



# Algorithme itératif de recherche de surface libre pour le calcul de l'état stationnaire des procédés continus de mise en forme

Ugo Ripert, Lionel Fourment, Jean-Loup Chenot

## ► To cite this version:

Ugo Ripert, Lionel Fourment, Jean-Loup Chenot. Algorithme itératif de recherche de surface libre pour le calcul de l'état stationnaire des procédés continus de mise en forme. CSMA 2013 - 11ème colloque national en calcul des structures, May 2013, Giens, France. hal-00847464

**HAL Id: hal-00847464**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-00847464>**

Submitted on 23 Jul 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Algorithme itératif de recherche de surface libre pour le calcul de l'état stationnaire des procédés continus de mise en forme

Ugo RIPERT <sup>1</sup> \*, Lionel FOURMENT <sup>2</sup>, Jean-Loup CHENOT <sup>3</sup>

<sup>1</sup> MINES ParisTech, CEMEF – Centre de Mise en Forme, ugo.ripert@mines-partistech.fr

<sup>2</sup> MINES ParisTech, CEMEF – Centre de Mise en Forme, lionel.fourment@mines-partistech.fr

<sup>3</sup> MINES ParisTech, CEMEF – Centre de Mise en Forme, jean-loup.chenot@mines-partistech.fr

---

**Résumé** — Pour accélérer la recherche de l'état stationnaire des procédés continus de mise en forme, nous utilisons un algorithme itératif de recherche de la surface libre. Il consiste à alterner le calcul de l'écoulement du matériau avec une étape de correction de la géométrie du domaine pour laquelle une nouvelle formulation par moindres carrés est proposée. Cet algorithme s'applique à des maillages non structurés et prend en compte le contact avec les outils. Les traitements spécifiques des arêtes et des coins sont évités par l'utilisation de plusieurs degrés de libertés par nœuds. L'algorithme est appliqué à divers procédés de laminage en trois dimensions. Il se révèle efficace, précis et très robuste.

**Mots clés** — surface libre, état stationnaire, éléments finis, laminage, mise en forme, contact

---

## 1. Introduction

### 1. Procédés continus

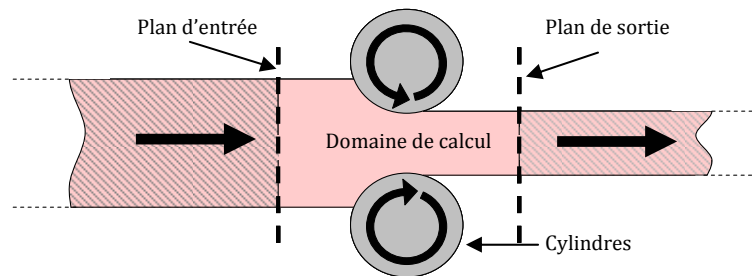
Certains procédés de mise en forme des matériaux comme le laminage, l'extrusion ou le tréfilage ont un caractère éminemment continu, et une grande partie de la transformation peut être considérée comme stationnaire. Cet état stationnaire est considéré comme la donnée principale d'une simulation numérique. Les étapes transitoires d'entrée et de sortie de la pièce entre les outils sont secondaires ; elles n'ont d'intérêt que pour la quantification des rebuts de matière. L'utilisation de la méthode des éléments finis et d'une description lagrangienne réactualisée pour la simulation numérique de procédés continus est possible, mais n'est pas optimale si seul l'état stationnaire est désiré. Le maillage doit être d'assez grande dimension pour permettre d'atteindre l'état stationnaire tout en étant assez fin pour capter avec précision la zone de contact relativement faible. Le pas de temps doit être choisi en fonction de la taille de maille sous l'emprise des outils ce qui implique des temps de calcul très importants.

### 2. Méthodes pour la recherche de l'état stationnaire

Afin de réduire les ressources demandées par une approche incrémentale, des alternatives ont été développées depuis les années 1980. Elles ont pour point commun la réduction du domaine de calcul en se limitant à une zone proche de l'emprise des outils. Le maillage ne représente plus le corps déformable, mais le flux de matière (voir Fig. 1). L'objectif de ces méthodes est de rechercher l'état stationnaire sur ce domaine en partant d'un maillage initial correspondant à une estimation de la solution.

Une première approche est une recherche itérative de l'état stationnaire [1–6]. Elle a la particularité d'être très rapide car la convergence peut être obtenue en quelques itérations, mais il existe le risque qu'elle oscille entre deux configurations et ne converge pas. Elle repose sur un algorithme de point fixe alternant un calcul stationnaire de l'écoulement sur une géométrie donnée avec une correction du domaine basée sur un calcul de surface libre.

Afin d'éviter les problèmes de convergence sur des géométries complexes, une recherche incrémentale de l'état stationnaire a été développée à partir des années 1990 [7] en utilisant une description ALE (Arbitrairement Lagrangienne ou Eulérienne) [8]. A chaque incrément de temps la position des nœuds est actualisée mais seulement dans les directions normales à la direction de laminage. Cette approche est plus robuste mais beaucoup moins efficace qu'une résolution directe du problème stationnaire.



**Fig. 1.** Schéma d'une pièce laminée entre deux cylindres. La pièce n'est plus modélisée intégralement mais seulement un domaine où la matière transite.

### 3. Objectifs

L'objectif de nos travaux est d'introduire dans le code éléments finis Forge3® [9] une approche plus rapide que la description lagrangienne réactualisée, déjà présente, pour simuler des procédés de laminage. Pour un cas de laminage donné, les temps de calcul sont de l'ordre du jour, alors que pour trouver l'état stationnaire le logiciel Lam3 n'a besoin que d'une seule heure. Lam3® est un logiciel spécialisé dans le laminage utilisant une approche itérative pour trouver l'état stationnaire [2]. Afin d'avoir l'accélération maximum et de minimiser les modifications à l'intérieur du code, une approche itérative a été implémentée. Nos travaux portent principalement sur l'ajout d'un algorithme de surface libre pour l'étape de correction du domaine. Pour que l'algorithme soit le plus général possible, la méthode de résolution retenue est globale, plusieurs degrés de liberté sont utilisés et le contact est géré lui aussi de manière globale. Cette méthode doit pouvoir s'appliquer à diverses simulations de laminage de forme quelque soit la géométrie initiale du domaine.

## 2. Méthode itérative de recherche de l'état stationnaire

1. Initialisation du domaine
2. Calcul stationnaire
  - 2.1. Calcul de la vitesse et de la pression
  - 2.2. Intégration des variables d'histoires (température, déformation)
3. Correction du domaine
  - 3.1. Calcul de la correction de surface libre
  - 3.2. Régularisation volumique du maillage
4. Si **convergence**, aller à (5), sinon aller à (2)
5. Fin

**Algo. 1** Algorithme de la méthode itérative de recherche de l'état stationnaire

### 1. Calcul stationnaire

La première étape de la méthode itérative est un calcul de l'écoulement stationnaire sur un domaine donné. Il est constitué de deux parties : le calcul du champ de vitesse et l'intégration des variables d'histoires. La première partie consiste à minimiser une fonctionnelle viscoplastique dérivée de la forme faible des équations de la mécanique (1). La résolution est assurée par la méthode des éléments finis mixtes permettant d'obtenir les champs de vitesse et pression. Le contact est ajouté par une méthode de pénalisation. S'il y a dépendance des lois rhéologiques et tribologiques aux variables

d'état, il faut transporter ces variables le long des lignes de courant. Comme la méthode est itérative, un couplage faible entre les deux étapes est suffisant [2].

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\sigma) &= \vec{0} & \text{dans } \Omega & \text{Equilibre} \\
\operatorname{div}(\vec{v}) &= 0 & \text{dans } \Omega & \text{Incompressibilité} \\
\sigma \cdot \vec{n} &= \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{libre}} & \\
&+ \text{conditions aux limites \{frottement, contact\}}
\end{aligned} \tag{1}$$

## 2. Calcul de surface libre

Le calcul de surface libre consiste à trouver une nouvelle surface n'ayant pas de flux de matière à travers celle-ci, c'est-à-dire telle que la vitesse normale à la surface soit nulle sur tout le domaine. Il s'agit donc de trouver la nouvelle position  $\vec{x}$  des nœuds sur le maillage corrigé, à partir de celle  $\vec{X}$  sur le maillage original et de la correction  $\vec{t}$  issue du calcul de surface libre :

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{t} \tag{2}$$

La résolution d'un problème de calcul de surface est généralement effectuée par intégration de la position des nœuds le long des lignes de courant [1, 2 et 3]. Elle présente l'avantage d'être rapide et simple à mettre en place, mais elle implique souvent que le maillage utilisé soit structuré pour permettre de suivre chaque ligne de courant. Elle est également très difficile à programmer de manière efficace en parallèle lorsque le domaine est partitionné entre plusieurs processeurs. Pour pouvoir utiliser la méthode sur n'importe quel type de maillage, nous optons pour une résolution globale basée sur la méthode des éléments finis [4, 5 et 6]. En chaque nœud de la surface, la vitesse normale doit être nulle, et la section d'entrée du domaine est considérée comme une section de référence fixe :

$$\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega \\ \vec{t} = \vec{0} & \text{sur } \partial\Omega_{\text{entrée}} \end{cases} \tag{3}$$

La vitesse calculée aux nœuds est supposée constante durant l'étape de correction du domaine ( 4 ). La normale est définie sur chaque élément surfacique par le produit vectoriel des deux tangentes à la surface ( 5 ).

$$\vec{v}(\vec{x}) \approx \vec{v}(\vec{X}) \tag{4}$$

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{u}(\vec{x})}{\|\vec{u}(\vec{x})\|}, \quad \text{avec } \vec{u}(\vec{x}) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \wedge \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} \tag{5}$$

La méthode des moindres carrés permet d'écrire une formulation faible du problème ( 3 ) [5]. Elle dérive d'une fonctionnelle ( 6 ) intégrant le carré de la vitesse normale sur la surface. Il est important de noter que la normale  $\vec{n}$  est linéaire vis-à-vis de  $\vec{t}$  lorsque tous les déplacements solutions sont colinéaires. Le système d'équations à résoudre peut alors être linéaire. Dans le cas général, il ne l'est pas et un algorithme de Newton-Raphson est utilisé.

$$\underbrace{\operatorname{Min}(\Phi(\vec{t}))}_{\vec{t}} \quad \Phi(\vec{t}) = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{corrigée}}} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{u})^2}{\|\vec{u}\|^2} dS = \frac{1}{2} \int_{S_{\text{originale}}} (\vec{v} \cdot \vec{u})^2 d\xi d\eta \tag{6}$$

## 3. Généralisation à plusieurs degrés de liberté

Il est d'usage de ne prendre qu'un seul degré de liberté par nœud en surface. L'inconnue est alors la quantité de déplacement  $t$  suivant une direction donnée. Ce choix est optimal lorsque la direction de déplacement est facile à déterminer [4 et 5] mais dans les cas de fortes déformations ou pour les nœuds d'arêtes ce n'est pas le cas. La réactualisation des directions de déplacement au cours des itérations de l'algorithme peut aider à converger vers la solution [6].

Afin de généraliser l'algorithme de surface et d'éviter les étapes de détection des directions de déplacement, nous considérons trois degrés de liberté en chaque nœud de surface. Les trois composantes du vecteur correction sont alors déterminées simultanément. Pour éviter toute fuite du

maillage, on bloque le déplacement dans la direction principale de l'écoulement ce qui réduit à deux le nombre de degrés de liberté par nœud.

Dans certains cas, des nœuds peuvent glisser sur la surface solution sans modifier la fonctionnelle. Il n'y a donc pas unicité de la solution, ce qui fait apparaître des valeurs propres nulles. Une régularisation du problème permet d'obtenir l'unicité de la solution. Pour cela, un lissage des corrections ( 7 ) est ajouté à la fonctionnelle, avec une pondération faible pour ne pas perturber la solution mais suffisamment élevée pour supprimer les valeurs propres nulles ( 8 ).

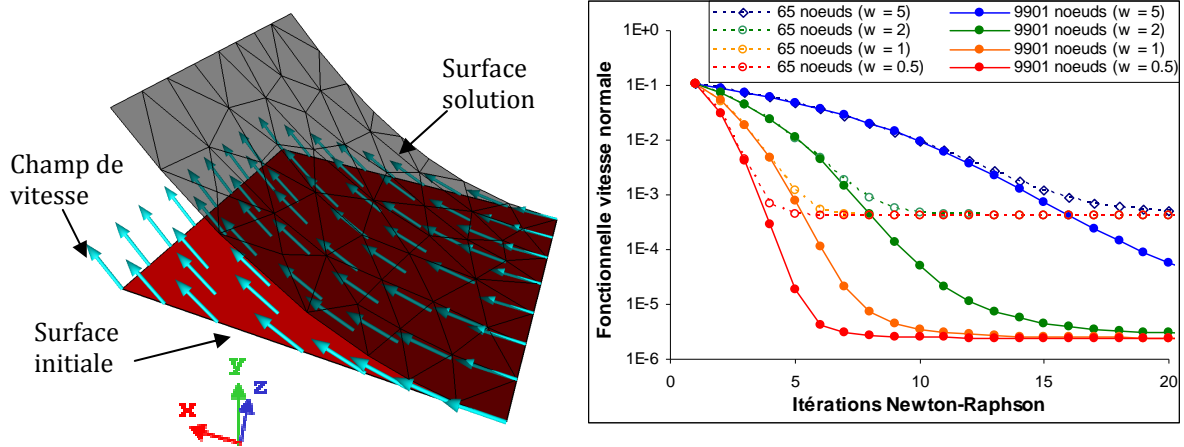
$$\bar{\nabla}(\bar{t}) = C^{st} \Rightarrow \Delta \bar{t} = \bar{0} \quad (7)$$

Dans la pratique, la valeur minimale de cette pondération est trop grande et perturbe la solution en réduisant la valeur des corrections, de sorte que ce lissage n'est appliqué qu'aux incréments de correction de chaque itération Newton-Raphson ( 9 ) plutôt qu'à la correction totale ( 8 ). Ce choix permet de régulariser le problème sans en modifier la solution. En contre partie, la convergence est ralentie et dépend de la pondération utilisée pour la régularisation (Fig. 2).

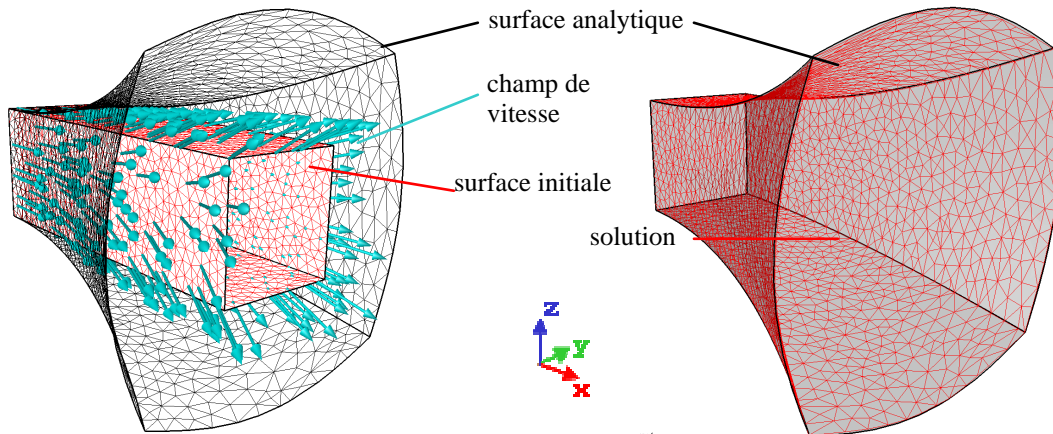
$$(H_{SurfaceLibre}^{(i)} + w \times H_{Lissage}^{(i)}) \Delta t^{(i)} = -(\bar{r}_{SurfaceLibre}^{(i)} + w \times \bar{r}_{Lissage}^{(i)}) \quad (8)$$

$$(H_{SurfaceLibre}^{(i)} + w \times H_{Lissage}^{(i)}) \Delta t^{(i)} = -\bar{r}_{SurfaceLibre}^{(i)} \quad (9)$$

L'algorithme de surface libre est testé sur deux cas analytiques. Le champ de vitesse solution est déterminé à partir d'une surface solution finale donnée. En partant d'un maillage initial et associé à ce champ de vitesse, l'algorithme doit retrouver la surface solution. Le premier cas (Fig. 2) met en évidence l'influence de la pondération utilisée pour le lissage sur la vitesse de convergence. L'algorithme tend toujours vers le même minimum qui dépend de la précision du maillage.



**Fig. 2.** Cas test consistant à retrouver une surface quadratique.  
La vitesse de convergence dépend fortement de la pondération utilisée pour le lissage.



**Fig. 3** Cas test analytique où le calcul de surface libre (méthode des moindres carrés) retrouve une surface analytique (noire) en partant d'un maillage initial (gauche – rouge).

Le deuxième cas (Fig. 3) correspond à un parallélépipède dont la section s'élargie suivant la direction  $x$ . La surface solution est bien retrouvée et le lissage a permis au maillage de suivre la déformation ; de plus les arêtes sont bien conservées.

#### 4. Contact

Le contact est géré dans le calcul de surface libre par une méthode de pénalisation. Une fonctionnelle correspondant à la distance au carré d'un nœud à l'outil est ajoutée avec une pondération forte pour assurer que le contact soit respecté.

$$\Phi = \Phi_{SurfaceLibre} + \rho_{Contact} \times \Phi_{Contact} \quad (10)$$

Deux types de contact sont employés [1]. Un contact unilatéral est attribué aux nœuds appartenant à la surface libre pour éviter toute pénétration et un contact bilatéral pour les nœuds ayant été considérés « en compression » avec les outils lors des corrections de surface libre. Ce choix permet d'assurer la convergence de l'algorithme en évitant des oscillations de la zone de et surtout la perte intégrale du contact après une correction du domaine trop forte.

$$\forall e \in \partial\Omega, \quad \Phi_{contact}^e = \frac{1}{2} S_e \sum_{i=1,3} \begin{cases} (h_i^e)^2, & \text{si contact} \\ [h_i^e]^+{}^2, & \text{si surface libre} \end{cases} \quad (11)$$

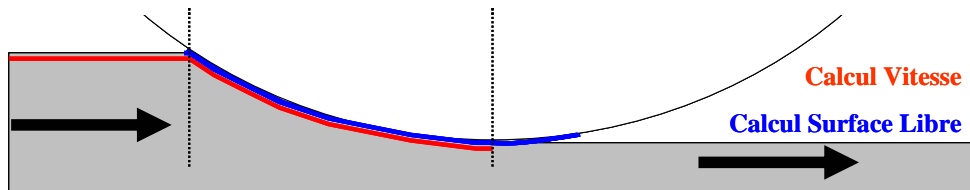
La contrainte de contact de pénalisation permet de déterminer si un nœud est en compression ou non, et donc la zone de contact (12). Pour une approche stationnaire, la fin de cette zone est déterminée avec précision mais la partie amont de la zone est surestimée.

$$\partial\Omega_{contact} = \{i \in \partial\Omega, \quad \lambda_i < 0\}, \quad \text{avec} \quad \lambda_i = -\rho_c \left[ (\vec{v}_i - \vec{v}^{outil}) \cdot \vec{n}_i^{outil} \right]^+ \quad (12)$$

Une autre approche consiste à se baser sur le calcul de surface libre. Comme le contact est géré par pénalisation, il est ainsi possible de calculer la contrainte de contact associée. Un paramètre d'adhésion numérique  $\varepsilon$  relativement faible est alors ajouté pour assurer que le contact soit conservé après convergence. Les nœuds en contact ont une contrainte normale proche de zéro, et suivant la discrétisation du maillage ou les oscillations numériques, cette valeur peut devenir légèrement positive. Lorsque le déplacement proposé par le calcul de surface libre est supérieur à 1% de la taille de maille, alors et seulement alors le nœud en contact peut être relâché.

$$\partial\Omega_{contact} = \{i \in \partial\Omega, \quad \lambda_i < \varepsilon\}, \quad \text{avec} \quad \lambda_i = -\rho_c (\vec{t}_i \cdot \vec{n}_i^{outil} - d_i) \quad (13)$$

Avec cette approche, le début de la zone est bien déterminée mais la fin qui est surestimée. En prenant l'intersection des deux conditions de contact, on obtient une zone de contact satisfaisante (Fig. 4). L'utilisation d'un maillage adapté permet également de réduire les oscillations de surface de la zone, causées par l'utilisation d'un maillage non structuré.

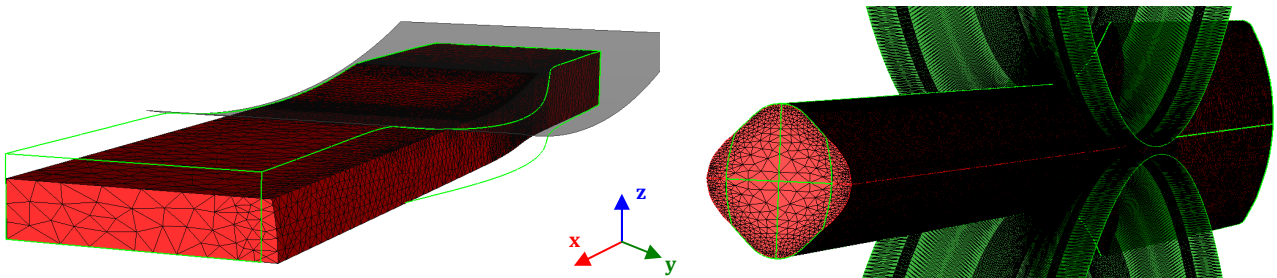


**Fig. 4** Schéma représentant les zones de contact obtenues lors d'une analyse de contact faite à partir du calcul stationnaire (rouge) ou à partir de du calcul de surface libre (bleue)

### 3. Applications au laminage de forme

#### 1. Mise en donnée

La méthode a été implémentée dans le logiciel Forge3® pour être testée sur différents procédés de laminage. Les comparaisons sont faites avec Forge3® (méthode incrémentale avec description lagrangienne) et Lam3® (recherche itérative avec une méthode lignes de courant pour le calcul de surface libre). Comme l'étape d'intégration des variables d'histoire n'a pas encore été développée, des lois de comportements et frottements sans dépendance à la thermique et à l'écroutissage sont choisies. Une loi de comportement de Norton-Hoff pour un métal chaud est employée pour le corps déformable et une loi viscoplastique est utilisée pour le frottement avec les outils.

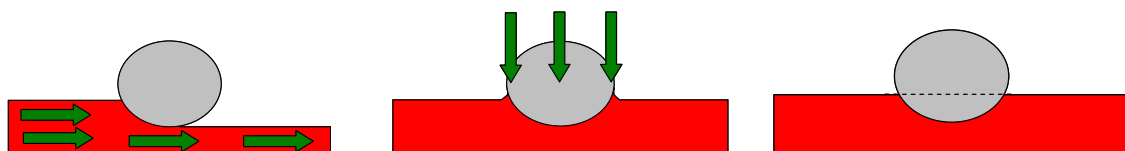


**Fig. 5.** Deux cas de laminage testés. A gauche, un laminage de tôle épaisse où le maillage initial (contour vert) a été obtenu par indentation de la tôle à l'aide des outils de laminage. A droite, un laminage de forme (ovale → carré) avec une initialisation par extrusion – visualisation des symétries.

Le premier cas correspond à un laminage de tôle épaisse où la vitesse d'écoulement est de l'ordre de 700 mm/s. La section d'entrée possède une largeur de 80 mm et 25 mm d'épaisseur, et la longueur du domaine est de 200 mm. Le deuxième cas est un procédé de laminage permettant de passer d'une section ovale à une section carrée. La vitesse principale est de l'ordre de 1500 mm/s. Le grand diamètre de la section d'entrée fait 108 mm et le petit 36 mm, et la longueur du domaine est de 1000 mm.

Notre méthode utilise un maillage à 15 000 nœuds pour le premier cas et 40 000 nœuds pour le deuxième, ce qui permet d'obtenir une taille de maille de l'ordre de 1 mm. Forge3® utilise 100 000 nœuds pour le premier cas et 60 000 pour le deuxième. Lam3® utilise 12 000 nœuds dans les deux cas (limitation du logiciel). Pour chaque cas, deux plans de symétrie suivant y et z sont utilisés pour réduire le domaine de calcul.

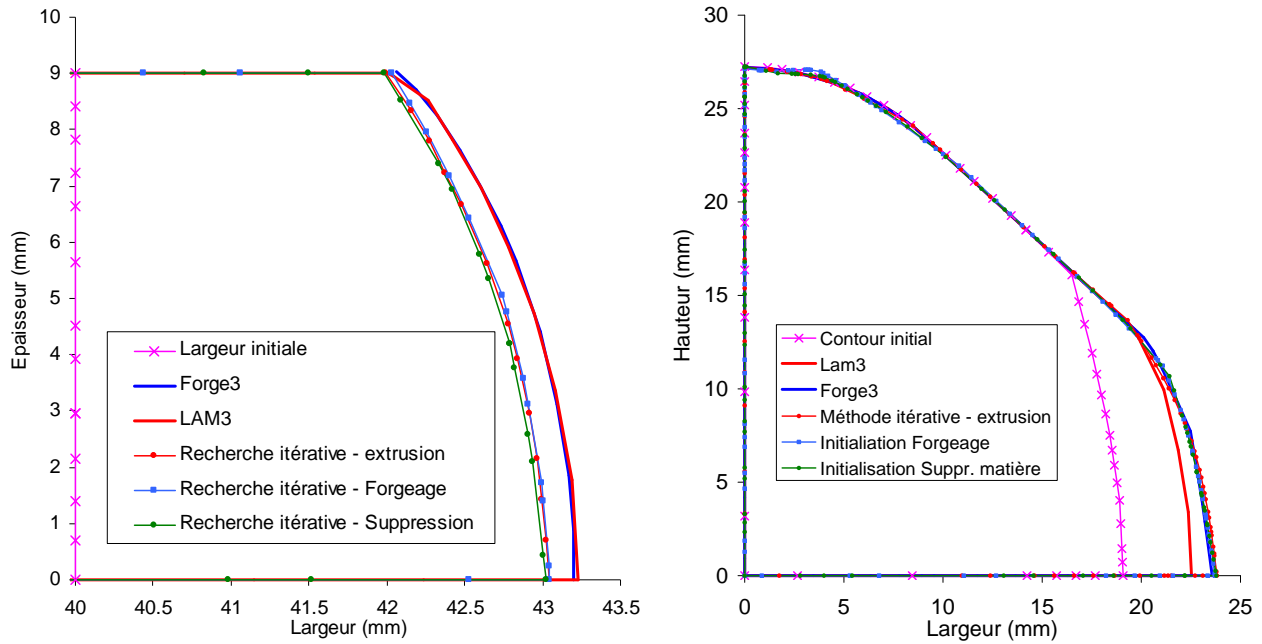
L'initialisation du maillage peut être effectuée par extrusion de la section d'entrée et projection des nœuds sur les outils si une pénétration a été détectée. L'initialisation peut aussi être effectuée par forgeage du domaine par les outils, ou en supprimant les parties pénétrant les outils (Fig. 6). Ces deux dernières initialisations sont moins avantageuses car trop éloignées de la solution finale.



**Fig. 6.** De gauche à droite, initialisation par extrusion de la section d'entrée à travers les outils, initialisation par forgeage et initialisation par suppression de la matière dans les outils.



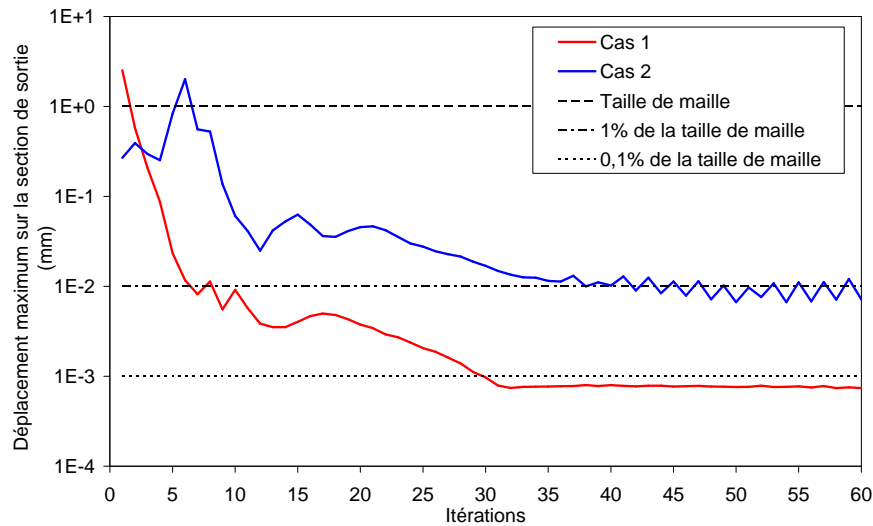
## 2. Résultats



**Fig. 7.** Sections obtenus pour le cas de laminage de tôle épaisse (à gauche) et celui ovale-carré (à droite).

Pour le premier cas, le laminage de tôle épaisse, l'élargissement obtenu par notre algorithme donne des élargissements inférieurs à ceux de Lam3® et Forge3®, mais la forme globale est bien retrouvée. Pour le deuxième cas, Lam3® oscille entre deux configurations et ne converge pas, la **Fig. 7** montre la configuration avec l'élargissement maximum. Notre algorithme retrouve la géométrie de Forge3®.

Plusieurs initialisations sont testées afin d'observer la robustesse de notre algorithme et en particulier celle du calcul de surface libre. La géométrie finale est la même pour n'importe quelle initialisation. Dans le deuxième cas, l'initialisation par forgeage fait apparaître un léger défaut sur le haut de la section. Cela est dû à la longueur importante du domaine et un maillage non structuré pas assez fin pour permettre un transport de la position des nœuds sans perte d'information.



**Fig. 8** Déplacement maximum d'un nœud sur le plan de sortie lors de la recherche itérative de l'état stationnaire. Chaque cas est initialisé par une méthode d'extrusion.

Le nombre d'incrément nécessaire pour Forge3® pour le premier cas est de l'ordre 300 et 750 pour le deuxième cas. De son côté, Lam3® converge en 27 itérations pour le premier cas, mais sur le deuxième il ne converge pas. Après une trentaine d'itération de notre algorithme, la géométrie finale



est obtenue. Lors des itérations suivantes, l'algorithme de surface exécute de légers déplacements. Ces mouvements ont pour vocation d'aligner les nœuds en les faisant glisser sur la surface pour former des lignes de courant. La zone de contact ne pouvant être parfaite à cause du maillage non structuré, l'algorithme fait glisser les nœuds le long des outils empêchant la convergence. Ce comportement inattendu de l'algorithme provient de sa trop grande liberté.

Le temps de calcul d'une itération de la méthode de recherche de l'état stationnaire est de l'ordre d'un incrément d'une simulation incrémentale avec une description lagrangienne réactualisée. Si l'on fait abstraction des mouvements causés par l'algorithme de surface après que la géométrie finale soit trouvée, on peut estimer qu'il y a un facteur 10 en temps de calcul entre Forge3® et notre algorithme.

## 4. Conclusion

Un algorithme itératif a été introduit dans un code éléments finis pour réduire les temps de calcul nécessaires à la recherche de l'état stationnaire des procédés continus. Un calcul de surface libre basée sur la méthode des éléments finis a été développé afin de corriger le domaine de manière globale et faire abstraction du type de maillage utilisé. Afin d'éviter l'ajout d'étapes supplémentaires, plusieurs degrés de libertés sont considérés aux nœuds pour ne pas avoir à déterminer les directions de déplacement et le contact est introduit par pénalisation. Les résultats obtenus sur des cas de laminage sont très encourageants car les géométries obtenues concordent bien et les temps de calcul sont grandement réduits. L'algorithme de surface libre a tendance à trop régulariser le maillage, même lorsque la géométrie finale est obtenue, ce qui peut entraîner de petites oscillations. Mais il est important de noter sa robustesse, car il retrouve la même géométrie à partir d'initialisations très différentes et converge dans tous les cas étudiés.

## Remerciements

Nous tenons à remercier nos partenaires industriels regroupés au sein du consortium « Forge-ALE » qui ont soutenu financièrement ce projet, ainsi que Transvalor pour son aide technique.

## Références

- [1] K. Mori, K. Osakada, *Simulation of 3-dimensional Deformation In Rolling By the Finite-element Method*, International Journal of Mechanical Sciences vol. 26, p. 515-525, 1984.
- [2] A. Hacquin, P. Montmitonnet, J.-P. Guillerault, *A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation*, Journal of Materials Processing Technology vol. 60, p.109-116, 1996
- [3] H.J. Kim, T.H. Kim, S.M. Hwang, *A new free surface scheme for analysis of plastic deformation in shape rolling*, Journal of Materials Processing Technology vol. 104, p.81-93, 2000.
- [4] Y.S. Lee, P. Dawson & T.B. Dewhurst, *Bulge predictions in steady state bar rolling processes*, international journal for numerical methods in engineering, vol.30, p. 1403-1413, 1990
- [5] J.L. Chenot, P. Montmitonnet, A. Bern, C. Bertrand-Corsini, *A method for determining free surfaces in steady state finite element computations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol.92, pp.245 - 260, 1991.
- [6] N. Ramanan, M.S. Engelman, *An algorithm for simulation of steady free surface flows*, International Journal For Numerical Methods In Fluids, vol. 22, p. 103-120, 1996.
- [7] K. Mori, K. Osakada, *Finite-element Simulation of 3-dimensional Deformation In Shape Rolling*, International Journal For Numerical Methods In Engineering vol. 30, p. 1431-1440, 1990.
- [8] R.Boman, J.P. Ponthot, *Finite element simulation of lubricated contact in rolling using the arbitrary Lagrangien-Eulerian formulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering vol. 193, p.4323-4353, 2004
- [9] Chenot, J. L., Fourment, L., Coupez, T., Ducloux, R. and Wey, E. (1998). *Forge3® - A general tool for practical optimization of forging sequence of complex three-dimensional parts in industry*. International Conference On Forging and Related Technology (icft '98) 1998 (3), Professional Engineering Publishing Ltd, 113-122.