



**HAL**  
open science

## Vers une méthode FE2-APHR

Georges Peyre, David Ryckelynck, Frédéric Feyel, Serge Kruch

► **To cite this version:**

Georges Peyre, David Ryckelynck, Frédéric Feyel, Serge Kruch. Vers une méthode FE2-APHR. CSMA 2013 - 11ème colloque national en calcul des structures, May 2013, Giens, France. 8 p. hal-00856227

**HAL Id: hal-00856227**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-00856227>**

Submitted on 30 Aug 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Vers une méthode FE2-APHR

Georges PEYRE<sup>1</sup>, David RYCKELYNCK<sup>2</sup>, Frédéric FEYEL<sup>3</sup>, Serge KRUCH<sup>4</sup>

<sup>1</sup> ONERA,DMSM/MNU,georges.peyre@onera.fr

<sup>2</sup> Centre des Matériaux (Ecole des Mines),COCAS,david.ryckelynck@mines-paristech.fr

<sup>3</sup> ONERA,DMSM/MNU,frédéric.feyel@onera.fr

<sup>4</sup> ONERA,serge.kruch@onera.fr

**Résumé** — Les approches  $EF^2$  permettent de résoudre des problèmes multi-échelles non linéaires que l'on ne peut pas traiter avec des méthodes d'homogénéisation ou avec la méthode NTFA [2]. Les modèles  $EF^2$  ont en général une complexité superflue. Nous proposons une méthode d'hyperréduction multidimensionnelle pour réduire la complexité de ces modèles. Les bases réduites utilisées pour l'hyperréduction sont construites par la méthode APHR. Nous présentons ici la simulation la simulation d'une réponse macroscopique associée à des cellules microscopique ayant une réponse élastoplastique, à déformations plastiques très localisées.

**Mots clés** — hyper-réduction, multi-échelles, multi-niveau

## 1 Introduction

Les méthodes d'hyperréduction ont connu un véritable essor ces dernières années à la fois en mécanique des matériaux et en mécanique des fluides [12]. Elles permettent en effet de diminuer, parfois notablement, les coûts de calcul grâce à la construction d'un modèle réduit représentatif du comportement de la structure. On peut les considérer comme une extension du principe de symétrie. Elles sont très efficaces quand il s'agit de traiter les problèmes de redondance dans les calculs. D'où l'idée de chercher à les utiliser dans le cadre des méthodes  $EF^2$  qui accusent un coût de calcul souvent prohibitif. Dans cet article, on montre comment un problème  $EF^2$  classique peut se reformuler à l'échelle microscopique en un problème de réduction de modèle multidimensionnel où le paramètre externe considéré n'est autre que la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$ . C'est ce problème multidimensionnel micro qui est substitué à une loi de comportement analytique que l'on écrirait directement à l'échelle macroscopique. A ce titre, il doit renvoyer en chaque point de Gauss macroscopique, pour une valeur de déformation  $\mathbf{E}$ , non seulement une valeur  $\Sigma$  des contraintes macroscopiques qui entrent en jeu dans l'évaluation du résidu macro, mais aussi la valeur de la matrice tangente  $\frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \mathbf{E}}$  utilisée dans l'assemblage de la matrice de rigidité macro. Or si les contraintes macroscopiques sont accessibles à l'issue de chaque incrément du problème multidimensionnel puisque l'on connaît le champ de contraintes microscopiques, on ne dispose pas de l'information suffisante pour calculer les matrices tangentes macroscopiques en chaque point de Gauss, par la formulation même de l'algorithme d'hyperréduction [5]. Néanmoins, plusieurs méthodes peuvent être imaginées pour pallier cette difficulté, notamment celle qui consiste à utiliser une base réduite dans laquelle on exprimerait les coefficients de la matrice de rigidité multidimensionnelle micro comme suggéré dans [1]. Connaissant une estimation sur une base réduite de la matrice de rigidité micro, on pourrait alors en déduire une estimation des matrices tangentes aux points de Gauss macro. La construction d'un algorithme d'hyperréduction avec reconstruction des variables internes et des coefficients de la matrice de rigidité lacunaire est exposé dans [1]. Construire une base réduite pour la matrice tangente permet d'avoir une estimation de cette matrice tout en conservant une faible complexité à la dimension. Mais ce procédé peut s'avérer gourmand en mémoire et en temps de calcul dans les phases d'adaptation du modèle réduit au modèle réel qui conduisent à une réévaluation de la base. On propose donc ici une méthode alternative pour évaluer la matrice de rigidité macroscopique qui repose sur l'utilisation de l'algorithme BFGS [9].

## 2 Problème $EF^2$ multidimensionnel

Un schéma  $EF^2$  classique est constitué de deux étapes : une étape de localisation qui permet de passer de l'échelle macroscopique à l'échelle inférieure suivie d'une étape d'homogénéisation qui permet de revenir à l'échelle macro. En chaque point de Gauss du maillage macroscopique, les déformations  $\mathbf{E}$  sont prélevées et appliquées sur une cellule représentative de la microstructure locale du matériau que l'on sollicite en condition périodique. Ainsi, on cherche un champs de déplacement  $\mathbf{u}$  de la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{v}$ , avec  $\mathbf{v}$  un terme de fluctuation périodique, i. e.  $\mathbf{v}$  prend des valeurs égales aux points frontières homologues du domaine  $\mathcal{D}_i$  de la cellule  $i$  (on note par la suite  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_p$ ). On impose en outre à  $\sigma\mathbf{n}$  d'être antipériodique, i. e.  $\sigma\mathbf{n}$  prend des valeurs opposées aux points frontières homologues du domaine  $\mathcal{D}_i$  de la cellule  $i$ . Sous ces conditions l'unicité des champs microscopiques est assurée. C'est dans le cadre de ce type de schéma  $EF^2$  qu'on se place dans la suite. Pour plus de précision sur cette approche  $EF^2$ , on renvoie à [6].

Pour permettre d'utiliser des techniques d'hyperréduction multidimensionnelle, une réécriture du schéma  $EF^2$  a été effectuée. L'objectif est pouvoir traiter de front l'ensemble des problèmes éléments finis sur les cellules microscopiques. Ainsi, au lieu de traiter successivement les problèmes micro, un seul problème contenant l'ensemble des cellules est considéré. Les quantités commençant par  $\Delta$  se réfèrent à des variations constatées à l'issue d'une itération du problème macroscopique tandis que les quantités débutant par  $\delta$  relèvent de variations enregistrées à la suite d'une itération du problème microscopique. A chaque incrément de ce problème multidimensionnel micro, les conditions aux limites macroscopiques, i. e. l'ensemble des déformations macroscopiques  $\Delta\mathbf{E}_i$  pour  $i$  parcourant l'ensemble des points de Gauss macro sont imposées puis, dans un deuxième temps, l'équilibre microscopique  $\mathbf{R}^{micro}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}_{ext}^{micro} - \mathbf{F}_{int}^{micro}(\mathbf{u}) = 0$  est calculé par une méthode de Newton-Raphson. Cette méthode nécessite d'assembler d'une matrice de rigidité  $\mathbf{J}$  vérifiant :

$$\mathbf{J}^{micro} \delta\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{micro} \quad (1)$$

L'hypothèse de séparation des échelles sous-jacent au schéma  $EF^2$  implique que la matrice  $\mathbf{J}$  est diagonal par bloc, chaque bloc correspondant à un problème microscopique. On peut écrire :

$$\mathbf{J}^{micro} = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_p \end{bmatrix} \quad (2)$$

avec, si l'on considère des éléments de type périodique,  $J_i$  telle que :

$$J_i \delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} J_i^{(11)} & J_i^{(12)} \\ J_i^{(21)} & J_i^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} + \Delta\mathbf{E} \\ \delta\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} + \Delta\mathbf{R} + \delta\mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

où  $\mathbf{R}_{kl} = \Sigma_{kl} = \int_{\mathcal{D}_i} \sigma_{kl} dV$  si  $i = j$  et  $\mathbf{R}_{kl} = 2\Sigma_{kl} = 2 \int_{\mathcal{D}_i} \sigma_{kl} dV$  si  $i \neq j$ ,  $\Sigma$  désignant la contrainte macroscopique.  $\mathcal{D}_i$  est le domaine de la cellule périodique relative au  $i$ ème point de Gauss. Une fois l'équilibre microscopique mutidimensionnel établi, l'algorithme procède à la convergence vers l'équilibre macroscopique en deux étapes : l'évaluation du nouveau résidu et celle de la matrice de rigidité macro. A cette échelle, l'évaluation des forces internes  $\mathbf{F}_{macro}^{int}$  entrant dans le calcul du résidu nécessite la connaissance des contraintes  $\Sigma$  en chaque point de Gauss macro. En effet :

$$\mathbf{F}_{int}^{macro} = \int_{\Omega} {}^T B \Sigma dV \quad (4)$$

où  $\Omega$  désigne le domaine macroscopique. De même, pour assembler la matrice de rigidité macro  $\mathbf{K}^{macro}$ , il est indispensable de calculer les matrices tangentes en chaque point de Gauss macro pour assembler la matrice de rigidité macro globale selon :

$$\mathbf{K}^{macro} = \int_{\Omega} {}^T B \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta E} B dV \quad (5)$$

Les contraintes macro  $\Sigma$  sont calculés cellule par cellule en prenant simplement la moyenne des contraintes microscopiques. L'évaluation de la matrice tangente  $\left[ \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta E} \right]_i$  en un point de Gauss macro  $i$  est effectuée

à partir de la  $i$ ème matrice bloc, en pratiquant un complément de Schur sur le système (éq. 3) qui permet d'éliminer  $\delta\mathbf{v}$  et d'en déduire la matrice tangente associée au  $i$  point de Gauss ( $|\mathcal{D}_i|$  représente le volume de  $\mathcal{D}_i$ ) :

$$\left[ \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \mathbf{E}} \right]_i = \frac{1}{|\mathcal{D}_i|} \left( \left[ J_i^{(11)} \right] - \left[ J_i^{(12)} \right] \left[ J_i^{(22)} \right]^{-1} {}^T \left[ J_i^{(21)} \right] \right) \quad (6)$$

### 3 Principe de l'hyperréduction sur un cas simple

La discrétisation de la forme variationnelle de l'équilibre mécanique à résoudre s'écrit :

$$\mathbf{J}^{micro} \delta \mathbf{u} = -\mathbf{R}^{micro} \quad (7)$$

où  $\mathbf{J}^{micro} \in M_n(\mathbb{R}^{micro})$  est la matrice de rigidité et  $\mathbf{R}^{micro} \in \mathbb{R}^n$  le résidu. L'analyse de la méthode éléments finis révèle deux sources de complexité algorithmique : l'assemblage de  $\mathbf{J}^{micro}$ , une matrice creuse de grande dimension et la résolution du système (éq. 7). La réduction que l'on opère consiste à chercher la solution dans un espace réduit préalablement construit. Si l'on appelle  $\mathbf{A} \in M_{n,N}(\mathbb{R})$  l'expression des vecteurs d'une base de cette espace dans la base des fonctions de forme élément fini classique, on se ramène à résoudre le système de faible dimension :

$${}^T \mathbf{A} \mathbf{J}^{micro} \mathbf{A} \delta \mathbf{q} = -{}^T \mathbf{A} \mathbf{R}^{micro} \quad (8)$$

où  $\delta \mathbf{q} \in \mathbb{R}^N$ . Mais cette réduction est souvent insuffisante. En effet, l'opération  ${}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$  consiste en  $2Nn$  addition-multiplication. En outre, si l'on note  $\omega$  la largeur de bande de la matrice  $\mathbf{J}$ , le nombre d'addition-multiplication à effectuer pour calculer  ${}^T \mathbf{A} \mathbf{J} \mathbf{A}$  est  $2\omega nN + 2N^2n$ . Le calcul de  $\mathbf{J}$  est en  $O(\omega n)$ . Finalement la complexité de l'algorithme réduit dépend linéairement du nombre total de degré de liberté  $n$  du problème microscopique complet. Pour abaisser cette complexité algorithmique, on remarque que  $rg(\mathbf{J}^{micro}) = n$  alors que le système d'équation est de taille  $N \ll n$  et qu'une matrice  $\mathbf{J}^{micro}$  de rang  $N$  devrait suffire à rendre (éq. 8) inversible. L'hyperréduction consiste alors à ne sélectionner que quelques degrés de liberté. L'ensemble des éléments qui possèdent ces degrés de liberté constituent un sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  qu'on appelle *domaine d'intégration réduit* et qu'on note  $\mathcal{D}_\Pi$ . On introduit une matrice de sélection  $\mathbf{Z} \in M_{M,n}(\mathbb{R})$ .  $M$  est le nombre de degrés de liberté sélectionnés. On doit s'assurer que  $M \geq N$  pour rendre le système inversible.  $Z_{ij} = 1$  si  $j$  est le  $i$ ème degré de liberté sélectionné et  $Z_{ij} = 0$  dans tous les autres cas. On cherche à résoudre :

$${}^T \mathbf{A} {}^T \mathbf{Z} \mathbf{Z} \mathbf{J}^{micro} \mathbf{A} \delta \mathbf{q} = -{}^T \mathbf{A} {}^T \mathbf{Z} \mathbf{R}^{micro} \quad (9)$$

$\mathbf{Z} \mathbf{J}^{micro} \in M_{M,n}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{A} \in M_{n,N}(\mathbb{R})$  et  ${}^T \mathbf{A} {}^T \mathbf{Z} \in M_{N,M}(\mathbb{R})$ . Le nombre d'addition-multiplication requis pour calculer  $({}^T \mathbf{A} {}^T \mathbf{Z})(\mathbf{Z} \mathbf{J}^{micro}) \mathbf{A}$  est  $2MN^2 + 2MN\omega$ . Quand à la complexité du produit  $({}^T \mathbf{A} {}^T \mathbf{Z}) \mathbf{Z} \mathbf{R}^{micro}$ , elle est en  $O(NM)$ . Généralement,  $N \sim M$  ce qui conduit à affirmer que la complexité est indépendante du nombre d'éléments du problème complet mais qu'en revanche, elle dépend linéairement du nombre de degrés de liberté  $M$  sélectionnés i.e, en définitive, du nombre d'éléments figurant dans le domaine d'intégration réduit  $\mathcal{D}_\Pi$ .

Une illustration du principe d'hyperréduction est proposée dans un cas simple. A l'échelle macroscopique, on considère une barre représentée par deux éléments comportant chacun quatre points de Gauss qui renvoie à autant de cellules microscopiques. Le maillage du problème microscopique multidimensionnel est représenté sur la figure ???. Ces cellules correspondent à un composite métallique Sic/Ti modélisé en linéaire en 2D par une inclusion élastique ( $E = 400000MPa$ ,  $\nu = 0.19$ ) dans une matrice élastique ( $E = 110000MPa$ ,  $\nu = 0.3$ ). On sollicite la barre par deux tractions simples successives selon  $x$  et selon  $y$  en déformation plane. Les calculs sont menés en utilisant un modèle hyperréduit préalablement déterminé. Ce modèle qui rend compte de ces deux modes de sollicitation est décrit par la donnée :

- d'une base réduite de deux éléments  $(\phi_1, \phi_2)$  correspondant aux deux modes tirés des deux tractions. Pour plus de précision concernant cette étape de construction, nous renvoyons à [5] ;
- d'un domaine d'intégration  $\mathcal{D}_\Pi$  réduit. Les degrés de liberté sélectionné sont ceux portés par les noeuds se situant à l'intérieur du domaine.

Dans le cas élastique, ce modèle réduit permet de déterminer exactement les champs de contraintes, de déformation et de déplacement de la structure.

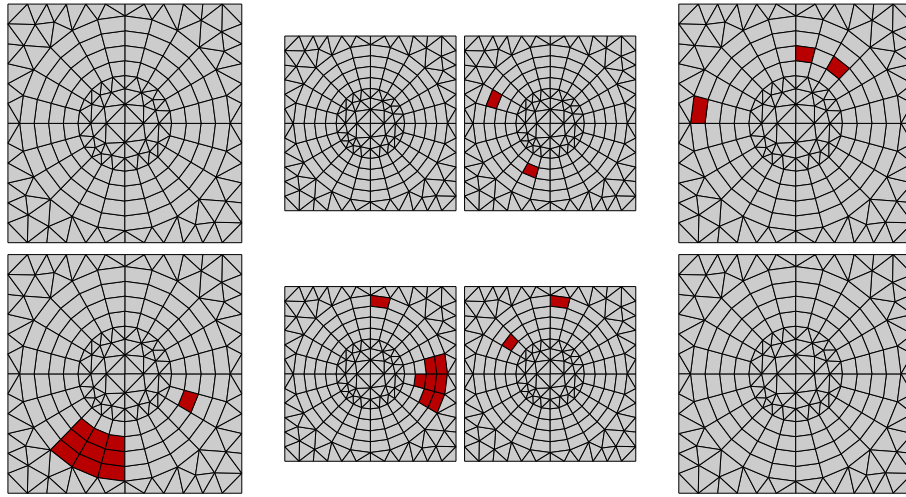


Fig. 1 – Domaine d’intégration réduit du modèle

La figure 1 correspond au problème multidimensionnel microscopique. Chaque cellule renvoie à un point de Gauss du maillage macroscopique. Le domaine hyperréduit  $\mathcal{D}_\Pi$  représenté en rouge est composé de 6 noeuds. Seules deux cellules sur 8 sont prises en compte. Comme la base réduite est de dimension 2, une condition nécessaire pour que le système 9 soit inversible est que  $rg(\mathbf{TZZ}) \geq 2$ , ce qui est vérifié dans ce cas où  $rg(\mathbf{TZZ}) = 12$ .

## 4 Nécessité de l’algorithme BFGS

Les algorithmes de type BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb et Shanno) sont utilisés en éléments finis pour actualiser des matrices. Ils étaient utilisés pour actualiser des matrices de taille importante et offraient une alternative au calcul complet ce qui conduisait à une diminution des coût CPU. Mais avec l’augmentation continue des puissances des calculateurs leur intérêt pour cette application se tarit : la différence entre le calcul complet et l’actualisation n’est plus significative. Cependant, ce type d’algorithme reste pertinent quand l’on doit fournir une matrice actualisée sans pouvoir la recalculer car l’information dont on dispose est insuffisante. Ces algorithmes sont ainsi appliqués en calcul des structures mécaniques dans le cadre des approches non-intrusives non-linéaires [10], où l’accès au matrice de rigidité globale du système mécanique est impossible. Dans ce cas, elle est inférée à partir de la matrice de rigidité élastique linéaire initiale, des incréments de déplacement et des forces externes. Lorsqu’à l’échelle micro, le calcul multidimensionnel est opéré sur base réduite, la matrice de rigidité est partiellement assemblée et il devient impossible d’en déduire la matrice de rigidité du système macroscopique. Il convient alors de l’estimer. Deux pistes ont été explorées :

- la première consiste à actualiser les matrices tangentes une à une et, à partir de ces matrices tangentes, à assembler la matrice de rigidité globale. L’actualisation est effectuée grâce à une méthode de type BFGS en se servant de la valeur des déformations et des contraintes macroscopiques qui, elles, sont toujours connues.
- la seconde, plus classique, est d’actualiser directement la matrice tangente macro à l’aide des déplacements macroscopiques à chaque itération.

### 4.1 Première méthode d’actualisation

Connaissant la matrice tangente en un point de Gauss  $\mathbf{K}^{(i)}$  à la  $i$ ème itération, l’évaluation de  $\mathbf{K}^{(i+1)}$  est menée sous une double condition :

- La matrice tangente en chaque point de Gauss à la  $i + 1$ ème itération dénotée  $\mathbf{K}^{(i+1)} = \left[ \frac{\partial \Delta \Sigma}{\partial \Delta \mathbf{E}} \right]^{(i+1)}$  présente des symétries mineures et majeurs qui doivent être respectées lors de la mise à jour à partir de l’opérateur  $\mathbf{K}^{(i)}$ . Ainsi, l’on doit avoir, si l’on adopte les notations de Voigt :

$$K_{kl}^{(i+1)} = K_{lk}^{(i+1)} \quad (10)$$

– De surcroît, la matrice cherchée  $\mathbf{K}^{(i+1)}$  doit être telle que :

$$\mathbf{K}^{(i+1)}\Delta\Sigma^{(i+1)} = \Delta\mathbf{E}^{(i+1)} \quad (11)$$

où  $\Delta\Sigma^{(i+1)}$  et  $\Delta\mathbf{E}^{(i+1)}$  sont les variations prescrites à la fin du  $i + 1$  itération  
Ainsi  $\mathbf{K}^{(i+1)}$  est cherchée comme solution du problème d'optimisation :

$$\min_{\substack{K_{ij}=K_{ji} \\ \mathbf{K}\Delta\Sigma^{(i+1)}=\Delta\mathbf{E}^{(i+1)}}} \|\mathbf{K} - \mathbf{K}^{(i)}\|_{\mathbf{W}} \quad (12)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice de pondération symétrique définie positive choisie de sorte que :  $\mathbf{W}\mathbf{E}^{(i+1)} = \Sigma^{(i+1)}$   
et  $\|\cdot\|_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{W}^{-1/2} \cdot \mathbf{W}^{-1/2}\|$ .

Sous ces conditions, on démontre que le problème d'optimisation admet une unique solution  $\mathbf{K}^{(i+1)}$ , indépendante du  $\mathbf{W}$  choisi et donnée par :

$$\mathbf{K}^{(i+1)} = \left( I - \frac{\Delta\Sigma}{\Delta\mathbf{E}\Delta\Sigma\Delta\mathbf{E}} \right) \mathbf{K}^{(i)} \left( I - \frac{\Delta\mathbf{E}\Delta\Sigma}{\Delta\Sigma\Delta\mathbf{E}} \right) + \frac{\Delta\Sigma\Delta\Sigma}{\Delta\Sigma\Delta\mathbf{E}} \quad (13)$$

où on note  $I$  la matrice identité.

Cette méthode d'actualisation a été implémentée et testée. Elle ne permet en général pas de faire converger le problème macroscopique. En effet, la matrice de rigidité macroscopique à l'itération  $i$  vérifie par définition :

$$\mathbf{K}^{(i)}\delta\mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (14)$$

ce qui n'est pas garanti ici si l'on actualise chaque matrice tangente et que l'on assemble le système complet ensuite. La convergence a été obtenue pour des incréments de temps très court ou des maillages très raffinés. Une telle méthode n'étant donc pas satisfaisante, une autre a été envisagée.

## 4.2 Deuxième méthode d'actualisation

## 5 Cas d'application

Une analyse paramétrique a été menée. Elle est proposée en guise d'illustration. On a repris la géométrie du cas simple (inclusion de fibre dans une matrice) en choisissant pour la matrice non plus une loi de comportement élastique linéaire, mais une loi de comportement viscoplastique avec un écrouissage cinématique et un écrouissage isotrope. Le maillage de la pièce macroscopique présente une structure en  $L$ , comptant seulement 3 éléments  $2D$  de 4 points de Gauss chacun et renvoyant à un problème multidimensionnel micro qui comporte 12 cellules. Au total, le problème micro est un problème à degré de liberté. La partie supérieur du  $L$  est déplacé de 0.8% de la hauteur en 30s de sorte d'obtenir des déformation de l'ordre de 0.8% et des vitesses de sollicitation de l'ordre de  $10^{-3}s^{-1}$  (Fig. 2).

A chaque fois, on compare un calcul avec utilisation de la méthode d'hyperréduction et actualisation de la matrice de rigidité macro par la méthode BFGS à un calcul  $EF^2$  de référence lancé avec les mêmes paramètres et dont la matrice de rigidité macro est actualisée par la méthode BFGS. Les indications CPU pour les différents calculs sont regroupés dans les tableaux. On commence par effectuer un premier calcul hyperréduit ( $S1$ ) pour constituer une base réduite en prenant une faible valeur de  $R_0 = 50MPa$ . On constate un gain d'un facteur 2 par rapport au calcul de référence. Ensuite, la base précédemment calculée est utilisé au cours d'un second calcul ( $S3$ ) où  $R_0 = 150MPa$ . La plasticité étant alors moins marquée, le calcul converge dans les deux cas plus rapidement. Le gain de temps entre le calcul réduit et le calcul de référence est plus élevé (facteur 3.5) grâce à l'utilisation de la base réduite. Enfin, une dernière simulation ( $S2$ ) est effectuée sur la base réduite existante à l'issue du calcul ( $S3$ ). Un facteur d'accélération 4 est aussi obtenu. Dans tous les cas, au maximum, un écart de l'ordre de 2 – 3% a été enregistré sur les déformations plastiques cumulées. Sur les autres variables, l'accord avec le calcul  $EF^2$  est encore plus grand.

	S1 ( $R_0 = 50MPa$ )	S2 ( $R_0 = 100MPa$ )	S3 ( $R_0 = 150MPa$ )
Réaction interne (calcul micro)	37s	20s	21s
Solver	0.2s	0.2s	0.2s
Temps utilisateur	42s	25s	25s

Tableau 1 – Indication CPU - calcul avec hyperréduction

	S1 ( $R_0 = 50MPa$ )	S2 ( $R_0 = 100MPa$ )	S3 ( $R_0 = 150MPa$ )
Réaction interne (calcul micro)	109s	96s	87s
Solver	11.4s ?	10.8s ?	9.8s ?
Temps utilisateur	114s	100s	91s

Tableau 2 – Indication CPU - Calcul de référence

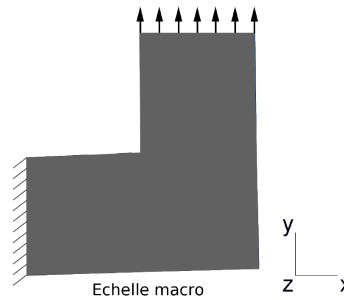


Fig. 2 – Sollicitation de la pièce en L.

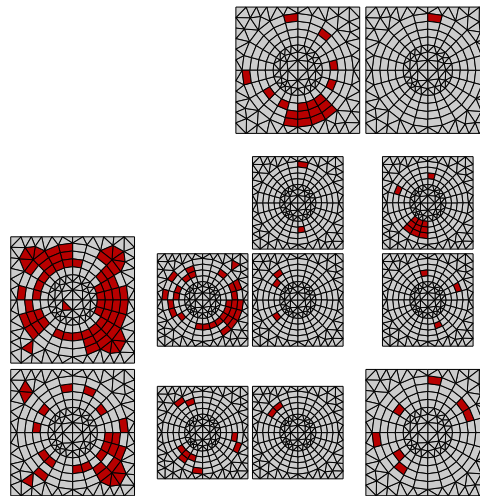


Fig. 3 – Domaine d'intégration réduit en fin de simulation (S2).

## 6 Perspectives

Dans la perspective d'utiliser les méthodes  $EF^2$  sur des cas industriels réels, les facteurs d'accélération obtenus sont insuffisants. On pourrait penser que ces faibles facteurs d'accélération sont dus au fait que le problème considéré est de petite taille. Et en effet, à maillage macro constant, en raffinant le maillage des problèmes micros, on obtient des facteurs d'accélération plus élevés. Cependant, à maillage micro constant, en raffinant le maillage du problème macro, les performances se dégradent très nettement. Les phases d'adaptation deviennent prédominantes car les cellules aux extrémités fixes sont très fortement sollicitées. Ces sollicitations, gommées par l'effet de moyenne quand on utilise un maillage macroscopique peu ramifié, donnent alors lieu, dans ces zones, à des champs microscopiques qui ne peuvent s'exprimer dans l'espace des solutions du modèle réduit ce qui force l'adaptation.

Il faut évaluer l'intérêt de ces méthodes avec des chargements cycliques où la corrélation en temps

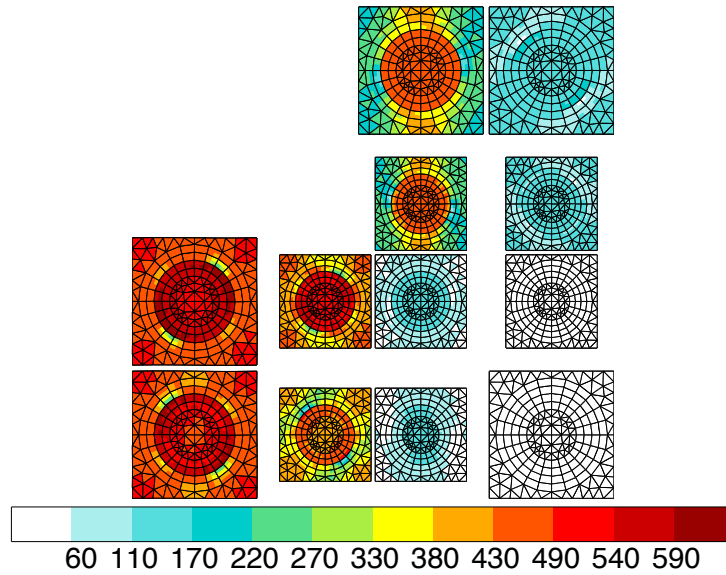


Fig. 4 – Isovaleurs de  $\sigma_{eq}$ , simulation avec hyperréduction (S2).

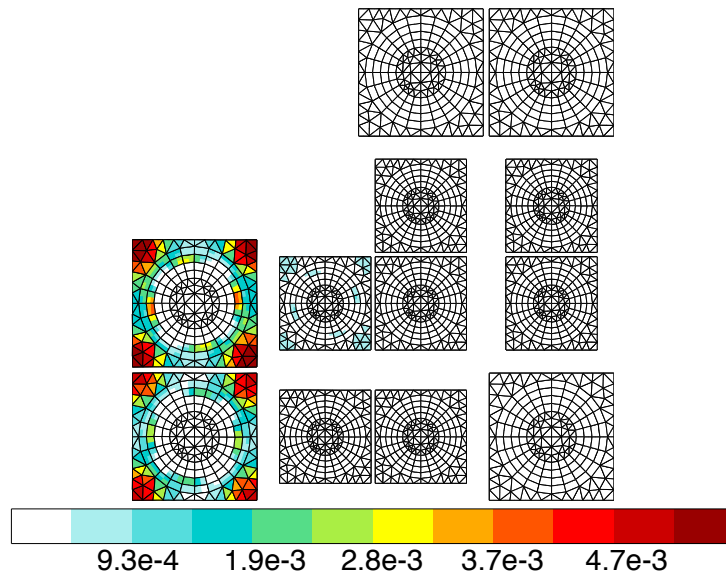


Fig. 5 – Isovaleurs de  $evcum$ , simulation avec hyperréduction (S2).

prend tout son sens.

La suite de l'étude concernera l'exploitation de la corrélation en espace. Car les champs sur les cellules microscopiques relatives à des points de Gauss voisins sont généralement très similaires. Ces similarités seront exploitées, une méthode sera mise en place pour accélérer les calculs notamment lors des phases d'adaptation de la base réduite.

## 7 Références bibliographiques

### Références

- [1] K. Carlberg, C. Farhat, J. Cortial, D. Amsallem, *The GNAT method for nonlinear model reduction : effective implementation and application to computational fluid dynamics and turbulent flows*, arXiv e-Print 1207.1349, 2012.
- [2] J.-C. Michel, P. Suquet, *Nonuniform transformation field analysis*, International Journal of Solids and Structures, 40 :25 :6937-6955, 2003.



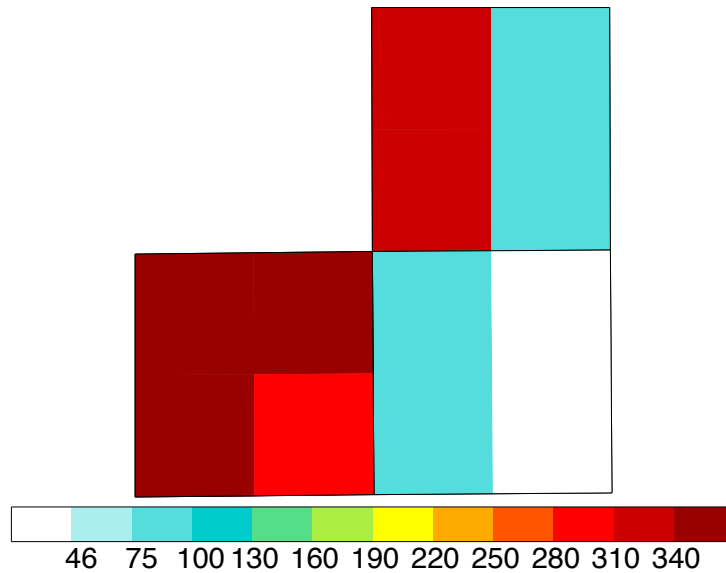


Fig. 6 – Isovaleurs de  $\sigma_{eq}$ , simulation de référence (S2).

- [3] D. Ryckelynck, *A priori hyperreduction method : an adaptative approach*, IJCP, 202 :346-366, 2005.
- [4] D. Ryckelynck, *Hyperreduction of mechanical models involving internal variables*, IJNME, 77 :1 :75-89, 2009.
- [5] D. Ryckelynck, F. Vincent, S. Cantournet, *Multidimensional a priori hyperreduction of mechanical models involving internal variables*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volumes 225-228,28-43,2012.
- [6] F. Feyel, J.-L. Chaboche, *FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behavior of long fibre SiC/Ti composite materials*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 183 :309-330, 2000.
- [7] F. Feyel, *A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua*, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, 192 :3233-3244, 2003.
- [8] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, *Non-linear mechanics of materials*, Springer, 2009.
- [9] K. J. Bathe, *Finite element procedures*, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, vol. 2, 1996.
- [10] L. Gendre, *Approche globale/locale non-intrusive : application aux structures avec plasticité localisée*, thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 2009.
- [11] N. Petit, *Optimisation*, support de cours, Mines-Paristech, année scolaire 2010-2011.
- [12] E Pruliere, A. Ammar, N. El Kissi, F. Chinesta, *Recirculating Flows Involving Short Fiber Suspensions : Numerical Difficulties and Efficient Advanced Micro-Macro Solvers*, Archives of Computational Methods in Engineering, State of the Art Reviews, 16/1 : 1-30, 2009.