



**HAL**  
open science

## Modélisation du flambage des tôles laminées sous contraintes résiduelles

Sami Abdelkhalek, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry, Pierre Montmitonnet, Nicolas Legrand, Pascal Buessler

► **To cite this version:**

Sami Abdelkhalek, Hamid Zahrouni, Michel Potier-Ferry, Pierre Montmitonnet, Nicolas Legrand, et al.. Modélisation du flambage des tôles laminées sous contraintes résiduelles. 9e Colloque National en Calcul des Structures, May 2009, Giens, France. hal-00509452

**HAL Id: hal-00509452**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-00509452>**

Submitted on 12 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Modélisation du flambage des tôles laminées sous contraintes résiduelles

S. Abdelkhalek<sup>1,2</sup>, H. Zahrouni<sup>2</sup>, M. Potier-Ferry<sup>2</sup>, P. Monmitonnet<sup>1</sup>, N. Legrand<sup>3</sup>, P. Buessler<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Ecole des Mines de Paris-ParisTech-CEMEF - UMR CNRS 7635

BP 207 - 06904 Sophia-Antipolis - Cedex – France.

{sami.abdelkhalek,pierre.monmitonnet}@mines-paristech.fr

<sup>2</sup> LPMM - UMR CNRS 7554 - ISGMP - Université de Paul Verlaine-Metz

Ile de Saulcy - 57045 Metz - France.

{hamid.zahrouni,michel.potierferry}@univ-metz.fr

<sup>3</sup> ArcelorMittal Research Maizières, R&D Industrial Operations

BP 30320 - Voie Romaine 57283 Maizières Les Metz -Cedex- France.

{nicolas.legrand, pascal.buessler}@arcelormittal.com

---

**Résumé** –La modélisation des défauts de planéité occupe une position prioritaire parmi les axes de recherche pour les producteurs des tôles métalliques. Par ailleurs, on dispose d'un logiciel Lam3/Tec3 dédié pour la simulation de laminage des tôles qui présente certaines limitations dans sa version standard, surtout quand il s'agit des cas de laminage des tôles pour les quels le flambage, d'où des défauts de planéité, peut se produire. De ce fait, il a été complété durant les présents travaux par un modèle de flambage des plaques afin de combler ses insuffisances.

**Mots clés** – Laminage, défauts de planéité, flambage, contraintes résiduelles.

---

## 1 Introduction

Sous les chargements intenses du laminage à froid, la déformation des cylindres (aplatissement, flexion, bombé thermique) induit une hétérogénéité de l'élongation en sortie de l'emprise dans le sens de la largeur de la bande. Cette hétérogénéité engendre l'apparition des contraintes résiduelles pouvant entraîner le flambage, que l'on nomme dans ce contexte défaut de planéité (cf. figure 1). Ce dernier est un souci important pour l'industrie du laminage, une bonne planéité étant un élément majeur pour la qualité du produit.

Par ailleurs, le flambage conduit à la réorganisation du champ de contrainte dans la bande hors emprise (emprise = zone de contact cylindres / bande), ce qui pourrait a priori avoir une influence sur les contraintes et déformations dans l'emprise. Ainsi, le problème mécanique inclut un couplage combinant la déformation élastique des cylindres de travail, la déformation élasto-(visco)plastique de la bande dans l'emprise, et le flambage hors de l'emprise. Or la plupart des modèles ([1]-[6]) négligent le couplage emprise / post-emprise, à l'exception notable de [7]. En se basant sur cette hypothèse (découplage entre l'emprise et la zone post-emprise) qui a été justifiée dans une présentation précédente [8], dans cet article on expose une utilisation de Lam3/Tec3 [9] (modèle éléments finis 3D adapté à la simulation du laminage mais limité par l'incapacité de reproduire le flambage) en chaînage avec un modèle de flambage des plaques afin de modéliser les défauts de planéité. Ce chaînage entre

Lam3/Tec3 et le code basé sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) ([10],[11]) et une formulation de coque pour la simulation du flambage sous contraintes résiduelles, est décrit comme suit :

- un premier calcul de laminage est effectué à l'aide de Lam3/Tec3, sans tenir compte du flambage, fournissant des champs de contraintes résiduelles, y compris hors emprise.
- Ces champs de contraintes sont utilisés comme contraintes résiduelles à la deuxième étape du calcul de flambage qui permet d'obtenir la charge critique, le mode de flambage ainsi que l'état post-flambé avec la nouvelle (et réelle) répartition des contraintes dans la tôle.

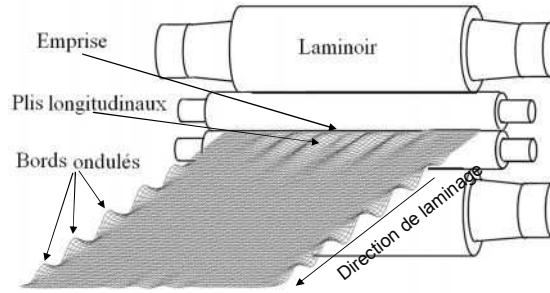


Figure 1- Illustration des défauts de planéités dans une tôle mince laminée.

## 2 Formulation de la Méthode Asymptotique Numérique

Les équations du problème sont équivalentes à la stationnarité de la fonctionnelle de Hu-Washizu qui s'écrit comme suit:

$$\delta\phi_{\text{HW}} = \int_v \{ {}^t\delta S : [(\gamma_u + \tilde{\gamma}) - D^{-1} : S] + {}^tS : [\delta\gamma_u + \delta\tilde{\gamma}] \} dv - \lambda P_e(\delta u) \quad (1)$$

où  $D$  est le tenseur des constantes élastiques,  $S$  est le second tenseur de contraintes de Piola-Kirchoff,  $\gamma_u$  est la déformation compatible de Green-Lagrange obtenue à partir du champ de déplacement  $u$  qui est composé d'une partie linéaire et une partie quadratique :  $\gamma_u = \gamma_l(u) + \gamma_{nl}(u, u)$ .  $\tilde{\gamma}$  est la déformation additionnelle indépendante du déplacement, qui doit être orthogonale au champ des contraintes, permettant d'éviter le phénomène de verrouillage.  $P_e(\delta u)$  est le travail virtuel des efforts extérieurs et  $\lambda$  est un paramètre de chargement. Ce dernier atteint une valeur critique  $\lambda_c$  quand le flambage a lieu.

### 2.1 MAN pour suivi de courbe

La MAN consiste à chercher la courbe solution du problème non linéaire (1) sous forme d'un développement asymptotique au voisinage d'une solution initialement connue  $(U_0, \lambda_0)$  selon un paramètre «  $a$  » :

$$\begin{aligned} U(a) &= U_0 + aU_1 + a^2U_2 \dots + a^nU_n \\ \lambda(a) &= \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 \dots + a^n\lambda_n \\ a &= \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 \end{aligned} \quad (2)$$

Ici,  $U = \begin{pmatrix} u \\ \tilde{\gamma} \\ S \end{pmatrix}$  et  $n$  est l'ordre de troncature de la série.

L'équation (1) peut s'écrire sous forme d'un résidu  $R$  comme suit :

$$R(U, \lambda) = L(U) + Q(U, U) - \lambda F = 0 \quad (3)$$

où  $L(\cdot)$  et  $Q(\cdot, \cdot)$  sont respectivement un opérateur linéaire et quadratique,  $F$  est le vecteur des efforts extérieurs. Si on substitue (2) dans (3), le problème se transforme en une séquence de problèmes linéaires comme on le montre ci-dessous :

ordre 1 :

$$\begin{aligned} L_t^0(U_1) &= \lambda_1 F \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

ordre  $p$  ( $1 < p < n$ ) :

$$\begin{aligned} L_t^0(U_p) &= \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \\ \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$L_t^0(\cdot)$  est l'opérateur tangent qui ne dépend que de la solution initiale.

## 2.2 Indicateur de bifurcation

L'indicateur de bifurcation ([11],[12]) est obtenu en introduisant une perturbation fictive dans le problème. Il ne s'agit pas de modifier le problème initial mais de construire un problème auxiliaire qui permet d'évaluer l'indicateur sur toute la branche d'équilibre et de déterminer tous les points singuliers et leurs modes correspondants.

Soit  $\Delta\mu \cdot f$  une force de perturbation fictive appliquée à la structure dans un état déformé  $(U, \lambda)$ .  $\Delta\mu$  représente l'intensité de cette force et  $\Delta U$  la réponse à cette perturbation. Si on considère le problème (3), la forme perturbée est décrite par l'équation suivante :

$$L(U + \Delta U) + Q(U + \Delta U, U + \Delta U) = \lambda F + \Delta\mu f \quad (6)$$

En considérant l'état d'équilibre et en négligeant les termes quadratiques en  $\Delta U$ , on obtient le problème suivant :

$$L_t(\Delta U) = \Delta\mu f \quad (7)$$

où  $L_t(\cdot) = L(\cdot) + 2Q(U, \cdot)$  est l'opérateur tangent défini au point d'équilibre considéré  $(U, \lambda)$ .

Pour résoudre ce problème, on se donne une condition supplémentaire définie comme suit :

$$\langle L_t^0(\Delta U - \Delta U_0), \Delta U_0 \rangle = 0 \quad (8)$$

où  $L_t^0$  est l'opérateur tangent au point de départ  $(U_0, \lambda_0)$  et  $\Delta U_0$  est solution de  $L_t^0(\Delta U_0) = f$ .

L'indicateur de bifurcation  $\Delta\mu$  peut être alors calculé à partir de (7) et (8):

$$\Delta\mu = \frac{\langle \Delta U_0, f \rangle}{\langle L_t^{-1}(f), f \rangle} \quad (9)$$

qui s'annule exactement aux points critiques.

Le problème ((7) et (8)) est résolu en utilisant la méthode asymptotique numérique. Les variables  $\Delta U$  et  $\Delta\mu$  sont recherchées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta U(a) - \Delta U_0 &= \sum_{i=1}^N a^i \Delta U_i \\ \Delta\mu(a) - \Delta\mu_0 &= \sum_{i=1}^N a^i \Delta\mu_i \end{aligned} \quad (10)$$

En injectant les équations (10) dans (7) et (8), on obtient :  
à l'ordre 0 :

$$L_t^0(\Delta U_0) = \Delta\mu_0 \cdot f \quad (11)$$

On résout ce système en considérant  $\Delta\mu_0 = 1$ .

A l'ordre  $p > 1$  :

$$L_i^0(\Delta U_p) = \Delta \mu_p f - 2 \sum_{j=1}^p Q(U_j, \Delta U_{p-j}) \quad (12)$$

$$\langle \Delta U_p, f \rangle = 0 \quad (13)$$

Les vecteurs  $U_i$  et l'opérateur tangent  $L_i^0$  sont ceux déterminés pour le calcul de la branche d'équilibre. Nous n'inversons pas de matrice supplémentaire dans cette procédure. Seuls des seconds membres sont calculés.

### 3 Validation du modèle du flambage

Des tests de validation ont été effectués en comparant les résultats du modèle avec des applications dont les solutions analytiques sont connues et qui sont données par Timoshenko [13]:

Soit une plaque en appuis simples sur les deux extrémités soumise à une distribution de contraintes résiduelle homogène, dont seulement la composante longitudinale est non nulle ( $\sigma_{xx} = -1\text{MPa}$ ). La plaque est de longueur  $a$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur  $h = 1\text{mm}$ . Elle est constituée d'un matériau dont les constantes d'élasticité sont données par le module de Young  $E = 200\text{ GPa}$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Deux configurations ont été examinées : plaque à bords libres et plaque à bords en appuis simples. On supposera les conditions de symétrie par rapport au plan  $(x,z)$  pour ne modéliser que la moitié de la structure.

En faisant varier le rapport «  $a/b$  », la figure 2 montre qu'on obtient une très bonne concordance entre les valeurs de la charge critique  $\lambda_c$  issu de notre modèle et celles données par les calculs analytiques.

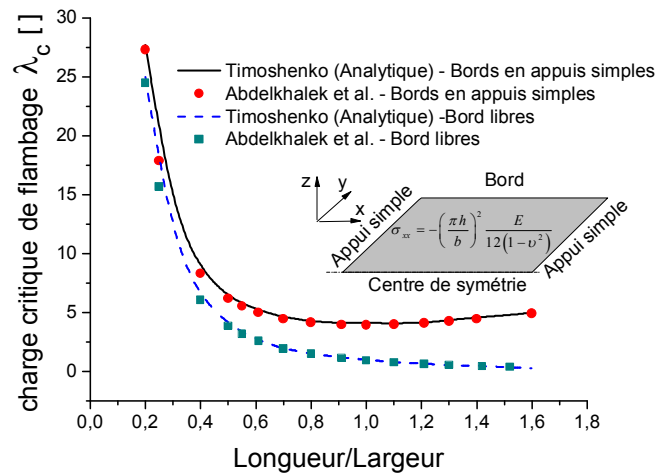


Figure 2 - Évolution de la charge critique de flambage  $\lambda_c$  en fonction du rapport longueur/largeur de la plaque, pour un champ de contrainte de compression homogène et unidirectionnel. Ici, des appuis simples sont considérés sur les deux extrémités de la bande.

### 4 Application à la modélisation des défauts de planéité en laminage des tôles minces

Dans ce paragraphe, une application à un cas de laminage est présentée. Le modèle de flambage y est utilisé en chaînage avec Lam3/Tec3, en s'appuyant sur le principe de découplage entre l'emprise et le flambage hors de l'emprise [8].

Pour le cas de laminage représenté ci-dessous (tableau 1 et figure 3), on ne considère que la partie de la bande située en aval de l'emprise. La condition de symétrie au centre de la tôle a été adoptée. Dans le modèle de flambage, la sortie de l'emprise a été assimilée à un encastrement. A l'autre extrémité, on impose une condition d'appui simple (pas de déplacement dans le sens vertical) et une contrainte de traction dans le sens horizontal, correspondant à la tension de bande pendant le laminage.

Quant au bord (la rive de la bande), il a été considéré libre.

Pour ce cas traité, on montre sur la figure 3-d les profils de contraintes longitudinales  $\sigma_{xx}$  à mi-intercage avant et après flambage, quand la bande est encore sous traction (au cours du laminage). A partir de cette figure, on voit bien l'effet relaxant du flambage sur cette contrainte qui devient très proche de celle mesurée sur une ligne de laminage à l'aide des rouleaux de planéité. Toutefois, cette relaxation se produit pour un défaut minime quand la tôle est sous traction (déplacement hors-plan de l'ordre de  $10^{-2}$  mm) (cf Figure 3-b). Compte tenu des très fortes contraintes compressives  $\sigma_{xx}$  calculées en rive par Lam3/Tec3 (-800 MPa), on s'attendait à voir de plus fortes ondulations. Or, elles n'apparaissent qu'après le relâchement de la tension de bande, qui conduit à un changement considérable de mode (comparer les figures 3-b et 3-c), avec une longueur d'onde de l'ordre de 100 mm et une amplitude de l'ordre de 2 mm, intéressant environ 100 mm sur chaque rive.

Largeur de la bande	851 mm	
Épaisseur d'entrée (bombé)	0,355 mm (2,54 %)	
Épaisseur de sortie	0,252 mm	
Vitesse de laminage	22 m/s	
<b>Propriétés du laminoir</b>		
A, B, C, D	1400 mm, 1295 mm, 1075 mm, 555 mm	
E, F, G, H, I, effort de contre flexion F	343 mm, 1010 mm, 1300 mm, 955 mm, 482549 N	
Bombé cylindre	0,01614 %	
Effort de traction en amont par unité de surface	-170 MPa	
Effort de traction en aval par unité de surface	100 MPa	
<b>Lois de Comportement et de frottement</b>		
Lois de comportement	Module d'Young = 210 GPa, coefficient de poisson : 0,3 $\sigma_0 = (470.5 + 175.4 \times \bar{\epsilon}) \times (1 - 0.45 \times e^{-8.9\bar{\epsilon}}) - 175$	
Loi de frottement	Coulomb : $\tau = 0,03 \times \sigma_n$	

Tableau 1 - Données du cas de laminage traité.

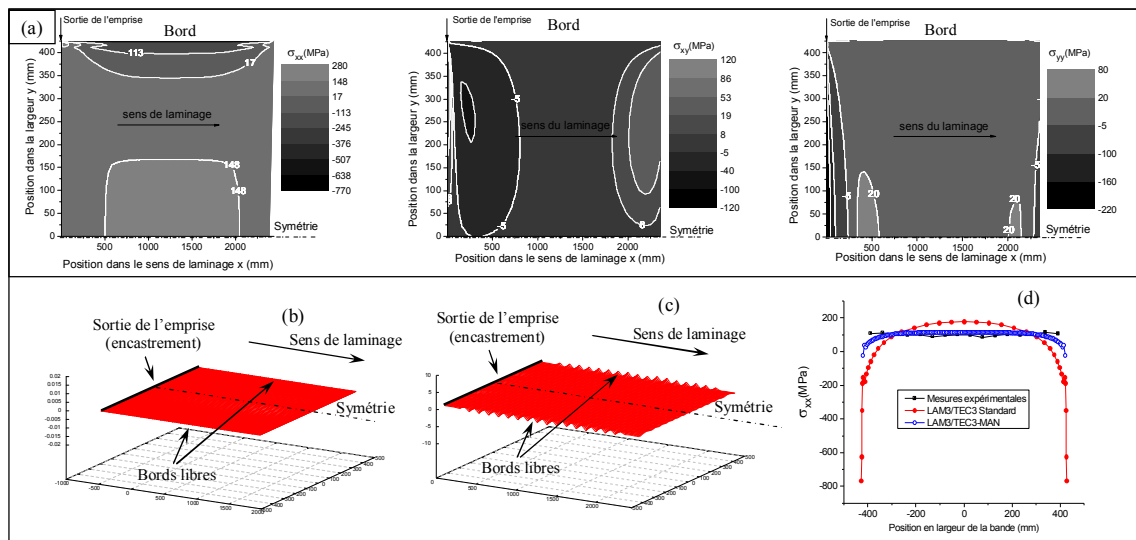


Figure 3 - (a) : Composantes du tenseur de contrainte résiduelle provenant de Lam3/Tec3, (b) et (c) : Défauts de planéité respectivement quand la tôle est sous traction ((b)) et après le relâchement de cette dernière ((c)), (d) Comparaison entre les profils de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  suivant la largeur de la bande à une section assez éloignée de l'emprise issues de Lam3/Tec3-standard, Lam3/Tec3-MAN découplé et les mesures expérimentales.

## 5 Conclusion

Le couplage de Lam3/Tec3 avec un modèle complet de flambage des coques serait certes pertinent, mais difficile à mettre en œuvre. En revanche, l'absence de rétroaction entre l'emprise et le flambage justifie l'adoption d'une procédure découplée décrite dans le paragraphe 4. À l'aide de cette procédure, plusieurs cas académiques de flambage de plaques sous contraintes résiduelles admettant des solutions analytiques et une application à un cas de laminage ont été analysés dans le présent article. En effet, les comparaisons respectives avec des solutions analytiques et des mesures expérimentales ont montré la pertinence de ce modèle de flambage, en particulier pour les cas de laminage offrant des distributions de champs de contraintes résiduelles assez complexes.

## Références

- [1] H. Marchand. Modélisation de la planéité en sortie de laminage des produits plats (Modelling flatness in flat rolling). PhD Thesis, *Ecole des Mines de Paris*, 2000.
- [2] Y. Tosawa. Analysis of three dimensional deformation in strip rolling taken deformation of rolls into consideration. *Advanced technology of plasticity*, vol. 2, pages. 1151-1160, 1984.
- [3] C. D. Coman, A. P. Bassom. An asymptotic description of the elastic instability of twisted thin elastic plates. *Acta Mechanica*, Vol. 200, pages. 59-68, 2008.
- [4] A. Bush, R. Nicholls and J. Tunstall. Stress levels for elastic buckling of rolled strip and plate. *Ironmaking and steelmaking*, vol. 28, pages 481-484, 2001.
- [5] F. G. Rammerstorfer, F. D. Fisher, N. Friedl. Buckling of free infinite strips under residual stress and global tension. *Journal of applied mechanics*, Vol 68, pages. 399-404, 2001.
- [6] F. D. Fisher, F. G. Rammerstorfer, N. Friedl and W. Wisser. Buckling phenomena related to rolling and levelling of sheet metal. *International journal of mechanical sciences*. Vol. 42, pages. 1887-1910, 2000.
- [7] C. Counhaye. Modélisation et contrôle industriel de la géométrie des aciers laminés à froid (modelling and industrial control of the geometry of cold rolled steels). PhD Thesis, *Université de Liège*, 2000.
- [8] S. Abdelkhalek, P. Monmitonnet, N. Legrand, P. Buessler. Manifested flatness predictions in thin strip cold rolling. In 11<sup>th</sup> *ESAFORM conference forging and rolling*, 2008.
- [9] A. Hacquin, P. Montmitonnet and J.P. Guillaud. A steady state thermo-elastoviscoplastic finite element model of rolling with coupled thermo-elastic roll deformation. *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 60, pages. 109-116, 1998.
- [10] H. Zahrouni, B. Cochelin and M. Potier-Ferry. Computing finite rotations of shells by an asymptotic-numerical method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 175, pages. 71-85, 1999.
- [11] E.H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry and M. Boudi. Bifurcation Points and Bifurcated Branches by an Asymptotic Numerical Method and Padé Approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 60, pages. 1987-2012, 2004.
- [12] P. Vannucci, B. Cochelin, N. Damil, M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method to compute bifurcating branches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pages. 1365-1389, 1998.
- [13] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of elastic stability. *Mc Graw Hill Book Company, Inc*, New York, Second edition, 1961.