Groupe de Lie et observateur non-linéaire

Silvère Bonnabel, Philippe Martin, Pierre Rouchon

▶ **To cite this version:**

Silvère Bonnabel, Philippe Martin, Pierre Rouchon. Groupe de Lie et observateur non-linéaire. Conférence Internationale Francophone d'Automatique 2006, Jan 2006, Bordeaux, France. hal-00533341

HAL Id: hal-00533341

https://minesparis-psl.hal.science/hal-00533341

Submitted on 5 Nov 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

(2006) CIFA 2006 - Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bordeaux, France

Groupe de Lie et observateur non-linéaire

Silvere Bonnabel, Philippe Martin et Pierre Rouchon

Résumé— **On se place sur un groupe de Lie et on considère une dynamique invariante à gauche. On montre, moyennant une hypothèse sur la sortie, qu'il est possible dans ce cas de construire des observateurs non-linéaires pour lesquels l'équation d'erreur est autonome. La théorie est illustrée par un exemple emprunté à la navigation inertielle.**

Mots-clés—

Groupe de Lie, symétries, invariance, observateurs non-linéaires, navigation inertielle.

I. Introduction

Dans la théorie du contrôle, les symétries ont été utilisées en contrôle optimal et dans le design de contrôleur ([5], [4], [8], [6], [7], [11], [9]) . A notre connaissance les symétries ont peu été utilisées pour le design d'observateur. Dans [2] on construit un observateur intrinsèque pour les systèmes Lagrangiens dont on mesure la position : il est invariant via les changements de coordonnées. Dans [1], [**?**] on montre comment on peut exploiter les symétries pour le design d'observateurs. Ici l'on va s'inspirer de ces derniers travaux afin de définir des observateurs sur des groupe de Lie avec dynamique invariante à gauche. Mais l'on va procéder un peu différemment en mélangeant les invariances à gauche et les invariances à droite afin d'obtenir des propriétés interessantes sur l'erreur d'estimation.

On se place sur un groupe de Lie G. Tout groupe agit sur lui-même via les translations à droite ou à gauche. On considère ici une dynamique sur G invariante (par exemple) à gauche, c'est à dire que les équations de la dynamique sont inchangées par une translation à gauche. Notons que la dynamique peut dépendre explicitement du temps. On montre alors qu'il est possible, moyennant certaines hypothèses sur l'application de sortie du système, de construire des observateurs non-linéaires pour lesquels l'erreur d'estimation suit une équation autonome, ce qui rappelle la théorie linéaire.

Ces résultats ont été obtenus suite à l'étude d'un problème pratique, celui de la navigation inertielle. Il est nécessaire pour piloter un objet volant, manuellement, assisté par ordinateur, ou tout en automatique, d'avoir une bonne connaissance de son orientation dans l'espace. Dans les systèmes de navigations relativement peu chers, les gyroscopes dérivent lentement. On peut utiliser la mesure du champ magnétique terrestre $\vec{B}$ pour les recaler. Les différentes mesures sont fusionnées en accord avec les équations du mouvement. On utilise généralement un filtre de Kalman étendu afin d'obtenir une estimation de l'orientation. L'orientation de l'objet peut être décrite par une élément du groupe de rotations SO(3) de l'espace euclidien à trois dimensions, i.e l'espace de configuration d'un solide ayant un point fixe. On identifie l'orientation du solide à la matrice de rotation qui permet de passer du repère terrestre (fixe) au repère lié au solide (mobile).

Le problème considéré ici (estimation de l'orientation avec mesure du champ magnétique) est un sous-problème très simple de la classe des problèmes posés par la navigation inertielle. Les résultats sur l'équation d'erreur laissent espérer la possibilité de construire par la suite des observateurs robustes et complets pour la navigation inertielle.

Dans la section 2 nous présentons le problème de la navigation inertielle avec mesure du champ magnétique, et on exhibe un observateur non-linéaire pour ce problème. L'équation d'erreur est telle que le réglage des gains assurant la stabilité est très aisé.

Dans la section 3 on se place dans le cas général d'une dynamique sur un groupe de Lie invariante à gauche et dépendante du temps, avec sortie compatible à droite. L'exemple rentre dans ce cadre. On montre alors tout d'abord que, si la dimension de la sortie est inférieure strictement à la dimension de l'état, le système est nécéssairement inobservable. Ensuite on montre que l'on peut construire des observateurs non-linéaires tels que l'erreur d'estimation suit une équation autonome pour laquelle il est possible, sous des conditions usuelles et au premier ordre, de garantir la convergence exponentielle de la partie observable.

II. Exemple

A. Navigation inertielle avec mesure du champ magnétique

On renvoie le lecteur à l'appendice pour les formules utiles sur les quaternions, le lien avec les matrices de rotation et les vecteurs de $\mathbb{R}^{\not 4}$. Les équations de la cinématique pour un objet volant rigide (solide) s'écrivent avec les quaternions $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt}q = \frac{1}{2}q \cdot \vec{\omega} \tag{1}$$

où

- $q \in \mathbb{H}$ est le quaternion qui représente l'orientation du repère attaché au solide (mobile) par rapport à celui attaché au sol (fixe),
- $\vec{\omega}$(t) est le vecteur rotation instantané mesuré par les gyroscopes,
- $\cdot$ est le produit (non commutatif) entre deux quaternions.

Ainsi, l'état du système est le quaternion q. On choisit comme sortie (à titre illustratif) la mesure du champ magnétique terrestre $\vec{B}$ par les magnétomètres dans le repère mobile :

$$y = q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q$$

On utilise généralement les quaternions (aussi appelés les quatre paramètres d'Euler) plutôt que les angles d'Euler puisqu'ils permettent une paramétrisation globale de l'orientation du mobile et sont adaptés aux calculs numériques et aux simulations. En effet tout quaternion unitaire représente une rotation, et il est par exemple plus

S. Bonnabel, Ph. Martin and P. Rouchon sont au Centre Automatique et Systèmes de l'Ecole des Mines de Paris, 60 boulevard Saint-Michel, 75272 Paris CEDEX 06, FRANCE (silvere.bonnabel@ensmp.fr, philippe.martin@ensmp.fr, pierre.rouchon@ensmp.fr)

facile numériquement de maintenir la norme d'un quaternion constante que de maintenir une matrice dans SO(3).

B. Observabilité

La seule sortie qu'on utilise ici est la seule mesure du champ magnétique. Dans le problème de la navigation inertielle on utilise également la mesure de l'accélération par les accéléromètres des centrales inertielles, et si l'on fait l'approximation quasi-statique, le système devient observable. Mais on ne se préoccupe pas de ce cas-là ici.

L'état q de (1) n'est pas observable à partir de la sortie $y = q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q$. En effet soit $p_{\vec{B}}$ le quaternion associé à une rotation d'angle non-nul autour de $\vec{B}$, i.e,

$$p_{\vec{B}}^{-1} \cdot \vec{B} \cdot p_{\vec{B}} = \vec{B}$$

Alors si $q(t)$ représente une trajectoire du système, $p_{\vec{B}} \cdot q(t)$ en est une autre distincte de $q(t)$ car

$$\frac{d}{dt}(p_{\vec{B}} \cdot q) = \frac{1}{2}(p_{\vec{B}} \cdot q) \cdot \vec{\omega}$$

et les sorties correspondantes sont confondues pour tout temps $t \geq 0$:

$$y_{\vec{B}}(t) = q^{-1}(t) \cdot p_{\vec{B}}^{-1} \cdot \vec{B} \cdot p_{\vec{B}} \cdot q(t) = q^{-1}(t) \cdot \vec{B} \cdot q(t) = y(t)$$

Le système n'est donc pas observable. Il possède un degré d'inobservabilité : à partir de la sortie on peut remonter à l'état à une rotation autour de $\vec{B}$ près. Il est néanmoins intéressant d'avoir une estimation de la partie observable du système.

C. Un observateur non-linéaire

Un observateur du type Luenberger ou filtre de Kalman étendu est très "linéaire" par construction. Si on note $\hat{q}$ l'estimation fournie de q par ce type d'observateurs de l'état, les termes correctifs sont usuellement des combinaisons linéaires des erreurs de sortie $q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q - \hat{q}^{-1} \cdot \vec{B} \cdot \hat{q}$. Nous considérons une classe l'observateurs non-linéaires qui prennent en compte la structure géométrique de la dynamique (1). Ils admettent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{q} &= \frac{1}{2}\hat{q} \cdot \vec{\omega} \\ &\quad + (\sum_{i=1}^{3} E_i \left(\hat{q} \cdot q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B}\right) \ \vec{e}_i) \cdot \hat{q} \end{aligned} \quad (2)$$

où les E_i sont des fonctions scalaires régulières des coordonnées du vecteur $\hat{q} \cdot q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B}$ qui s'annulent en 0, et les $\vec{e}_i$ sont les quaternions associés à une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^{\not 4}$. On peut choisir la base canonique par exemple, et les quaternions correspondants sont explicités dans l'appendice.

D. Le système d'erreur

Au lieu de considérer les erreurs "linéaires" $\Delta q := \hat{q} - q$ on considèrera une erreur (équivalente) qui utilise l'opération $\cdot$ du groupe des quaternions (au lieu de $-$) :

$$r := \hat{q} \cdot q^{-1}$$

On pose

$$E(r) = (\sum_{i=1}^{3} E_i \left(\hat{q} \cdot q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B}\right) \ \vec{e}_i).$$

C'est une quantité invariante par translation à droite $\mathbb{H} \ni q \mapsto q \cdot h \in \mathbb{H}$ pour $h \in \mathbb{H}$ arbitraire. On a

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{q} \cdot q^{-1} + q * \left(-q^{-1} * \dot{q} \cdot q^{-1}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} q \cdot \vec{\omega} - E(r) \cdot \hat{q} - \frac{1}{2} q \cdot \vec{\omega}\right) \cdot q^{-1} \\ &= E(r) \cdot r \end{aligned}$$

Ce qui donne donc

$$\dot{r} = (\sum_{i=1}^{3} E_i \left(r \cdot \vec{B} \cdot r^{-1} - \vec{B}\right) \ \vec{e}_i) \cdot r$$

où les E_i s'annulent en zéro. La dynamique de l'erreur $r = \hat{q} \cdot q^{-1}$ ne dépend donc pas de la trajectoire $t \mapsto q(t)$. Cela rappelle la théorie linéaire : l'équation d'erreur est indépendante du temps et il faut régler les gains (ici les E_i) pour avoir la convergence asymptotique.

E. Etude du linéarisé tangent

Une erreur faible correspond à r proche de 1, où 1 est le quaternion unité. Le choix de $\vec{e}_1$ étant arbitraire, on choisit $\vec{e}_1 = \vec{B}$. On écrit $r = 1 + \vec{\xi}$ avec $\vec{\xi}$ petit. On obtient alors au premier ordre en $\vec{\xi}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{\xi} &= \sum_{i=1}^{3} DE_i(\vec{\xi} \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{\xi}) \ \vec{e}_i \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq 3} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} (\vec{\xi} \times \vec{e}_1)^j \ \vec{e}_i \end{aligned}$$

où "$\times$" représente le produit vectoriel usuel pour les vecteurs de $\mathbb{R}^{\not 4}$. $\vec{\xi}$ est vu comme un vecteur et ξ^j représente la j-ième coordonnée de $\vec{\xi}$ sur la base des $\vec{e}_i$. On a donc

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq 3} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^3 \\ -\xi^2 \end{pmatrix}$$

On prend alors au premier ordre en $\vec{\xi}$: $E_1 = 0$, $E_2(r) = E_2(\vec{\xi}) = K\xi^3$ et $E_3(r) = E_3(\vec{\xi}) = -K\xi^2$. Ainsi

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} 0 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

On a convergence exponentielle de la partie observable du système sur le linéarisé tangent et on a le choix de la constante de temps $1/K$.

F. Une famille d'observateurs non-linéaires globalement convergents

En s'inspirant de [**?**], considérons l'observateur non-linéaire suivant

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{q} &= \frac{1}{2}\hat{q} \cdot \vec{\omega} - K \ [\vec{B} \times (\hat{q} \cdot q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B})] \cdot \hat{q} \\ \frac{d}{dt}\hat{q} &= \frac{1}{2}\hat{q} \cdot \vec{\omega} - K \ [\vec{B} \times (\hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B})] \cdot \hat{q}. \end{aligned} \quad (4)$$

Il est bien de la forme (2). Un calcul simple montre que son linéaire tangent pour r proche de 1 est exactement (3). Si l'on appelle $\hat{y} = \hat{q}^1 \cdot \vec{B} \cdot \hat{q}$ la sortie estimée, on a, pour tout gain $K > 0$, :

$$\lim_{t \mapsto +\infty} \hat{y}(t) - y(t) = 0$$

pour toute trajectoire de (1) et toute condition initiale pour (4). Compte tenu de l'inobservabilité des rotations autour de $\vec{B}$, les propriétés de convergence de cet observateur ne peuvent pas être améliorées.

La preuve consiste à prendre la fonction de Lyapounov suivante $V(t) = \|\hat{y}(t) - y(t)\|^2$. On a alors

$$\frac{d}{dt}V(t) = 2 < \hat{y}(t) - y(t), \frac{d}{dt}(\hat{y}(t) - y(t)) >$$

où $<,>$ représente le produit scalaire usuel des vecteurs de $\mathbb{R}^{\not 4}$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(t) &= (q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q) \times \vec{\omega} \\
\frac{d}{dt}\hat{y}(t) &= (\hat{q}^{-1} \cdot \vec{B} \cdot \hat{q}) \times \vec{\omega} \\
&\quad - K\ \hat{q}^{-1} \cdot [\vec{B} \times (\vec{B} \times (\hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B}))] \cdot \hat{q}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t) &= 2 < \hat{y}(t) - y(t), \frac{d}{dt}(\hat{y}(t) - y(t)) > \\
&= 2 < (\hat{q}^{-1} \cdot \vec{B} \cdot \hat{q} - q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q), (\hat{q}^{-1} \cdot \vec{B} \cdot \hat{q} - q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q) \times \vec{\omega} > \\
&\quad - 2K < \hat{y}(t) - y(t),\ \hat{q}^{-1} \cdot [\vec{B} \times (\vec{B} \times (\hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B}))] \cdot \hat{q} > \\
&= 0 \\
&\quad - 2K < \vec{B} - \hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1},\ \vec{B} \times (\vec{B} \times (\hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B})) >
\end{aligned}$$

D'après les propriétés du produit mixte,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(t) &= -2K < (\vec{B} \times (\hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B})),\ (\vec{B} \times (\hat{q} \cdot y \cdot \hat{q}^{-1} - \vec{B})) > \\
&= -2K\|\hat{y}(t) - y(t)\|^2 \\
&= -2V(t)
\end{aligned}$$

On a donc convergence exponentielle globale de la sortie estimée vers la sortie réelle.

III. Généralisation

Les résultats obtenus sur l'exemple précédent admettent une généralisation naturelle où $\mathbb{H}$, l'espace d'état est remplacé par un groupe de Lie et la dynamique (1), par un champ de vecteur invariant à gauche et pouvant dépendre de t.

Dans tout ce chapitre on utilise les notations de [3]. On se place sur un groupe de Lie réel G de dimension n et l'on considère une dynamique invariante à gauche. Nous allons montrer que, moyennant une condition sur la sortie, on peut construire un observateur non-linéaire pour lequel l'erreur vérifie une équation autonome.

A. Dynamique invariante à gauche et sortie compatible à droite

Considérons la dynamique suivante :

$$\frac{d}{dt}g(t) = F(g,t) \tag{5}$$

où g est un élément de G, et F est un champ de vecteur régulier sur G. Supposons la dynamique invariante *à gauche*, i.e :

$$\forall g, h \in G \quad F(L_h(g), t) = L_{h*}F(g,t)$$

où $L_h : g \mapsto h \cdot g$ est la translation à gauche sur G, et L_{h*} l'application induite sur l'espace tangent. L_{h*} envoie l'espace tangent en g $TG|_g$ sur $TG|_{hg}$. G est donc un groupe de symétrie pour lui-même : pour tout $h \in G$, le changement de variables $g_2(t) = h \cdot g_1(t)$ ne modifie pas les équations de la dynamique :

$$\frac{d}{dt}g_2(t) = F(g_2(t), t)$$

Comme dans [3] on pose

$$\omega_s = L_{g^{-1}*}\dot{g} \in \mathfrak{g}$$

ω_s est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. En effet on peut voir toute dynamique invariante à gauche sur G comme les équations de la cinématique d'un "solide généralisé" et $\omega_s(t) = F(e,t)$ comme la "vitesse angulaire par rapport au solide". Désormais on écrira la dynamique invariante à gauche (5)

$$\frac{d}{dt}g(t) = L_{\hat{g}*}\omega_s(t) \tag{6}$$

Supposons que $H : G \mapsto Y$ est une application de sortie régulière G-compatible *à droite*. En s'inspirant de [1] on définit la compatibilité à droite de la manière suivante : pour tout $h \in G$, il existe une application $\varrho_h : Y \mapsto Y$ régulière, telle que pour tout $g \in G$, $H(g \cdot h) = \varrho_h(H(g))$ ou encore

$$H(R_h(g)) = \varrho_h(H(g))$$

avec R_h la translation à droite sur G (et R_h^* l'application induite sur l'espace tangent). Autrement dit l'action du groupe sur lui-même par translation à droite correspond bien à une action de groupe également sur l'espace de la sortie Y. On considère donc des systèmes sur des groupes de Lie dont la dynamique est invariante à gauche et dont la sortie est compatible à droite.

Dans l'exemple la dynamique est bien invariante à gauche ($\frac{d}{dt}q(t) = q \cdot \vec{\omega} = L_{q*}\vec{\omega}(t)$) et la sortie $H(q) = q^{-1} \cdot \vec{B} \cdot q$ est bien compatible à droite car

$$H(R_r(q)) = (q \cdot r)^{-1} \cdot \vec{B} \cdot (q \cdot r) = r^{-1} \cdot H(q) \cdot r = \varrho_r(H(q))$$

B. Observabilité

On suppose la dimension de la sortie strictement inférieure à celle de l'état ($\dim y < \dim g$) et l'application de sortie H analytique, alors le système est nécessairement inobservable.

En effet puisque la dimension de la sortie est inférieure strictement à celle du groupe il existe deux éléments distincts g_1 et g_2 de G tels que

$$H(g_1) = H(g_2) \quad g_1 \neq g_2$$

Si $g(t)$ est une trajectoire du système, on a

$$\frac{d}{dt}g(t) = L_{g*}\omega_s(t)$$

et par invariance à gauche, $g_1 g(t)$ et $g_2 g(t)$ sont également des trajectoires du système :

$$\frac{d}{dt}(g_1 \cdot g(t)) = L_{g_1 g*}\omega_s(t), \quad \frac{d}{dt}(g_2 \cdot g(t)) = L_{g_2 g*}\omega_s(t).$$

Or

$$H(g_1 \cdot g(t)) = \varrho_{g(t)} H(g_1) = \varrho_{g(t)} H(g_2) = H(g_2 g(t))$$

Les trajectoires $g_1 \cdot g(t)$ et $g_2 \cdot g(t)$ sont distinctes et donnent pour tout temps t la même sortie. Le système est inobservable.

Il est possible de pousser plus loin l'analyse. Un calcul simple montre que

$$H(g_1 \cdot g_2^{-1}) = H(e)$$

avec e élément neutre de G. Comme H est compatible à droite, l'ensemble

$$N = \{\sigma \in G \ / \ H(\sigma) = H(e)\}$$

est un sous-groupe de G. Il est alors possible de considérer l'espace homogène G/N où deux éléments de G, g_1 et g_2 correspondent au même élément de G/N, et seulement si, $g_1 \cdot g_2^{-1} \in N$. On note pour tout $g \in G$, $\{g\} \in G/N$ la classe d'équivalence à laquelle appartient g. Alors deux trajectoires du système $t \mapsto g_1(t)$ et $t \mapsto g_2(t)$ donnent la même trajectoire de sortie $t \mapsto H(g_1(t)) = H(g_2(t))$ si, et seulement si, pour tout t on a $\{g_1(t)\} = \{g_2(t)\}$. Ainsi, la partie observable du système s'identifie à l'espace homogène G/N.

C. Construction de l'observateur

D'après un résultat de [**?**], on sait caractériser tout observateur G-invariant *à gauche*, c'est-à-dire tout observateur tel que la dynamique suivie par l'observateur est elle-même invariante à gauche. Mais ici l'on va procéder un peu différemment, même si l'on utilise des outils utiles à la construction d'observateurs invariants. On sait qu'il existe ([10]) un repère invariant *à droite* $(W_1, ..., W_n)$, c'est à dire un ensemble de n champs de vecteurs G-invariants à droite et linéairement indépendants sur G. Ils vérifient

$$W_i(g) = R_{g*} W_i(e)$$

où e est l'élément neutre du groupe G. Cette relation permet de les construire. De plus on sait construire avec la méthode du repère mobile de Cartan les erreurs invariantes à droite ([1]), c'est à dire les fonctions scalaires E_i de l'estimée $\hat{g}$ et de la sortie $H(g)$, qui vérifient :

$$\begin{aligned} \forall g, h \quad & E_i(R_h(\hat{g}), H(R_h(g))) = E_i(\hat{g}, H(g)) \\ & E_i(g, H(g)) = 0 \end{aligned}$$

La première relation correspond à l'invariance par translation à droite, et la seconde relation justifie le terme d'"erreur" : ces fonctions sont nulles quand $\hat{g} = g$.

On considère alors les observateurs de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{g} &= L_{\hat{g}*}\omega_s(t) + \sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{g}, y) W_i(\hat{g}) \\ &= L_{\hat{g}*}\omega_s(t) + R_{\hat{g}*}(\sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{g}, y) W_i(e)) \end{aligned} \tag{7}$$

où les E_i's sont des erreurs invariantes à droite, $(W_1, ..., W_n)$ est un repère invariant à droite et où $y = H(g)$ est la sortie. Il semble que ce soit la forme la plus générale des observateurs pour lesquels notre résultat sur l'erreur est valable.

D. Le système d'erreur

Définissons l'erreur (invariante par translation à droite) $G \ni r = (\hat{g} g^{-1}) = L_{\hat{g}}(g^{-1})$. La dynamique de l'erreur vérifie l'équation autonome

$$\dot{r} = R_{r*}(\sum_{i=1}^{n} E_i(e, H(r^{-1})) W_i(e)) \tag{8}$$

En effet on a

$$\dot{r} = L_{\hat{g}*}(\dot{g^{-1}}) + D_g L_{\hat{g}}(g^{-1})\dot{\hat{g}} \tag{9}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} D_g L_{\hat{g}}(g^{-1})\dot{\hat{g}} &= R_{g^{-1}*}(\dot{\hat{g}}) \\ &= R_{g^{-1}*}(F(\hat{g}, t) + \sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{g}, y) W_i(\hat{g})) \\ &= R_{g^{-1}*} L_{\hat{g}*}\ F(e, t) + R_{g^{-1}*} R_{\hat{g}*} \sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{g}, y) W_i(e) \\ &= R_{g^{-1}*} L_{\hat{g}*}\ \omega_s + R_{r*} \sum_{i=1}^{n} E_i(\hat{g}, y) W_i(e) \end{aligned}$$

Or par invariance

$$E_i(\hat{g}, y) = E_i(\hat{g}, H(g)) = E_i(e, H(r^{-1}))$$

Par ailleurs on a

$$L_{\hat{g}*}(\dot{g}^{-1}) = -L_{\hat{g}*} R_{g^{-1}*} L_{g^{-1}*}\dot{g} = -L_{\hat{g}*} R_{g^{-1}*}\omega_s = -R_{g^{-1}*} L_{\hat{g}*}\omega_s$$

On a donc une équation différentielle autonome indépendante de la trajectoire $t \mapsto g(t)$:

$$\dot{r} = R_{r*}(\sum_{i=1}^{n} E_i(e, H(r^{-1})) W_i(e)).$$

E. Linéarisé tangent

On prend r proche de e l'élément neutre de G. Soit ξ proche de zéro l'élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que $r = \exp\ \xi$. On pose $p = \dim y$ la dimension de la sortie et on a

$$\frac{d}{dt}\xi = -D_y E\ |_{e,H(e)}\ \ DH\ |_e\ (\xi)$$

où l'on appelle $E = (E_1, ..., E_n)$. Il est toujours possible de choisir E localement autour de l'identité pour avoir la convergence asymptotique de la partie observable.

Pour cela, il suffit de définir un produit scalaire sur l'espace tangent en e, $\mathfrak{g}$, de considérer au sens de cette métrique, l'opérateur transposé de $DH\ |_e$, opérateur noté $(DH\ |_e)^T$ et de poser pour tout $\eta \in \mathfrak{g}$ proche de zéro,

$$E(e, \exp \eta) = K(DH\ |_e)^T \eta.$$

Par invariance à droite de E il est alors possible de définir E sans ambiguïté pour tout couple $(\hat{g}, g)$ avec $\hat{g} g^{-1}$ proche de 0.

L'équation du linéaire tangent s'écrit :

$$\dot{\xi} = -K\ DH^T\ DH\ \xi \tag{10}$$

et, pour $K > 0$, admet comme fonction de Lyapounov $\|\xi\|^2$ la longueur de ξ au sens de ce produit scalaire.

F. *Une famille d'observateurs non-linéaires convergents au premier ordre*

On définit un produit scalaire sur l'espace tangent en e, $\mathfrak{g}$, et on définit au sens de cette métrique, l'opérateur transposé de $DH\ |_e$, opérateur noté $(DH\ |_e)^T$. On considère alors les observateurs suivants :

$$\frac{d}{dt}\hat{g} = L_{\hat{g}*}\omega_s(t) + R_{\hat{g}*}[\sum_{i=1}^{n}[E_i(\varrho_{\hat{g}}^{-1}(H(g)) - E_i(H(e))]W_i(e)]$$

avec E_i's fonctions scalaires régulières de leurs arguments. Il suffit alors d'imposer pour $E = (E_1, ..., E_n)$ que

$$\xi \mapsto \frac{\partial E}{\partial y}\ |_{H(e)}\ \frac{\partial H}{\partial g}\ |_e\ \xi$$

application linéaire négative ou nulle au sens de la métrique. Ainsi on obtient une famille d'observateurs non-linéaires convergents au premier ordre pour la partie observable du système. Les valeurs propres nulles correspondent aux directions d'inobservabilité.

G. *Résultats complémentaires*

On suppose le système inobservable. On va montrer qu'alors une erreur initiale "dans la direction inobservable" est constante au cours du temps. Dire que le système est inobservable est équivalent à dire qu'il existe deux éléments distincts g_1 et g_2 de G tels que $H(g_1) = H(g_2)$, d'après la section III-B. Il existe alors σ tel que $H(\sigma) = H(e)$ ($\sigma \in N$), on peut voir σ comme une "direction d'inobservabilité", et on suppose qu'à l'instant initial σ est l'erreur d'estimation : $g(0) = \sigma\hat{g}(0)$ ou encore $g(0)$ et $\hat{g}(0)$ appartienne à la même classe d'équivalence $\{g(0)\} = \{\hat{g}(0)\}$. Alors l'erreur r vérifie alors à l'instant initial

$$r(0) = \sigma^{-1}$$

et on a

$$\dot{r} = R_{r*}(\sum_{i=1}^{n} E_i(e, H(\sigma)) = R_{r*}(\sum_{i=1}^{n} E_i(e, H(e)) = 0.$$

Donc $g(t)$ et $\hat{g}(t)$ restent pour tout temps dans la même classe d'équivalence (classe qui peut changer au cours du temps).

IV. Conclusion

Nous montrons dans cet article que quand un groupe de symétries agit sur lui-même, et que la dynamique est invariante à gauche, et la sortie compatible à droite, on peut construire des observateurs non-linéaires pour lesquels l'équation d'erreur est autonome. La construction des observateurs présentés ici est basée sur la notion d'erreur invariante ([1], [9]).

Pour des dynamiques invariant à gauche et une sortie compatible à gauche, on peut montrer un résultat similaire pour tout pré-observateur invariant à gauche (voir [**?**]) pour les pré-observateurs invariants) : la dynamique de l'erreur $g^{-1}\hat{g}$ ne vérifie plus une équation autonome si ω_s dépend du temps. Cependant, cette dynamique reste indépendante de la trajectoire $t \mapsto g(t)$.

V. Appendice : quaternions

Un quaternion p peut être vu comme l'ensemble d'un scalaire $p_0 \in \mathbb{R}$ et d'un vecteur $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$,

$$p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}.$$

Le produit quaternionique $\cdot$ s'écrit

$$p \cdot q := \begin{pmatrix} p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} \\ p_0\vec{q} + q_0\vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} \end{pmatrix}.$$

L'élément unité est

$$e := \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

et $(p \cdot q)^{-1} = q^{-1} \cdot p^{-1}$.

Tout vecteur $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ peut être vu comme un quaternion

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{p} \end{pmatrix},$$

Par exemple les quaternions associés à la base canonique de $\mathbb{R}^{\not 4}$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et nous avons les formules suivantes

$$p \times q := \vec{p} \times \vec{q} = \frac{1}{2}(p \cdot q - q \cdot p)$$

$$(\vec{p} \cdot \vec{q})\vec{r} = -\frac{1}{2}(p \cdot q + q \cdot p) \cdot r.$$

A tout quaternion q de norme 1 on peut associer une matrice de rotation $R_q \in SO(3)$ par la relation

$$q^{-1} \cdot \vec{p} \cdot q = R_q \cdot \vec{p} \quad \text{for all} \vec{p}.$$

Références

[1] N. Aghannan and P. Rouchon. On invariant asymptotic observers. In *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1479– 1484, 2002.

[2] N. Aghannan and P. Rouchon. An intrinsic observer for a class of lagrangian systems. *IEEE AC*, 48(6) :936–945, 2003.

[3] V. Arnold. *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique.* Mir Moscou, 1976.

[4] A. M. Bloch, P. S. Krishnaprasad, J. E. Marsden, and R. Murray. Nonholonomic mechanical systems with symmetry. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 136 :21–99, 1996.

[5] F. Fagnani and J. Willems. Representations of symmetric linear dynamical systems. *SIAM J. Control and Optim.*, 31 :1267–1293, 1993.

[6] J.W. Grizzle and S.I. Marcus. The structure of nonlinear systems possessing symmetries. *IEEE Trans. Automat. Control*, 30 :248–258, 1985.

[7] B. Jakubczyk. Symmetries of nonlinear control systems and their symbols. In *Canadian Math. Conf. Proceed.*, volume 25, pages 183–198, 1998.

[8] W. S. Koon and J. E. Marsden. Optimal control for holonomic and nonholonomic mechanical systems with symmetry and lagrangian reduction. *SIAM J. Control and Optim.*, 35 :901–929, 1997.

[9] Ph. Martin, P. Rouchon, and J. Rudolph. Invariant tracking. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 10 :1–13, 2004.

[10] P. J. Olver. *Equivalence, Invariants and Symmetry*. Cambridge University Press, 1995.

[11] W. Respondek and I.A. Tall. Nonlinearizable single-input control systems do not admit stationary symmetries. *Systems and Control Letters*, 46 :1–16, 2002.