



**HAL**  
open science

## Contact élastique entre des surfaces rugueuses représentatives

Vladislav Yastrebov, Guillaume Anciaux, Georges Cailletaud, Jean-François  
Molinari

► **To cite this version:**

Vladislav Yastrebov, Guillaume Anciaux, Georges Cailletaud, Jean-François Molinari. Contact élastique entre des surfaces rugueuses représentatives. 21ème Congrès Français de Mécanique, CFM 2013, Aug 2013, Bordeaux, France. 6 p. hal-00941273

**HAL Id: hal-00941273**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-00941273>**

Submitted on 3 Feb 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Contact élastique entre des surfaces rugueuses représentatives

V. A. Yastrebov<sup>a</sup>, G. Anciaux<sup>b</sup>, G. Cailletaud<sup>a</sup>, J.-F. Molinari<sup>b</sup>

a. Centre des Matériaux, MINES ParisTech, CNRS UMR 7633, Evry, France

b. Laboratoire de Simulation en Mécanique des Solides, ENAC, EPFL, Lausanne, Suisse

## Résumé :

*Dans ce travail nous étudions l'évolution de l'aire réelle de contact entre des surfaces nominale-ment plates mais réellement rugueuses. Puis nous explicitons la loi phénoménologique proposé dans [28] pour décrire cette évolution. Enfin, nous suggérons des pistes pour le développement de la théorie du contact rugueux en partant des résultats de simulations numériques.*

## Abstract :

*In this work we study the evolution of the real contact area between nominally flat rough surfaces. We derive the phenomenological law proposed in [28] to describe this evolution and we suggest some approaches for the further development of the rough-contact theory based on numerical simulations.*

**Mots clefs :** rugosité ; contact ; aire réelle de contact.

## 1 Introduction

La rugosité des surfaces que l'on rencontre dans la nature est très variée, mais à partir d'une certaine magnification les surfaces peuvent être considérées comme fractales (auto-affines) avec une probabilité de distribution des hauteurs qui suit une lois normale [22]. Pour cela des surfaces nominale-ment plates (mais réellement rugueuses) qui sont mises en contact<sup>1</sup> se touchent sur l'*aire réelle de contact*  $A$  qui est inférieure à l'aire apparente de contact  $A_0$ . L'aire réelle augmente avec la pression  $p_0$  qui comprime deux surfaces ; son augmentation est due à la croissance du nombre des taches de contact et de leurs aires.

L'aire réelle de contact détermine les propriétés de l'usure, du frottement et le transfert de l'énergie au travers de l'interface entre deux corps. En plus, la topologie des zones de contact contrôle le passage du gaz et du liquide dans le volume libre entre deux corps. Pour cette raison il est important de pouvoir prédire, pour des surfaces données, comment l'aire réelle de contact évolue avec la pression. Pourtant ce n'est pas une simple tâche car la rugosité des surfaces s'étend sur plusieurs échelles<sup>2</sup> et ce sont les modes de plus hautes fréquences qui sont responsables de nombreuses propriétés du contact rugueux. Le comportement du matériaux à cette échelle ne peut donc pas toujours être approximé comme étant élastique, isotrope et homogène. De plus pour différents matériaux, l'énergie de surface, l'humidité et même la force de Casimir [2] peuvent jouer des rôles importants à partir d'une certaine échelle.

Dans cet article nous nous limitons au cas le plus simple : matériaux élastiques et rugosité finie et nous supposons que la description de la mécanique continue est valide. Malgré la simplicité du cas considéré, l'évolution de l'aire réelle de contact n'est pas complètement comprise. Deux approches analytiques au problème du contact rugueux peuvent être distinguées : 1) basée sur la notion des aspérités [9, 3, 7] ;

---

<sup>1</sup>En fait ce ne sont pas des surfaces qui sont mises en contact, mais deux demi-espaces déformables ayants des surfaces rugueuses ; le terme "contact entre des surfaces" est utilisé pour raccourcir le texte.

<sup>2</sup>Pour certaines surfaces l'aspect fractale est préservé jusqu'à l'échelle atomique [16], où la mécanique continue n'est plus valable [17].

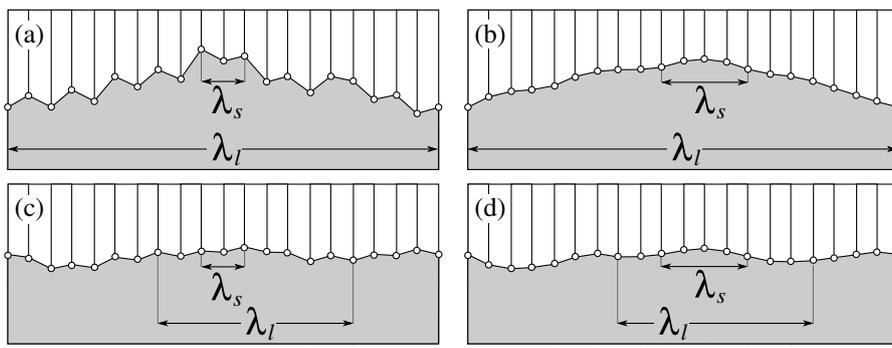


FIG. 1 – Profils rugueux : (a) et (b)  $\lambda_l = L$ , les profils contiennent une aspérité majeure, donc ils ne sont pas représentatifs; profils (c) et (d) sont plus représentatifs  $\lambda_l < L$ ; (a) et (c)  $\lambda_s = \Delta x$ , mauvaise résolution locale; (b) et (d)  $\lambda_s > \Delta x$ , résolution locale correcte.

2) basée sur la description spectrale des surfaces et le contact complet [21, 20]. La première approche est valide pour des petites pressions, quand les taches de contact sont éloignées les unes des autres, et surtout quand il n’y a pas de jonction des taches de contact. La deuxième approche, au contraire, est valable pour des grandes pressions quand presque toute la surface est en contact.

Différentes méthodes numériques<sup>3</sup> ont été également utilisées pour aborder cette problématique pour des surfaces fractales auto-affines [18]. Pourtant, dans les premières simulations [12, 19] la fractalité a été préservée jusqu’à la discrétisation de la surface. Chaque aspérité n’a donc été représentée que par un seul nœud, qui a amené à surestimer l’aire réelle de contact locale et à altérer localement le lien entre la pression de contact et le déplacement [Fig. 1 (a),(c)]. Ce défaut a été corrigé dans les études suivantes [13, 6] où la longueur d’onde minimale  $\lambda_s$  dans le spectre de la rugosité a été introduite telle que le pas  $\Delta x$  de discrétisation de la surface de contact soit inférieure à la longueur d’onde minimale  $\Delta x \ll \lambda_s$ . Dès lors, une telle surface peut être considérée comme lisse à partir d’une certaine magnification. Cela permet de résoudre le problème du contact mécanique correctement. Cependant il y avait un autre défaut des surfaces considérées dans ce type d’analyse : leur *non-représentativité*.

Dans cet article la notion de la représentativité géométrique et mécanique en mécanique du contact va être précisée; puis les conditions et les méthodes de calculs vont être expliquées. En mesurant la lois d’évolution pour l’aire réelle de contact nous ouvrons la discussion sur la distribution des pressions de contact, sur sa normalisation et son rapport avec la théorie de Persson [21, 20].

## 2 Génération des surfaces rugueuses

Dans la plupart des analyses numériques on considère des surfaces périodiques parce que cela permet d’éviter des effets de bord et d’approcher des cas de surfaces réalistes ainsi que des théories analytiques. En même temps il ne faut pas négliger que les forces élastiques agissent sur de longues portées (avec une décroissance inversement proportionnelle à la distance). Cela exige que le choix de la surface élémentaire représentative soit assez strict, tout comme le choix du volume élémentaire représentatif [15] lors d’analyses de micro-structures. En général, dans n’importe quel système périodique avec des propriétés aléatoires (rugosité des surfaces, composition des composites, réseaux de dislocations, distributions des charges électriques ou de la masse dans l’espace) et des interactions à longue portée (élastiques, électriques, gravitationnelles) il existe une mesure de représentativité géométrique qui est fortement liée à la représentativité du comportement du système et donc à la proximité qu’auront différentes réalisations du même système entre elles. Notez que le comportement d’un système aléatoire, mais non-représentatif, moyenné sur plusieurs réalisations est différent du comportement d’un système plus représentatif, car le comportement d’un système non-représentatif est perturbé par la périodicité et des forces à longue portée.

Dans l’article [28] nous avons montré que la représentativité géométrique est fortement connectée à la longueur d’onde maximale  $\lambda_l$  présente dans le spectre d’une surface rugueuse. Comme la répartition de la pression de contact est déterminée par la rugosité, il y a un lien direct entre la représentativité

<sup>3</sup>Parmi les méthodes numériques utilisées pour ce type de calcul il y a différentes réalisations de la méthode des éléments de frontière [1, 26]; de la méthode des éléments finis [12, 19, 10, 29]; ou encore du GFMD (Green Function Molecular Dynamics) [4, 6].

géométrique et mécanique. La première est introduite par la proximité de la distribution des hauteurs à la distribution normale [28] ou à la distribution nominale [29]. Si, par exemple,  $\lambda_l = L$  où  $L$  est la taille d'un système modélisé (comme c'était supposé dans les études [12, 5, 23, 25]), la surface a une aspérité majeure [Fig. 1 (b),(d)], ce qui cause une forte altération des résultats. En particulier on observerait une sous-estimation de l'aire réelle de contact et une dépendance à l'exposant de Hurst  $H$ <sup>4</sup>. Il fut démontré dans [28] que si le contact est résolu correctement sur chaque aspérité (si et seulement si  $\lambda_s \gg \Delta x$ ) et si la surface est suffisamment représentative (si et seulement si  $\lambda_l \ll L$ ), alors l'évolution de l'aire réelle de contact ne dépend plus de l'exposant de Hurst. Ce résultat est en conformité avec les théories analytiques basées traitant des aspérités [9, 3, 7] et la théorie de Persson [21, 20], qui sont construites pour des surfaces infinies.

### 3 Modèles et théories

Pour obtenir des résultats fiables et précis nous avons générés des surfaces  $L \times L$  avec une discrétisation  $\Delta x = L/1024$ ; pour chaque combinaison des  $L/\lambda_s = 32, 64, 128, 256, 512$ ,  $L/\lambda_l = 1, 2, 8, 16$  et  $H = 0.20, 0.36, 0.52, 0.68, 0.84$ , nous avons généré 30 réalisations différentes des surfaces avec une méthode de filtrage décrite dans [11]. Les calculs mécaniques ont été effectués avec la méthode FFT [26]<sup>5</sup> dans laquelle la nature semi-infinie du volume élastique ainsi que la périodicité de la surface sont inhérentes à la méthode. De plus la méthode est extrêmement efficace. Pour chaque réalisation de surface, la pression appliquée est augmentée jusqu'à  $p_0 = 0.05E^*$  en 30 incréments (où  $E^*$  est le module de Young effectif [14]), ce qui correspond approximativement une fraction de l'aire de contact réelle  $A/A_0 \approx 10\%$ .

Bush, Gibson et Thomas ont déduit dans [3] que, dans la limite du contact infinitésimal, l'aire réelle de contact est proportionnelle à la pression normalisée :

$$\frac{A}{A_0} = \kappa \frac{p_0}{E^* \sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle}}, \quad (1)$$

où  $\sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle}$  est une moyenne quadratique de la pente de surface et  $\kappa$  est le coefficient de proportionnalité. Ces travaux ont démontré l'unicité de ce dernier, indifféremment de la surface. Mais dans les théories basées sur la notion d'aspérité [3, 27, 8] ce coefficient valait numériquement  $\kappa = \sqrt{2\pi} \approx 2.5$ , tandis que la théorie de Persson [21, 20] trouvait  $\kappa = \sqrt{8/\pi} \approx 1.6$ . Des valeurs intermédiaires et dépendantes de l'exposant de Hurst ont été obtenues par différents calculs numériques [12, 5, 23, 25] employant des surfaces non-représentative.

Pourtant, l'équation (1) n'est valable que pour le contact infinitésimal. Selon la théorie BGT [3], pour des pressions réalistes l'évolution de l'aire réelle de contact est fortement non-linéaire et dépend de la rugosité, à savoir du paramètre

$$\alpha = m_0 m_4 / m_2^2 \quad (2)$$

$$m_i = \int_{k_s=2\pi L/\lambda_s}^{k_l=2\pi L/\lambda_l} k^i C(k) dk \quad (3)$$

où  $m_i$  est le  $i$ -ème moment spectral. Dans la théorie de Persson, cette évolution ne dépend que de la moyenne quadratique de la pente de surface est s'exprime comme

$$\frac{A}{A_0} = \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{2} p_0}{E^* \sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle}} \right) \quad (4)$$

<sup>4</sup>La fractalité de la rugosité est déterminée en conformité avec décroissance de sa densité spectrale  $C(k) \sim k^{-2(1+H)}$ , où  $k$  est le numéro du mode  $k \sim 1/\lambda$  et où l'exposant de Hurst  $H$  détermine la vitesse de cette décroissance.

<sup>5</sup>La formulation générale de l'algorithme de résolution [26] contient une erreur : la solution est décalée d'un mode dans l'espace de Fourier. La version corrigée de cette méthode, validée sur plusieurs tests de références, est utilisée dans cette étude.

## 4 Aire réelle de contact

Dans l'article [28] nous avons déduit que pour des surfaces représentatives ( $\lambda_l \ll L$ ), lorsque le contact est bien résolu ( $\lambda_s \gg \Delta x$ , par exemple pour  $\lambda_l = 16, \lambda_s = 32$ ) la variation de la pression de contact moyenne  $\bar{p} = F/A$ , sous une pression externe  $p_0 = F/A_0$ , décroît selon une loi puissance suivant la forme

$$\frac{d\bar{p}}{dp_0} = \beta \left( \frac{A_0}{A} \right)^\mu, \quad \beta > 0, \quad 0 < \mu < 1. \quad (5)$$

En développant les termes  $\bar{p}$  et  $p_0$  on obtient une équation

$$F \frac{dA}{dF} = A - \beta A_0 \left( \frac{A_0}{A} \right)^{\mu-2}$$

que l'on intègre de  $A_c$  jusqu'à  $A$  et de  $F_c$  jusqu'à  $F$

$$\int_{A_c}^A \frac{d(A/A_0)}{A/A_0 - \beta (A/A_0)^{2-\mu}} = \int_{F_c}^F \frac{dF}{F} \Rightarrow \frac{1}{\mu-1} \ln \left( \frac{(A/A_0)^{\mu-1} - \beta}{(A_c/A_0)^{\mu-1} - \beta} \right) = \ln(F/F_c) \quad (6)$$

Pour les limites inférieures d'intégration  $F_c \rightarrow 0$ ,  $A_c \rightarrow 0$  on suppose que l'aire réelle de contact est proportionnelle à la pression avec la normalisation de la théorie BGT, que l'on substitue dans la partie gauche de l'équation (6) :

$$A_c = \frac{\kappa}{\sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle} E^*} F_c \Rightarrow \frac{1}{\mu-1} \ln \left( \frac{(A/A_0)^{\mu-1} - \beta}{\left( \frac{\kappa}{\sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle} E^*} F_c / A_0 \right)^{\mu-1} - \beta} \right) = \ln(F/F_c).$$

Comme  $\mu - 1 < 0$  et  $F_c \rightarrow 0$  on peut négliger le coefficient  $\beta$  dans le dénominateur; en prenant l'exponentielle des deux parties de cette équation on obtient l'évolution de l'aire réelle de contact

$$\frac{(A/A_0)^{\mu-1} - \beta}{\left( \frac{\kappa}{\sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle} E^*} F_c / A_0 \right)^{\mu-1}} = (F/F_c)^{\mu-1} \Rightarrow \boxed{\frac{A}{A_0} = \left[ \beta + \left( \frac{\kappa p_0}{\sqrt{\langle |\nabla h|^2 \rangle} E^*} \right)^{\mu-1} \right]^{1/(\mu-1)}} \quad (7)$$

Cette loi phénoménologique possède trois paramètres  $\beta, \mu$  et  $\kappa$  et permet d'estimer l'évolution de l'aire réelle de contact jusqu'à  $\approx 15\%$  de l'aire de contact. Les paramètres de cette loi ont été identifiés dans [28]

$$\kappa = 1.145\sqrt{2\pi} \approx 2.87, \quad \mu = 0.55 \pm 0.02, \quad \beta = 0.210 \pm 0.005$$

Sur la Figure [?] est comparée cette loi avec la théorie BGT [3] complète et asymptotique (pour  $m_0 m_4 / m_2^2 = 2$ ) ainsi qu'avec la théorie de Persson [21, 20].

## 5 Discussions et perspectives

Dans l'article [28] la notion de représentativité a été utilisée pour obtenir des courbes réalistes de l'évolution de l'aire de contact réelle entre deux surfaces élastiques nominalement plates et aléatoirement rugueuses. Nous affirmons que pour simuler convenablement leur comportements il est indispensable de n'introduire que les longueurs d'ondes satisfaisant  $L \ll \lambda_l \ll \lambda_s \ll \Delta x$ , où  $L$  est la période des surfaces simulées,  $\lambda_l, \lambda_s$  sont les longueurs d'ondes maximales et minimales contenues dans le spectre, et  $\Delta x$  est le pas de discrétisation. Il est numériquement envisageable de satisfaire rigoureusement ces conditions. Pour cela Müser et Prodanov [24] ont proposé d'introduire des paramètres adimensionnels et d'effectuer une analyse limite :

$$\varepsilon_l = \lambda_l / L, \quad \varepsilon_s = \lambda_s / \lambda_l, \quad \varepsilon_d = \Delta x / \lambda_s. \quad (8)$$

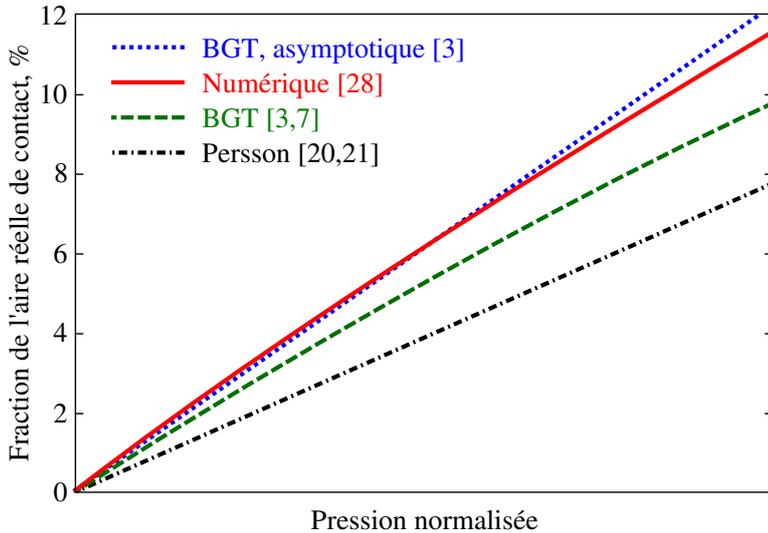


FIG. 2 – Évolution de l'aire réelle de contact pour la lois phénoménologique (7), l'évolution calculé par la théorie BGT [3, 7] pour  $m_0 m_4 / m_2^2 = 2$ , valeur asymptotique de la BGT et l'évolution selon la théorie de Persson [21, 20].

L'évolution de l'aire réelle pouvait alors être approximée comme

$$A/A_0 = f(p') + c(p', \varepsilon_s, \varepsilon_l, \varepsilon_d, H) \approx f(p') + \alpha \varepsilon_s a(p', H) + \beta \varepsilon_l b(p', H) + \gamma \varepsilon_d g(p', H) \quad (9)$$

où  $f(p')$  détermine l'évolution de l'aire de contact réelle d'une surface infinie,  $p' = \frac{p_0}{E^* \sqrt{(|\nabla h|^2)}}$  avec les fonctions supplémentaires  $a(p', H) \rightarrow 0$ ,  $b(p', H) \rightarrow 0$ ,  $g(p', H) \rightarrow 0$  pour  $p' \rightarrow 0$ . L'équation (9) permet de déduire précisément la valeur de  $f(p')$  pour  $p' \rightarrow 0$  à partir des nombreuses simulations et ainsi trouver les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  avec les formes des fonctions  $a, b, g$ . Pourtant cette approche semble être difficile à utiliser afin d'estimer l'évolution de l'aire de contact au-delà des valeurs infinitésimales parce que les formes des fonctions  $a(p', H), b(p', H), g(p', H)$  restent complètement ouvertes.

Une autre étude intéressante que nous poursuivons, recherche les tendances de l'évolution de l'aire réelle de contact en fonction de la largeur de la bande des fréquences  $\alpha = m_0 m_4 / m_2^2$ , qui est un paramètre déterminant dans les théories basées sur la notion d'aspérité [9, 3, 7]. Toutefois, cette étude nécessite de très grands calculs et donc l'amélioration des codes de calculs utilisés. En effet le paramètre  $\alpha$  peut varier fortement en augmentant le nombre de modes dans le spectre des surfaces générées.

L'autre étude que nous présenterons concerne l'analyse de la densité de probabilité de la pression de contact  $P(p)$  qui est une des quantités fondamentales dans la théorie de Persson [21, 20]. Pour construire précisément  $P(p)$  à partir de calculs discrétisés, nous avons introduit une technique d'interpolation qui respecte la condition  $P(0) = 0$ , et qui à son tour contraint la condition stricte  $\nabla p|_{p=0} = \infty$ .

## Références

- [1] J. Allwood and H. Ciftci. An incremental solution method for rough contact problems. *Wear*, 258(11–12) :1601 – 1615, 2005.
- [2] E. Buks and M. L. Roukes. Stiction, adhesion energy, and the casimir effect in micromechanical systems. *Phys Rev B*, 63 :033402, Jan 2001.
- [3] A. W. Bush, R. D. Gibson, and T. R. Thomas. The elastic contact of a rough surface. *Wear*, 35(1) :87–111, 1975.
- [4] C. Campañá and M. H. Müser. Practical green's function approach to the simulation of elastic semi-infinite solids. *Phys Rev B*, 74 :075420+, Aug. 2006.
- [5] C. Campañá and M. H. Müser. Contact mechanics of real vs. randomly rough surfaces : A green's function molecular dynamics study. *Europhys Lett*, 77 :38005, 2007.
- [6] C. Campañá, M. H. Müser, and M. O. Robbins. Elastic contact between self-affine surfaces : comparison of numerical stress and contact correlation functions with analytic predictions. *J Phys-Condens Mat*, 20 :354013, 2008.

- [7] G. Carbone and F. Bottiglione. Asperity contact theories : Do they predict linearity between contact area and load? *J Mech Phys Solids*, 56 :2555–2572, 2008.
- [8] J. A. Greenwood. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear*, 261 :191–200, 2006.
- [9] J. A. Greenwood and J. B. P. Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *P Roy Soc Lond A Mat*, 295 :300–319, 1966.
- [10] A. Haraldsson and P. Wriggers. A strategy for numerical testing of frictional laws with application to contact between soil and concrete. *Comput Method Appl M*, 190(8–10) :963 – 977, 2000.
- [11] Y. Z. Hu and K. Tonder. Simulation of 3-D random rough surface by 2-D digital filter and fourier analysis. *Int J Mach Tool Manu*, 32 :83–90, 1992.
- [12] S. Hyun, L. Pei, J. F. Molinari, and M. O. Robbins. Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. *Phys Rev E*, 70(2) :026117, 2004.
- [13] S. Hyun and M. O. Robbins. Elastic contact between rough surfaces : Effect of roughness at large and small wavelengths. *Trib Int*, 40 :1413–1422, 2007.
- [14] K. L. Johnson. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [15] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, and D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *Int J Solids Struct*, 40 :3647–3679, 2003.
- [16] J. Krim and G. Palasantzas. Experimental observations of self-affine scaling and kinetic roughening at sub-micron lengthscales. *Int J Mod Phys B*, 9 :599–632, 1995.
- [17] B. Luan and M. O. Robbins. The breakdown of continuum models for mechanical contacts. *Nature*, 435 :929–932, 2005.
- [18] P. Meakin. *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*. Cambridge University Press, 1998.
- [19] L. Pei, S. Hyun, J. F. Molinari, and M. O. Robbins. Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces. *J Mech Phys Solids*, 53 :2385–2409, 2005.
- [20] B. N. J. Persson. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Phys Rev Lett*, 87 :116101, 2001.
- [21] B. N. J. Persson. Theory of rubber friction and contact mechanics. *J Chem Phys*, 115 :3840–3861, 2001.
- [22] B. N. J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, A. I. Volokitin, and E. Tosatti. On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion. *J Phys-Condens Mat*, 17(1) :R1+, Jan. 2005.
- [23] R. Pohrt and V. L. Popov. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces. *Phys Rev Lett*, 108 :104301, 2012.
- [24] N. Prodanov and M. H. Müser. communication privée.
- [25] C. Putignano, L. Afferrante, G. Carbone, and G. Demelio. The influence of the statistical properties of self-affine surfaces in elastic contacts : A numerical investigation. *J Mech Phys Solids*, 60 :973–982, 2012.
- [26] H. M. Stanley and T. Kato. An FFT-based method for rough surface contact. *J Tribol-T ASME*, 119 :481–485, 1997.
- [27] T. R. Thomas. *Rough Surfaces*. Imperial College Press, second edition, 1999.
- [28] V. A. Yastrebov, G. Anciaux, and J.-F. Molinari. Contact between representative rough surfaces. *Phys Rev E*, 86(3) :035601(R), 2012.
- [29] V. A. Yastrebov, J. Durand, H. Proudhon, and G. Cailletaud. Rough surface contact analysis by means of the finite element method and of a new reduced model. *CR Mécanique*, 339 :473–490, 2011.