultats montrent que cette approche de projection est stable, précise et respecte bien l'ordre de convergence. Néanmoins, la question du coût de résolution de ces 4 équations reste à vérifier.

2.5. Approche phase-field

La dernière méthode présentée dans ce rapport concerne l'utilisation d'une approche phase-field [12, 13] pour calculer la force membranaire [21]. La forme d'équilibre de la membrane est caractérisée par une minimisation de l'énergie élastique de flexion :

$$E = \int_{\Gamma} \frac{K}{2} (H - c_0)^2 dS \quad (30)$$

Avec $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ la courbure moyenne, κ_1 et κ_2 représentent les courbures principales de la surface de la membrane, c_0 est la courbure spontanée de la membrane et K la rigidité à flexion.

On rappelle brièvement l'utilité de la méthode phase-field pour évaluer cette énergie. La description de la membrane est effectuée par une fonction ϕ prenant la valeur +1 à l'intérieur de la membrane et -1 à l'extérieur, avec une zone de transition de faible épaisseur caractérisée par un paramètre positif ε . Définie à partir d'un modèle physique, cette fonction a pour avantage de donner naturellement accès à une expression de l'énergie

$$E_\varepsilon(\phi) = \frac{\kappa}{2\varepsilon} \int_Q |\mathbf{f}(\phi)|^2 dx \quad \text{avec} \quad \mathbf{f}(\phi) = -\varepsilon \Delta \phi + \frac{1}{\varepsilon} (\phi^2 - 1)\phi \quad (31)$$

La déformation de la membrane, l'énergie et le champ de vitesse du fluide sont considérés comme le résultat d'une compétition entre l'énergie de flexion de la membrane et l'énergie cinétique du fluide, en tenant compte des contraintes de préservation du volume et de la surface. Pour cela, on ajoute deux termes de pénalisation à l'expression de l'énergie élastique et on obtient :

$$E(\phi) = E_\varepsilon(\phi) + \frac{1}{2} M_1 (A(\phi) - \alpha)^2 + \frac{1}{2} M_2 (B(\phi) - \beta)^2 \quad (32)$$

Avec :

$$A(\phi) = \int_Q \phi dx, \quad B(\phi) = \int_Q \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (|\phi|^2 - 1)^2 \right) dx \quad (33)$$

L'équation de Navier-Stokes s'écrit donc :

$$\rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \mu \nabla^2 u + \nabla p = \frac{\delta E(\phi)}{\delta \phi} \nabla \phi \quad \text{dans } \Omega \times [0, T] \quad (34)$$

Avec $\frac{\delta E(\phi)}{\delta \phi}$ la dérivée fonctionnelle de $E(\phi)$ par rapport à la variable ϕ .

Les auteurs dans [22] utilisent cette approche pour étudier les membranes vésiculaires, formées par des bicouches lipidiques et jouant un rôle primordial dans la fonction biologique (figure 6).

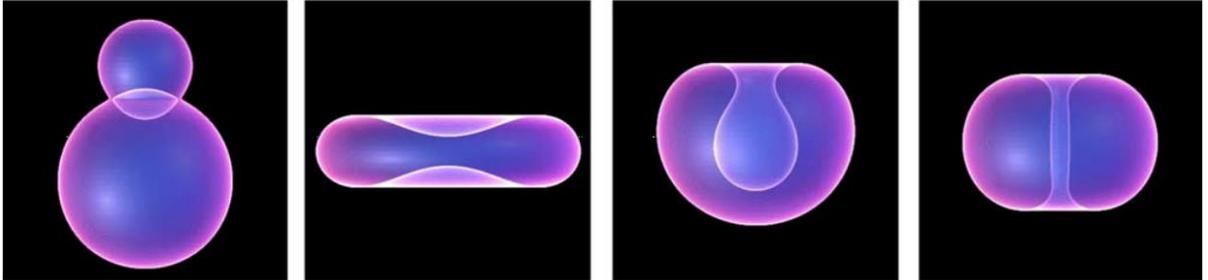


Figure 6: visualisation 3d de: Bulles jumelées, disque creux, pot rond et d'un tore

Cette approche est intéressante pour étudier l'interaction des membranes fines et immergées. Toutefois, son utilisation est restreinte aux écoulements laminaires. L'extension de la méthode phase-field aux écoulements turbulents nécessite une implémentation numérique stable.

Conclusion & perspectives

Dans ce rapport, on s'est intéressé à l'étude de l'interaction fluide-structure dans le cas où la structure est constituée d'une membrane. Cette étude avait pour but d'exposer les différentes méthodes numériques utilisées dans la littérature pour modéliser ce phénomène. La plupart de ces approches implique une modification des équations de Navier-Stokes en ajoutant un terme source qui traduit la force qu'exerce la membrane sur le fluide. La technique la plus intéressante, dans le cadre des méthodes numériques développées au CEMEF, consiste à exprimer cette force en fonction d'une fonction level-set et d'une masse de Dirac régularisée. L'avantage avec cette méthode est qu'elle expose les caractéristiques géométriques et physiques de la structure. Néanmoins, on peut aussi constater que l'approche phase-field donne des résultats intéressants. On commencera donc par implémenter ces deux méthodes, pour pouvoir les comparer en termes de précision, de stabilité et de temps de calcul en les appliquant à des cas-tests simples trouvés dans la littérature. Une fois choisie la méthode appropriée, on l'utilisera pour modéliser l'aéroélasticité du dirigeable Stratobus.

Bibliographie

- [1] Y. Mesri, H. Guillard, T. Coupez, Automatic coarsening of three dimensional anisotropic unstructured meshes for multigrid applications. *Journal of Applied Mathematics and Computation*. 218 (21), 10500-10519, 2012
- [2] Y. Mesri, *Gestion et contrôle des maillages non structurés anisotropes : applications en aérodynamique*. Nice, 2007.
- [3] Y. Mesri, M. Khalloufi, and E. Hachem, "On optimal simplicial 3D meshes for minimizing the Hessian-based errors," *Appl. Numer. Math.*, vol. 109, pp. 235–249, Nov. 2016.
- [4] Y. Mesri, H. Dignonnet, and T. Coupez, "Hierarchical adaptive multi-mesh partitioning algorithm on heterogeneous systems," in *Parallel Computational Fluid Dynamics 2008*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010, pp. 299–306.
- [5] Y. Mesri, J.-M. Gratien, O. M. Ricois, and R. Gayno, "Parallel Adaptive Mesh Refinement for Capturing Front Displacements: Application to Thermal EOR Processes.," presented at the SPE Reservoir Characterization and Simulation Conference and Exhibition, 2013.
- [6] E. Hachem, H. Dignonnet, E. Massoni, and T. Coupez, "Immersed volume method for solving natural convection, conduction and radiation of a hat-shaped disk inside a 3D enclosure," *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, vol. 22, no. 6, pp. 718–741, août 2012.
- [7] E. Hachem, S. Feghali, R. Codina, and T. Coupez, "Immersed stress method for fluid–structure interaction using anisotropic mesh adaptation," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 94, no. 9, pp. 805–825, juin 2013.
- [8] E. Hachem, G. Jannoun, J. Veysset, and T. Coupez, "On the stabilized finite element method for steady convection-dominated problems with anisotropic mesh adaptation," *Appl. Math. Comput.*, vol. 232, pp. 581–594, avril 2014.
- [9] E. Hachem *et al.*, "Modeling of heat transfer and turbulent flows inside industrial furnaces," *Simul. Model. Pract. Theory*, vol. 30, pp. 35–53, Jan. 2013.
- [10] R. Valette *et al.*, "Méthodes d'interaction fluide-structure pour la simulation multi-échelles des procédés de mélange," *Mech. Ind.*, vol. 8, no. 03, pp. 251–258, mai 2007.
- [11] C. Bost, "Méthodes Level-Set et pénalisation pour le calcul d'interactions fluide-structure," phdthesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008.
- [12] C. S. Peskin, "Numerical analysis of blood flow in the heart," *J. Comput. Phys.*, vol. 25, no. 3, pp. 220–252, Nov. 1977.
- [13] G.-H. Cottet and E. Maitre, "A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid–structure interaction problems," *Comptes Rendus Math.*, vol. 338, no. 7, pp. 581–586, avril 2004.
- [14] A. Heintz, "A numerical method for simulation dynamics of incompressible lipid membranes in viscous fluid," *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 289, pp. 87–100, décembre 2015.
- [15] T. Engels, D. Kolomenskiy, K. Schneider, and J. Sesterhenn, "Numerical simulation of fluid–structure interaction with the volume penalization method," *J. Comput. Phys.*, vol. 281, pp. 96–115, Jan. 2015.
- [16] G.-H. Cottet and E. Maitre, "A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces," *Math. Models Methods Appl. Sci.*, vol. 16, no. 03, pp. 415–438, 2006.

- [17] E. Maitre, T. Milcent, G.-H. Cottet, A. Raoult, and Y. Usson, "Applications of level set methods in computational biophysics," *Math. Comput. Model.*, vol. 49, no. 11–12, pp. 2161–2169, juin 2009.
- [18] D. Salac and M. Miksis, "A level set projection model of lipid vesicles in general flows," *J. Comput. Phys.*, vol. 230, no. 22, pp. 8192–8215, Sep. 2011.
- [19] T. Biben, K. Kassner, and C. Misbah, "Phase-field approach to three-dimensional vesicle dynamics," *Phys. Rev. E*, vol. 72, no. 4, p. 041921, Oct. 2005.
- [20] G. Caginalp and X. Chen, "Phase Field Equations in the Singular Limit of Sharp Interface Problems," in *On the Evolution of Phase Boundaries*, M. E. Gurtin and G. B. McFadden, Eds. Springer New York, 1992, pp. 1–27.
- [21] Q. Du, M. Li, and C. Liu, "Analysis of a phase field Navier-Stokes vesicle-fluid interaction model," *DISCRETE Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, vol. 8, no. 3, p. 539, 2007.
- [22] Q. Du, C. Liu, and X. Wang, "A phase field approach in the numerical study of the elastic bending energy for vesicle membranes," *J. Comput. Phys.*, vol. 198, no. 2, pp. 450–468, août 2004.
- [23] A. Dervieux, Y. Mesri, F. Alauzet, A. Loseille, L. Hascoet, and B. Koobus. Continuous Mesh Adaptation Models for CFD. *Computational Fluid Dynamics Journal* 16 (4), 346-355, 2008
- [24] Y. Mesri, JM. Gratien, O. Ricois, R. Gayno, Parallel Adaptive Mesh Refinement for Capturing Front Displacements : Application to Thermal EOR Processes, SPE-166058-MS, SPE paper, 2013
- [25] S. Brogniez, C. Farhat, E. Hachem, A high-order discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for advection–diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *Vo. 264*, pp. 49-66, 2013
- [26] E. Hachem, S. Feghali, T. Coupez, R. Codina, A three-field stabilized finite element method for fluid-structure interaction: elastic solid and rigid body limit, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *Vol. 104*, pp. 566 - 584, 2015
- [27] S. Brogniez, C. Farhat, E. Hachem, A high-order discontinuous Galerkin method with Lagrange multipliers for advection–diffusion problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *Vo. 264*, pp. 49-66, 2013
- [28] G. Jannoun, E. Hachem, J. Veysset, T. Coupez, Anisotropic meshing with time-stepping control for unsteady convection-dominated problems, *Applied Mathematical Modelling*, *Vol. 39*, pp. 1899-1916, 2015