



**HAL**  
open science

## Modélisation du procédé de chauffage de pièces dans un four industriel.

Elie Hachem, Hugues Dignonnet, Elisabeth Massoni, Thierry Coupez

► **To cite this version:**

Elie Hachem, Hugues Dignonnet, Elisabeth Massoni, Thierry Coupez. Modélisation du procédé de chauffage de pièces dans un four industriel.. CFM 2007 - 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. 6 p. hal-00521835

**HAL Id: hal-00521835**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-00521835>**

Submitted on 28 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Modélisation du procédé de chauffage de pièces dans un four industriel.

Elie Hachem\*, Hugues Digonnet, Elisabeth Massoni et Thierry Coupez

Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF)

Ecole des Mines de Paris, 1 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia Antipolis Cedex, France

Email: [elie.hachem@ensmp.fr](mailto:elie.hachem@ensmp.fr)

Web page: <http://www.cemef.ensmp.fr>

### Résumé :

Dans cet article, on considère un maillage unique de l'enceinte d'un four industriel et on utilise d'abord une technique d'immersion de domaines pour prendre en compte les différentes positions et géométries des pièces à chauffer. Par la suite, la thermique est calculée par des méthodes Eléments Finis de type P1 stabilisées, pour à la fois contrôler la convection forcée (au niveau des brûleurs) et les chocs thermiques dus à la diffusion transitoire (au niveau des lingots). Ces méthodes de stabilisation de type SUPG et SCPG pour la convection dominante et de type GGLS pour la diffusion pure sont présentées et analysées. La vitesse de convection est calculée en résolvant les équations de Navier Stokes couplées faiblement avec la thermique.

### Abstract:

We present in this paper the thermal modelling for an industrial oven. We begin by considering a single grid of this oven and then, in order to take into consideration different positions and forms of the heated parts inside, an immersion technique for multi-domain problem is used. Different stabilised finite element methods will be presented, such as SUPG and SCPG for reducing spurious oscillations in convection-dominated diffusion problem (at the burner's level) and GGLS for thermal shock's treatment in transient conduction heat transfer (at ingot's level). The velocity field is computed by solving the Navier-Stokes equations coupled to heat equations.

### Mots-clefs :

Éléments finis stabilisés, Convection dominante, Diffusion pure

## 1 Introduction

L'objectif de cette étude est d'apporter une meilleure connaissance du comportement thermique des fours, ainsi que des pièces qui y sont traitées. Cette problématique est primordiale pour les industriels. En particulier, cette étude s'attache à optimiser le placement des sources de chaleur et des pièces à chauffer et ceci en utilisant des simulations numériques reproduisant des cycles thermiques industriels.

Dans la première partie, on rappelle brièvement la résolution numérique du problème thermique selon l'approche la plus connue : la méthode de Galerkin standard. Sans modifications, cette méthode est inadaptée à un problème ayant un terme hyperbolique dominant, à cause de son instabilité au voisinage des discontinuités.

Pour résoudre ce problème, on a recours à des méthodes de stabilisation connues comme la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) : Hughes *et al.* (1985). Dans la deuxième partie, une modification de ces méthodes est présentée, cette nouvelle méthode, connue sous le nom SCPG (Shock-Capturing / Petrov Galerkin) : Carmo *et al.* (2003), apporte une amélioration en tenant compte des endroits du domaine où des forts gradients de température sont présents. D'autre part, la méthode de Galerkin standard rencontre également des difficultés pour traiter les chocs thermiques en cas de refroidissement ou réchauffement trop sévère des pièces dans le four. La méthode GGLS « Galerkin Gradient Least Squares » : Ilinca *et al.* (2002) appliquée au problème de diffusion pure instationnaire sera le sujet de la troisième partie. Finalement, des exemples d'application sur des cas industriels sont présentés.

## 2 Le problème de convection diffusion instationnaire

La détermination précise des champs de température dans une enceinte ou dans une pièce nécessite de résoudre les équations de convection/diffusion. Pour cela, on considère un domaine  $\Omega$  entouré par sa frontière  $\Gamma$ . Le calcul du champ de température  $T(x,t)$  dans ce domaine est régi par l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T - \nabla \cdot (\varepsilon \vec{\nabla} T) = f & \Omega \times ]0, t_n[ \\ T(\vec{x}, t) = T_{imposée} & \Gamma \times ]0, t_n[ \\ T(\vec{x}, t = t_0) = T_0(\vec{x}) \end{cases} \quad (1)$$

Où  $\varepsilon$  est le coefficient de diffusion (ou encore diffusivité thermique,  $m^2/s$ ),  $v$  la vitesse de convection ( $m/s$ ) et  $f$  un terme source.

La vitesse de convection est soit égale à une constante donnée soit calculée en résolvant les équations de Navier-Stokes couplées faiblement au problème thermique. De plus, pour simplifier le problème, des conditions de Dirichlet homogènes sont imposées sur la frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

### 2.1 La méthode de Galerkin standard

La méthode de Galerkin standard, consiste à approcher l'espace  $V$  par l'espace de dimension finie  $V_h$ : espace des fonctions d'interpolation qui sont des polynômes de degré  $n$  par élément,  $n$  étant l'ordre d'interpolation choisi (*dans notre cas :  $n=1$* ).

Dans ces conditions, la formulation faible discrète du problème devient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } T_h \in V_h \text{ telque :} \\ & a(T_h, w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in W_h \quad (\text{espace des fonctions tests s'annulant sur le bord}) \quad (2) \\ & \begin{cases} a(T_h, w_h) = \left( \frac{\partial T_h}{\partial t}, w_h \right) + \int_{\Omega} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T_h w_h d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon \vec{\nabla} T_h \cdot \vec{\nabla} w_h d\Omega \\ l(w_h) = \int_{\Omega} f w_h d\Omega \end{cases} \end{aligned}$$

Les cas traités dans cette étude correspondent d'une part à la convection dominante, c'est-à-dire où  $\varepsilon \ll h |v|$  et d'autre part à la diffusion pure où  $\varepsilon \ll h^2/\Delta t$ . ( $h$  étant la taille de maille et  $\Delta t$  le pas de temps). Cette méthode rencontre cependant des difficultés pour traiter les instabilités des problèmes fortement convectifs ou de diffusion pure. Ces limitations nous amènent à rechercher dans la littérature des méthodes mieux adaptées au problème thermique et efficaces pour traiter d'une part des termes de convection dominante comme la méthode SUPG et d'autre part des termes de diffusion pure comme la méthode GGLS. La plupart de ces techniques consistent à rajouter un terme de stabilisation à la formulation variationnelle de Galerkin standard. Dans le paragraphe suivant, la méthode SUPG est détaillée.

### 2.2 La méthode SUPG « Streamline Upwind Petrov Galerkin »

Comparé à la méthode de Galerkin standard, cette méthode rajoute un terme supplémentaire de diffusion artificielle dans le sens de l'écoulement, d'où le nom « Streamline Upwind » (SU : diffusion ligne de courant), le problème à résoudre devient :

$$a(T_h, w_h) + \sum_k \tau_k \int_k \left( \frac{\partial T_h}{\partial t} + v \cdot \nabla T_h - \nabla \cdot (k \nabla T_h) - f \right) (v \cdot \nabla w_h) = l(w_h) \quad \forall w_h \in W_h \quad (3)$$

$$\tau_K = \alpha \frac{h_k}{2|v_k|} \quad \alpha = (\coth(Pe) - \frac{1}{Pe}) \quad P_e = \frac{|v_k| h_k}{2\varepsilon} \quad (4)$$

$$(a) P_e \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow 1 \quad (b) P_e \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \quad (5)$$

$\tau_k$  est défini par élément ( $K$ ) et représente le paramètre de stabilisation qui dépend d'une part de la discrétisation locale (taille de maille d'un élément :  $h_k$ ) et d'autre part d'une constante  $\alpha$  définissant la nature du régime thermique dominant : convection (a) ou diffusion (b), cette dernière étant fonction du nombre de Péclet (nombre adimensionnel mesurant le rapport entre la convection et la diffusion) (Eq. 4).

Cependant, en présence de forts gradients de température, la méthode SUPG ne peut pas contrôler les dérivées dans la direction de ces gradients, et surtout au niveau des couches limites, d'où l'apparition d'oscillations résiduelles. Dans la section suivante, un nouveau terme de stabilisation est ajouté à la dernière formulation du problème thermique, cette technique s'appelant la méthode SCPG.

### 2.3 La méthode SCPG « Shock Capturing Petrov Galerkin »

Pour améliorer la stabilité, l'idée est de compléter l'effet précédent lorsqu'il y a de fortes variations locales de la température dans la direction des lignes de courant. Cette direction est représentée par un nouveau champ de vitesse (Eq. 5) choisi de façon à vérifier l'équation de départ (Eq. 1).

Le problème à résoudre devient donc :

Trouver  $T_h \in V_h$  telque:

$$a(T_h, w_h) + SUPG + \sum_K \tau_2 \int_K v_{||} \cdot \nabla T_h \quad v_{||} \cdot \nabla w_h = l(w_h) \quad \forall w_h \in W_h \quad (6)$$

Cette méthode offre une correction dans le sens de l'écoulement. Tout en gardant la perturbation ajoutée par la méthode SUPG, cette dernière rajoute une discontinuité en fonction du paramètre  $\tau_2$  (Eq. 8) qui permet de mieux contrôler les dérivées dans la direction des forts gradients. Elle est proportionnelle au résidu de la solution approchée et par conséquent elle disparaît dans les régions lisses.

Cependant, la direction du nouveau champ de vitesse peut coïncider avec la direction transversale. Ceci entraîne une diffusion excessive à cause des deux contributions ajoutées au problème. Pour éviter ce cas,  $\tau_2$  est défini de manière à minimiser la nouvelle contribution dans le sens transversal, sens correspondant à la méthode SUPG.

$$v_{||} = \begin{cases} \frac{R_e(T_h)}{\|\nabla T_h\|^2} \nabla T_h & \text{si } \nabla T_h \neq 0 \\ 0 & \text{si } \nabla T_h = 0 \end{cases} \quad (7) \quad \tau_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } v_{||} \geq v \\ \tau_k \left( \frac{v}{v_{||}} - 1 \right) & \text{si } v_{||} < v \end{cases} \quad (8)$$

$\Rightarrow v_{||} \cdot \nabla T_h = R_e(T_h)$  où  $R_e$  : le résidu du problème.

On remarque effectivement d'après la définition de  $\tau_2$ , que la valeur maximale de diffusion ajoutée par cette méthode est toujours inférieure de 25% par rapport à celle ajoutée par la méthode SUPG : Carmo *et al.* (2003)

### 2.4 La méthode GGLS « Galerkin Gradient Least Squares »

Les méthodes de Galerkin standard peuvent également rencontrer des difficultés pour le traitement des problèmes de diffusion pure instationnaire (cas où le terme de convection est nul), en particulier lorsqu'on doit traiter des chocs thermiques. Pour résoudre ces problèmes de chocs, la méthode de GGLS rajoute (sous forme de diffusion) des termes de stabilisation à la

formulation variationnelle de Galerkin standard. Ces termes sont obtenus en minimisant le carré du gradient résiduel Ilinca *et al.* (2002). Le problème à résoudre devient donc :

Trouver  $T_h \in V_h$  telque:

$$a(T_h, w_h) + \sum_K \tau_\nabla \int_K \nabla(\text{Re}_h) \cdot \nabla w_h = l(w_h) \quad \forall w_h \in W_h \quad (9)$$

$$\tau_\nabla = \frac{h_k^2}{6} \xi \quad \xi = \frac{\cosh(\sqrt{6\beta}) + 2}{\cosh(\sqrt{6\beta}) - 1} \quad \beta = \frac{h_k^2}{6 \varepsilon \Delta t} \quad (10)$$

$$(a) \beta \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 1 \quad (b) \beta \rightarrow 0 \Rightarrow \xi \rightarrow 0.5 \quad (11)$$

$\tau_\nabla$  est défini par élément ( $K$ ) et représente le paramètre de stabilisation qui dépend d'une part de la discrétisation locale (taille de maille d'un élément :  $h_k$ ) et d'autre part d'une constante  $\xi$  définissant la nature du régime thermique dominant : transitoire (a) ou diffusion (b), cette dernière étant en fonction du  $\beta$  (nombre adimensionnel mesurant le rapport entre les termes transitoires et la diffusion) (Eq. 10-11).

### 3 Comparaison et résultats numériques

Pour des problèmes de convection/diffusion à convection dominante ou à diffusion pure, ces méthodes présentent de bonnes propriétés de stabilité dans plusieurs cas. Dans cette partie on donne deux exemples numériques pour comparer ces approches.

#### 3.1 Convection dominante

Deux simulations ont été effectuées sur une plaque bidimensionnelle (0,5x0,1) initialement à 50°C, l'une utilisant la méthode SUPG et l'autre SUPG+SC (FIG. 1). Le champ de vitesse (profil parabolique) est calculé en résolvant le problème de Stokes au début de chaque simulation. La diffusivité thermique est de l'ordre de  $10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ .

Pour ce problème à convection dominante, on remarque bien d'après la figure. 2, que la nouvelle méthode de stabilisation SUPG+SC permet d'éliminer, en présence des forts gradients de température, les oscillations résiduelles et non corrigées par la méthode SUPG.

FIG. 1 – Température (200°C) et vitesse imposées

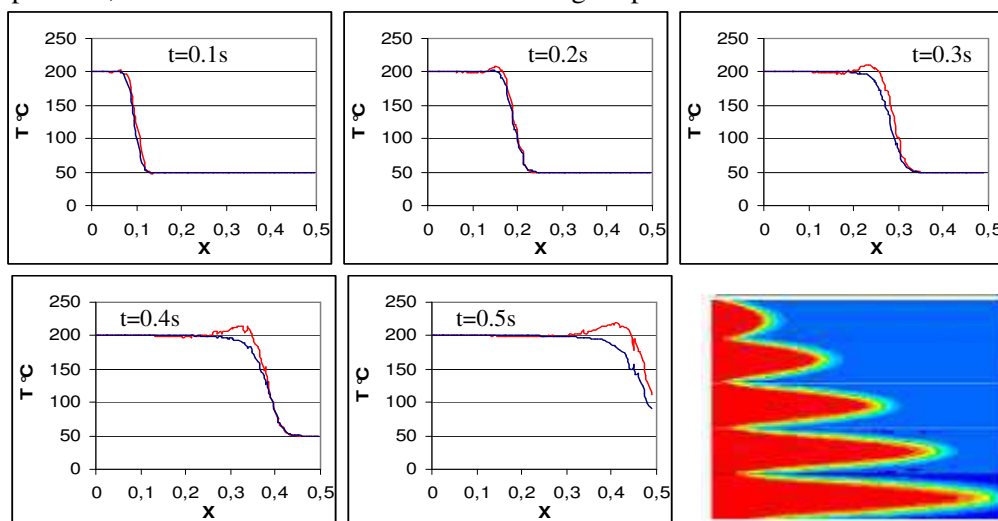
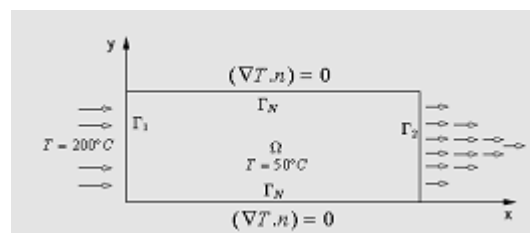


FIG 2 – Coupe transversale et évolution de la température à différents instants.

### 3.2 Diffusion pure

On considère le problème de diffusion pure appliqué à une plaque 2D prise initialement à 50°C. Nous nous sommes intéressés au réchauffement de cette plaque, pour cela, on impose une température de 200°C sur une des faces. La diffusivité thermique est de l'ordre de  $10^{-4} m^2/s$ , taille de maille  $h = 10^{-2} m$  et le pas de temps  $\Delta t = 10^{-3} s$ . La figure 4 met en évidence les oscillations de la méthode Galerkin standard au début d'un contact où le gradient de température est fort (a) et (b). En rajoutant de la diffusion, on constate que la méthode GGLS élimine ces oscillations. Au cours du temps le choc thermique disparaît, ce qui a pour effet de faire coïncider les deux méthodes (c) et (d).

FIG. 3 – Température imposée (200°C)

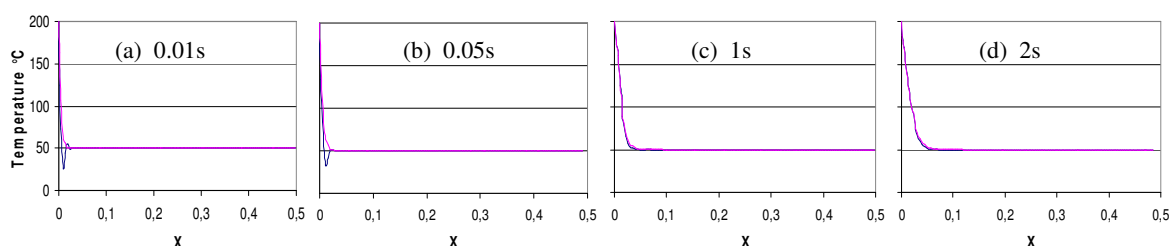
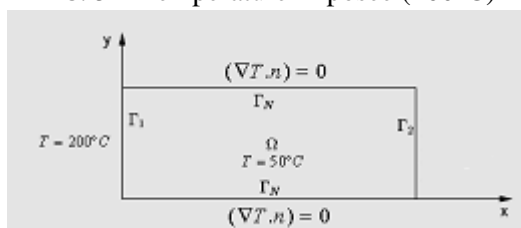


FIG. 4 – Evolution de la température à différents instants et comparaison des deux méthodes.

## 4 Applications Numériques

### 4.1 Application 2D

Dans cette partie, on applique les deux méthodes validées précédemment au cas de la simulation d'un four industriel. Pour cela, on considère un maillage unique en 2D, et on utilise d'abord une technique d'immersion de domaines (Figure 5-6) pour prendre en compte les positions et les géométries des pièces à chauffer (Figure 5) ou à refroidir (Figure 6). Cette technique aide aussi à définir les propriétés physiques comme la température initiale et la diffusivité pour chaque domaine à savoir : l'air et la pièce à chauffer.

Finalement, pour simuler numériquement tout le cycle thermique dans un four, un modèle d'enchaînement des calculs est mise en place. Cette technique robuste, sert en passant d'un modèle à l'autre, à changer les conditions aux limites et à partager tous les résultats.

Comme exemple d'application (Figure 5), un cycle formé par la série suivante a été choisi:

- a- Chauffage du four
- b- Extinction de l'un des brûleurs
- c- Insertion d'un lingot
- d- Remaillage au niveau du lingot
- e- Chauffage du lingot à l'intérieur du four
- f- Ouverture d'une porte

La vitesse de convection est calculée en résolvant les équations de Navier Stokes couplées faiblement au problème thermique.

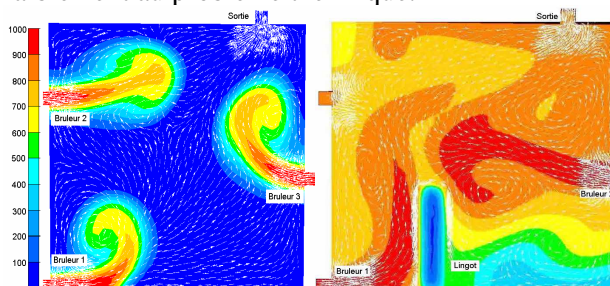


FIG 5 – Répartition de la température et des vecteurs vitesses.

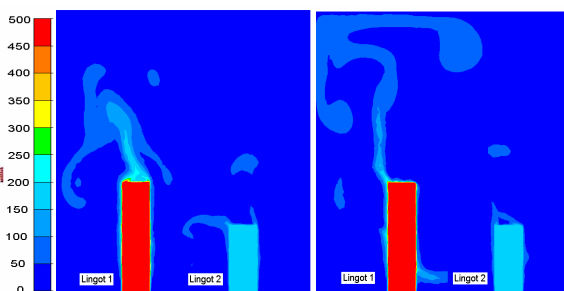


FIG 6 – Refroidissement des deux lingots pris initialement à 500°C et 250°C dans une enceinte à 25°C.

## 4.2 Application 3D

Dans cette dernière partie, on considère un four de dimension  $1m^3$ . Deux brûleurs sont introduits, ils correspondent à deux entrées de fluide et une sortie d'air est placée au milieu. (Figure 7). Une hélice prise initialement à  $25^{\circ}C$  est insérée au milieu du four au début de la simulation. L'hélice ( $\varepsilon \approx 10^{-6}m^2/s$ ) est chauffée par deux brûleurs à  $1000^{\circ}C$  chacun. La validation des méthodes précédentes appliquées ici à un cas tridimensionnel est exposée dans la figure 8. Cet exemple met en relief l'efficacité de ces méthodes de stabilisation dans un four de  $1m^3$ .

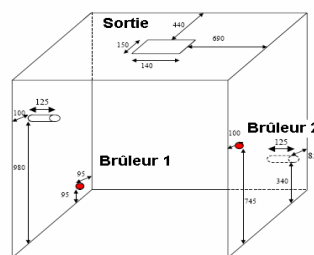


FIG 7 – Schéma du four

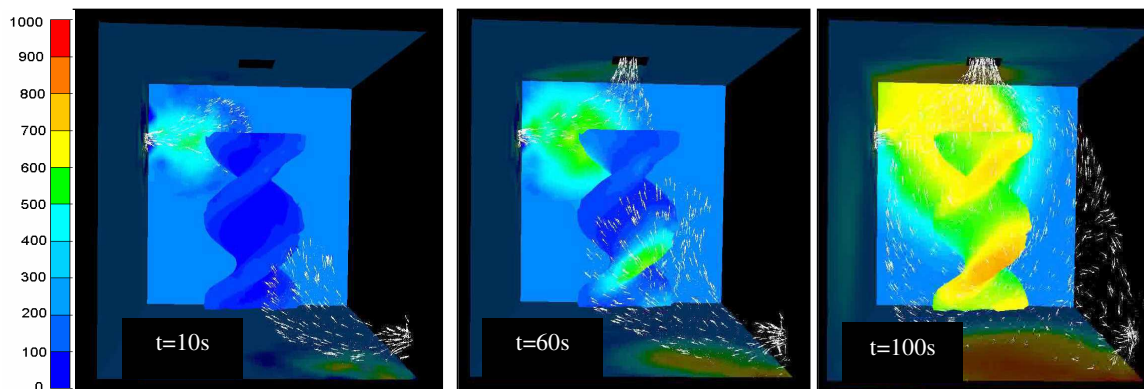


FIG 8 – Chauffage d'une hélice à trois instants différents

Dans la majorité des cas, pour une vitesse de convection imposée au niveau des brûleurs de  $1m/s$  et pour une faible diffusivité thermique du fluide, de l'ordre de  $10^{-5}m^2/s$ , ce problème devient fortement convectif, ce qui amène à des résultats non acceptables. Or dans notre cas, l'utilisation des nouvelles méthodes SUPG+SC et GGLS stabilisent à la fois le terme convectif dominant dans l'enceinte du four et les chocs thermiques au niveau du lingot.

## 5 Conclusion

Nous avons vu au cours de cette étude que ces nouvelles méthodes de stabilisation SUPG+SC et GGLS, utilisées dans un même solveur, permettent d'éliminer les oscillations résiduelles non corrigées dans différentes applications 2D et 3D. Pour la modélisation thermique dans des fours à l'échelle industrielle, et surtout en présence de fort gradient de température, ces méthodes s'avèrent particulièrement utiles pour des problèmes de convection/diffusion couplés faiblement à des problèmes de Navier Stokes.

## Références

- A. Mizukami, T.J.R.Hughes 1985, A Petrov-Galerkin finite element method for convection-dominated flows: an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 50, 181–193.
- F. Ilinca and J. -F. Héту 2002, Galerkin gradient least-squares formulations for transient conduction heat transfer ,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 191, Pages 3073-3097
- E.G.D. do Carmo, G.B. Alvarez 2003, A new stabilized finite element formulation for scalar convection-diffusion problems: The streamline and approximate upwind/Petrov - Galerkin method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 192, 3379-3396.