HAL
open science

Estimation d'état pour les drones aériens

Philippe Martin, Erwan Salaün

To cite this version:

Philippe Martin, Erwan Salaün. Estimation d'état pour les drones aériens. 2010. hal-00494343

HAL Id: hal-00494343

https://minesparis-psl.hal.science/hal-00494343

Preprint submitted on 22 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation d'état pour les drones aériens

Philippe Martin
Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
75272 Paris Cedex 06, France
philippe.martin@mines-paristech.fr

Erwan Salaün
Decision and Control Laboratory
School of Aerospace Engineering
Georgia Institute of Technology
Atlanta GA 30332-0150, USA
erwan.salaun@gatech.edu

Résumé - ***Ce papier fait un (petit) tour d'horizon des problèmes d'estimation d'état dans le cadre des (mini)-drones aériens ; il aborde la question sous l'angle à la fois des algorithmes et de l'information qu'on peut tirer des capteurs les plus courants, en particulier accéléromètres et gyroscopes.***

Mots-clés - ***Robots volants, fusion multi-capteurs, capteurs inertiels, observateurs, filtre de Kalman***

INTRODUCTION

L'estimation de l'état (ou plus exactement de l'orientation et du vecteur vitesse) est primordiale pour le bon fonctionnement des drones aériens, en particulier à voilure tournante. En effet ces drones sont instables en boucle ouverte ; pour les piloter facilement, a fortiori pour les faire fonctionner de manière autonome (pilotage manuel "assisté" à distance en retour vidéo, suivi automatique de waypoints, évitement d'obstacles, etc.), il est donc nécessaire de les stabiliser par un algorithme de commande en boucle fermée, algorithme qui utilisera forcement de manière directe ou indirecte une estimation de l'état. De nombreux capteurs sont susceptibles d'être utilisés : capteurs inertiels (c'est-à-dire gyroscopes et accéléromètres), GPS, magnétomètres, capteurs de pression, télémètres, radar Doppler, systèmes de vision, etc., chacun avec ses avantages et inconvénients. Les informations provenant des différents capteurs sont ensuite fusionnées en temps réel avec un modèle dynamique du système par l'algorithme d'estimation, afin de fournir (une estimation de) l'état du drone. Il y a une vaste littérature sur le sujet, en particulier dans le domaine aéronautique et spatial, cf par exemple [1], [2]. Le contexte des (mini)-drones soulève néanmoins une problématique spécifique et assez nouvelle : du fait du degré d'autonomie escompté mais de la faible charge emportable, l'avionique (capteurs et processeurs) doit être à la fois sophistiquée et très légère, et au total assez différente de ce qui est utilisée dans l'aéronautique.

Ce papier tente d'aborder de manière synthétique les différents choix et compromis qui se posent pour la conception d'estimateurs, à la fois en termes de capteurs, de fonctionnalités et d'algorithmes d'estimation. Il est organisé comme suit : la section I présente les équations du mouvement qui seront utilisées, ainsi qu'une discussion sur les différents capteurs envisageables ; la section II fait un tour d'horizon des méthodes d'estimation de type "observateur" (au sens de l'Automatique) ; enfin, la section III étudie plusieurs cas concrets d'estimation d'état pour les drones.

I. MODÈLE DU MOUVEMENT ET DES CAPTEURS

A. *Équations du mouvement*

On assimile le drone à un corps rigide, sur lequel agissant le poids et les forces aérodynamiques. Le Principe Fondamental de la Dynamique permet d'écrire

$$m\dot{\vec{V}}_C = m\vec{g} + \vec{F} \tag{1}$$

$$\dot{\vec{\sigma}}_C = \vec{M}_C, \tag{2}$$

où m est la masse du corps, $\vec{V_C}$ la vitesse du centre de masse C, $\vec{\sigma}_C := \int \vec{CM} \times \dot{\vec{CM}} d\mu(M)$ le moment cinétique en C, $\vec{F}$ la résultante des forces aérodynamiques, et $\vec{M}_C$ leur moment en C ; $\vec{\sigma}_C$ dépend essentiellement du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}$.

En toute rigueur, un drone aérien est toujours constitué de plusieurs corps. L'approximation corps rigide est néanmoins valable pour un drone à voilure fixe, les volets de contrôle étant de masse négligeable par rapport à la masse de l'ensemble. Un drone à voilure tournante peut également être assimilé à un corps rigide car les parties en rotation ne modifient pas la position du centre de masse ; il faut juste rajouter les équations de moments supplémentaires correspondant aux parties en rotation.

On considère ici que la Terre est plate, ne tourne pas, et constitue un repère galiléen ; on suppose de plus que la gravité est constante. Ces hypothèses sont tout à fait justifiées dans le cadre de l'estimation de l'état d'un mini-drone aérien, cf section (III-A).

Pour avoir un modèle complet, il faut rajouter à (1)-(2) les équations cinématiques reliant la position à la vitesse de translation $\vec{V_C}$, et l'orientation à la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$. L'orientation du "repère avion" lié au drone par rapport au "repère Terre" lié à la Terre peut être décrite soit par les angles d'Euler ϕ, θ, ψ (roulis, tangage, cap), soit par un quaternion. On utilisera la représentation par quaternion, qui est bien adaptée à la fois pour la conception et l'analyse théoriques d'un estimateur et pour l'implémentation sur un calculateur. Les quelques propriétés des quaternions strictement nécessaires sont rappelées section I-B.

Pour le problème d'estimation de la vitesse et de l'orientation, on aura uniquement besoin de la relation cinématique entre l'orientation et la vitesse de rotation, et de l'équation des forces (1), c'est-à-dire de

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega \tag{3}$$

$$\dot{V} = A + q * \frac{f}{m} * q^{-1}. \tag{4}$$

On a ici projeté (1) dans le repère Terre (alternativement, on aurait pu utilisé le système équivalent obtenu en projetant (1) dans le repère avion). On a utilisé les notations suivantes :

- q est le quaternion représentant l'orientation du corps par rapport au repère Terre
- ω est la projection de $\vec{\Omega}$ dans le repère avion
- V est la projection de $\vec{V_C}$ dans le repère Terre
- $A = (0, 0, g)^T$ est la projection de $\vec{g}$ dans le repère Terre (avec la convention North-East-Down)
- f est la projection de $\vec{F}$ dans le repère avion.

B. Quaternions

On peut voir un quaternion p comme le couple $p = (p_0, \vec{p})^T$ formé d'un scalaire $p_0 \in \mathbb{R}$ et d'un vecteur $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$. Le produit (non-commutatif) $*$ de deux quaternions s'écrit alors

$$p * q := \begin{pmatrix} p_0 q_0 - \vec{p} \cdot \vec{q} \\ p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q} \end{pmatrix}.$$

On étend le produit vectoriel aux quaternions par la formule $p \times q := \vec{p} \times \vec{q} = \frac{1}{2}(p * q - q * p)$. Tout scalaire $p_0 \in \mathbb{R}$ peut être vu comme le quaternion $(p_0, \vec{0})^T$, et tout vecteur $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ comme le quaternion $(0, \vec{p})^T$. Les quaternions de norme non-nulle forment un groupe dont 1 est l'élément neutre, et $(p * q)^{-1} = q^{-1} * p^{-1}$.

À tout quaternion q de norme 1 est associée une matrice de rotation $R_q \in SO(3)$ par $q^{-1} * \vec{p} * q = R_q \cdot \vec{p}$ pour tout $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$; q peut ainsi représenter l'orientation d'un corps rigide.

Si q dépend du temps, alors $\dot{q}^{-1} = -q^{-1} * \dot{q} * q^{-1}$. Si q vérifie l'équation différentielle $\dot{q} = q * u + v * q$ avec $u, v \in \mathbb{R}^3$, alors $\|q(t)\| = \|q(0)\|$ pour tout t.

Si q est un quaternion de norme 1 "proche" de 1, sa différentielle δq autour de 1 est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. En effet, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ implique $q_0 \delta q_0 + q_1 \delta q_1 + q_2 \delta q_2 + q_3 \delta q_3 = 0$, d'où $\delta q_0 = 0$.

C. Principaux capteurs utilisés dans les mini-drones aériens

On fait ici un bref survol des capteurs couramment utilisés dans les (mini)-drones aériens. Pour plus de détails, consulter par exemple [1], chap. 4 pour les capteurs inertiels et chap. 6-7 pour le GPS.

Un capteur fournit toujours une mesure imparfaite, entachée de bruit, biais, etc. On ne considère ici que des capteurs "parfaits" ; on verra sections (III-B)-(III-C) des exemples de modélisation d'imperfections ; on rappelle d'ailleurs qu'un des rôles d'un observateur est de filtrer les bruits de mesure.

1) Capteurs inertiels: Un gyroscope triaxial (c'est-à-dire trois gyroscopes 1 axe montés orthogonalement) idéal mesure ω, projection de la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère avion.

Un accéléromètre triaxial idéal accroché au point P mesure a, projection dans le repère avion de l'*accélération spécifique* $\vec{a} := \dot{\vec{V}}_P - \vec{g}$ du point P. Si l'accéléromètre est situé au centre de masse C (c'est souvent le cas en pratique), il mesure donc d'après (1) la projection de $\vec{a} = \dot{\vec{V}}_C - \vec{g} = \frac{1}{m}\vec{F}$, c'est-à-dire $\frac{f}{m}$. Si P est différent de C, la mesure est plus difficile à exploiter puisque $\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{CP} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{CP})$ et qu'il faut donc prendre en compte l'équation des moments. Si on ne s'intéresse pas à l'expression de f, on peut par contre toujours utiliser à la place de (3)-(4) les relations

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega \tag{5}$$

$$\dot{V} = A + q * a * q^{-1}, \tag{6}$$

où V désigne la projection dans le repère Terre de $\vec{V}_P$ (au lieu de $\vec{V}_C$) ; en effet (6) est simplement la projection de $\vec{a} := \dot{\vec{V}}_P - \vec{g}$, et (5) ne dépend pas du point du solide où est accroché le gyroscope.

On peut très grossièrement séparer les capteurs inertiels en deux catégories : ceux *de classe inertielle* qui, après une éventuelle procédure de calibration, sont très "précis" (ou plus exactement leurs caractéristiques sont très stables au cours du temps), et les autres ! Les capteurs de classe inertielle sont lourds et très chers, mais permettent de faire de la "véritable" navigation inertielle, cf III-A. Les capteurs MEMS utilisés dans les mini-drones aériens ne sont pas de classe inertielle.

2) Magnétomètres: Un magnétomètre triaxial mesure la projection du vecteur champ magnétique terrestre dans le repère avion, c'est-à-dire $q^{-1} * B * q$. B est fixe par rapport à la Terre, mais dépend de la latitude et (un peu) de l'altitude ; par exemple B vaut (à un facteur près) environ $(1, 0, 0)^T$ à l'équateur, et environ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$ à la latitude de Paris. Le champ magnétique Terrestre est faible, et facilement perturbé par les masses ferro-magnétiques locales et autres effets électro-magnétiques. En particulier, il peut être nécessaire de compenser les perturbations dues au drone lui-même. Les mesures en intérieur ou près de bâtiments sont à manipuler avec précaution.

Dans le contexte des mini-drones, le magnétomètre sera donc souvent un capteur d'appoint, dont on limitera l'usage à l'estimation du cap.

3) GPS: un "capteur" GPS reçoit en permanence les signaux émis par les satellites du système GPS et peut ainsi mesurer sa "pseudo-distance" par rapport aux satellites et le décalage de son horloge interne : ces informations "brutes" sont ensuite traitées pour en extraire les "solutions de navigation", c'est-à-dire la position et la vitesse V (exprimée dans le repère Terre), en général par un EKF. On notera que la vitesse fournie est toujours de bonne qualité, car elle utilise l'information de l'onde porteuse reçue (phase/décalage Doppler), information qui est utilisée pour la position seulement dans les modules "haut de gamme".

La gamme de prix est très large, même pour les modules embarquables dans un mini-drone : par exemple un module GPS "haut de gamme" avec toutes les options (Javad [1] TR-G2T, multi-bande, 55x40mm, 34g, update rate 100Hz) coûte environ 10 000USD. Mais quelque soit la qualité du module GPS, il doit par son principe même de fonctionnement voir en permanence au moins 4 satellites. Ce n'est pas forcément le cas en milieu urbain dense, ni a fortiori dans un bâtiment.

1. www.javad.com

4) Autres capteurs utilisés dans les mini-drones:

- capteurs de pression, afin d'avoir une estimation de l'altitude barométrique. La résolution est au mieux de quelques dizaines de centimètres et dépend à cette échelle fortement des conditions locales, ce qui en fait une mesure parfois difficile à exploiter dans un drone près du sol. La voilure tournante peut aussi perturber sérieusement la mesure de pression
- télémètres à ultrasons, afin d'avoir une estimation de l'altitude par rapport au sol. La portée est limitée à quelques mètres, avec une bande passante d'autant plus faible que la distance est grande (à cause du temps de propagation de l'onde ultra-sonore)
- systèmes de vision, qui permettent d'obtenir des informations de et d'orientation. Ce sont évidemment bien plus que de simples capteurs. C'est un domaine prometteur et qui n'en est sans doute qu'à ses débuts. La principale limitation des systèmes de vision est la bande passante, en général trop limitée (du fait de l'important traitement algorithmique nécessaire) pour qu'ils puissent être utilisés seuls.

5) Capteurs peu utilisés dans les mini-drones: les capteurs de vitesse couramment utilisés en avionique (sonde Pitot ou anémomètre ; radar Doppler) n'existent malheureusement pas à l'heure actuelle en version embarquable sur un mini-drone.

On n'utilise pas non plus d'inclinomètres, pour la bonne raison que ça n'existe pas ! Un capteur vendu sous le nom d'"inclinomètre" n'est en général qu'un accéléromètre (souvent bas de gamme), qui sous l'hypothèse d'une accélération nulle, fournit après filtrage les angles de roulis et tangage ; un AHRS (cf section III-B) peut être vu comme un inclinomètre sophistiqué.

6) Le rôle important des capteurs inertiels: en guise de conclusion, on insiste sur le fait que les capteurs inertiels MEMS sont et resteront probablement très utilisés dans les mini-drones : ils sont très légers et peu chers ; ils fournissent une information avec une bande passante largement suffisante pour l'asservissement d'un drone, disponible en toute circonstance, et non perturbée par l'environnement externe. Dans un système multi-capteurs, cf section III, ils fournissent une bonne information "court terme", tandis que les capteurs de "haut niveau" avec une bande passante plus faible (GPS, vision) fournissent une information de recalage "long terme".

II. Estimateurs, observateurs, observabilté, etc.

A. La notion d'observateur

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{7}$$

$$y = h(x, u), \tag{8}$$

où x, u, y sont dans un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$; plus généralement x peut être dans une variété (c'est-à-dire une surface généralisée), par exemple l'espace des quaternions. Les signaux y, u sont supposés connus jusqu'à l'instant courant t : la sortie y est mesurée par des capteurs, l'entrée u est mesurée et/ou connue en tant que signal de commande.

De manière très générale, un *estimateur* de (7)-(8) est un processus qui produit à tout instant t une estimation $\hat{x}(t)$ tendant vers $x(t)$ à partir des signaux connus $\big\{y(\tau), u(\tau); 0 \leq \tau \leq t\big\}$. Dans la suite on se restreindra à la notion un peu plus particulière d'*observateur*, à savoir un système dynamique

$$\dot{z} = \mathcal{F}(z, u, y) \tag{9}$$

$$\hat{x} = \mathcal{G}(z) \tag{10}$$

vérifiant les deux propriétés suivantes :

- si $y = h(\hat{x}, u)$ dans (9), alors $\big(\hat{x}(t), u(t)\big)$ est solution de (7), c'est-à-dire

$$\mathcal{G}'(z) \cdot \mathcal{F}\Big(z, u, h\big(\mathcal{G}(z), u\big)\Big) = f\big(\mathcal{G}(z), u\big) \quad \text{pour tous } z, u \tag{11}$$

– $\hat{x}(t) \to x(t)$ quand $t \to +\infty$.

La première condition dit que si l'estimation est exacte à un certain instant, alors elle l'est aussi à tous les instants suivants ; la deuxième dit que l'estimation se rapproche *asymptotiquement* de la vraie valeur.

On note qu'un observateur est un "filtre" non-linéaire : l'estimation fournie est le résultat d'une intégration, ce qui a pour effet bénéfique de "lisser" les bruits qui entachent inévitablement les signaux réels. Par ailleurs on se limite à des observateurs continus, mais on peut étendre ce qui est dit à des observateurs discrets (en pratique on ne peut implémenter sur un calculateur que des observateurs discrets : on peut soit concevoir un observateur directement en discret, soit discrétiser un observateur continu).

Sous des conditions très générale ($\mathcal{G}$ est de rang maximum n) on peut (localement) considérer que $z = (\hat{x}, P)$ et réécrire (9)-(10) sous la forme

$$\dot{\hat{x}} = F(\hat{x}, u, y, P) \tag{12}$$

$$\dot{P} = G(\hat{x}, u, y, P). \tag{13}$$

P apparait alors comme un vecteur de paramètres régi par la deuxième équation ; on dira que l'observateur est à gains constants quand P est constant, et que cette deuxième équation n'est donc pas présente. Par ailleurs la première condition permet d'écrire

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + g(\hat{x}, u, y, P)\\ \dot{P} &= G(\hat{x}, u, y, P),\end{aligned}$$

où $g\big(\hat{x}, u, h(\hat{x}, u), P\big) = 0$ pour tout $\hat{x}, u, P$. Un observateur apparait ainsi comme la recopie du système $\dot{x} = f(x, u)$ modifié par le terme "correctif" $g(\hat{x}, u, y, P)$ dépendant du paramètre P. C'est la forme qu'on considérera dans la suite.

On peut définir plusieurs types de convergence :

– convergence *globale* : $\hat{x}(t) \to x(t)$ pour toute condition initiale $(x_0, u_0, \hat{x}_0, P_0)$
– convergence *locale autour de toute trajectoire* : $\hat{x}(t) \to x(t)$ pour toute condition initiale $(x_0, u_0, \hat{x}_0 \approx x_0, P_0)$. On peut aussi restreindre P_0 à démarrer près d'une valeur raisonnable, par exemple telle que $G\big(\hat{x}_0, u_0, h(x_0, u_0), P_0\big) \approx 0$
– convergence *locale autour de tout point d'équilibre* : $\hat{x}(t) \to x(t)$ pour toute condition initiale $(x_0, u_0, \hat{x}_0, P_0) \approx (\bar{x}, \bar{u}, \bar{x}, \bar{P})$ où $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{P})$ vérifie $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ et $G\big(\bar{x}, \bar{u}, h(\bar{x}, \bar{u}), \bar{P}\big) = 0$
– convergence *locale autour d'un point d'équilibre* : soit $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{P})$ un triplet tel que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ et $G\big(\bar{x}, \bar{u}, h(\bar{x}, \bar{u}), \bar{P}\big) = 0$; $\hat{x}(t) \to x(t)$ pour toute condition initiale $(x_0, u_0, \hat{x}_0, P_0) \approx (\bar{x}, \bar{u}, \bar{x}, \bar{P})$.

Clairement, convergence globale $\Rightarrow$ convergence locale autour de toute trajectoire $\Rightarrow$ convergence locale autour de tout point d'équilibre $\Rightarrow$ convergence locale autour d'un point d'équilibre.

La convergence locale autour de toute trajectoire est une propriété souvent largement satisfaisante en pratique ; le fait que $\hat{x}_0 \approx x_0$ entraine $g\big(\hat{x}_0, u_0, h(x_0, u_0), P_0\big) \approx 0$, c'est-à-dire que la trajectoire de l'observateur démarre près de la trajectoire à estimer. La convergence locale autour de tout point d'équilibre ne garantit le fonctionnement de l'observateur que pour des trajectoires "molles", c'est-à-dire telles que $f(x, u) \approx 0$; les conditions vérifiées par $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{P})$ entrainent que $(\bar{x}, \bar{u})$ est un point d'équilibre de (7) et que $(\bar{x}, \bar{P}, \bar{u})$ est un point d'équilibre de (12)-(13). La convergence locale autour du point d'équilibre déterminé par $(\bar{x}, \bar{P}, \bar{u})$ entraine évidemment la convergence locale autour de tout point d'équilibre déterminé par $(\bar{x}', \bar{P}', \bar{u}') \approx (\bar{x}, \bar{P}, \bar{u})$.

Le problème de l'observateur est largement ouvert du point de vue mathématique : étant donné un système quelconque (7)-(8), on ne sait en général pas en construire un observateur qui convergerait globalement, ni même seulement localement autour de toute trajectoire. On sait par contre toujours construire un observateur qui converge localement autour de tout point d'équilibre (et donc a fortiori autour d'un point d'équilibre donné) : on se ramène en effet par approximation au premier ordre au cas

linéaire, pour lequel le problème est facilement résolu.

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{14}$$
$$y = Cx + Du, \tag{15}$$

pour lequel le problème est facilement résolu ; A, B, C, D sont des matrices constantes de taille respective $n \times n, n \times m, m \times n, m \times p$.

B. Observabilité

Pour qu'il soit possible de construire un observateur, il faut bien sûr que le système (7)-(8) vérifie certaines conditions. On dit que (7)-(8) est *observable* (localement autour d'un point générique) si on peut exprimer l'état x en fonction des signaux connus y, u et de leurs dérivées, c'est-à-dire si on a

$$x = \mathcal{M}(y, \dot{y}, \ddot{y} \cdots, u, \dot{u}, \ddot{u} \cdots).$$

Si le système n'est pas observable, on peut (localement) le réécrire par changement de coordonnées

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \tag{16}$$
$$\dot{x}_2 = f_1(x_2, u) \tag{17}$$
$$y = h(x_2, u), \tag{18}$$

où (17)-(18) est observable. La seule façon d'estimer la partie inobervable x_1 est alors –en supposant qu'un observateur de (17)-(18) fournit par ailleurs l'estimation $\hat{x}_2$– de recopier (16), soit $\dot{\hat{x}}_1 = f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u)$. Mais ceci ne marchera que si (16) est stable ; cf section (III-A) pour un exemple important de cette situation.

Pour le système linéaire (7)-(8), la condition d'observabilité s'écrit

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n,$$

et on dit souvent pour cette raison "(A, C) est observable" au lieu de "(7)-(8) est observable".

C. Le cas linéaire

Pour le système linéaire (14)-(15), on sait systématiquement construire (pour la partie observable) un observateur, à gains constants ou à gains "optimaux".

1) Observateur à gains constants: le système

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\big(y - (C\hat{x} + Du)\big), \tag{19}$$

où L est une matrice $n \times p$ à choisir, est un observateur (à gains constants) de (14)-(15). En effet, l'équation de l'erreur $e := \hat{x} - x$ est régie par

$$\dot{e} = A\hat{x} + Bu + L\big(y - (C\hat{x} + Du)\big) - (Ax + Bu) = (A - LC)e.$$

Un résultat classique affirme qu'on peut choisir L pour que $(A - LC)$ ait des valeurs propres arbitraires si et seulement si (A, C) est observable. En faisant en sorte que toutes les valeurs propres de $A - LC$ aient une partie réelle < 0, on aura donc $e(t) \to 0$ globalement, c'est-à-dire $\hat{x}(t) \to x(t)$ globalement.

En théorie, on peut faire en sorte que l'observateur converge arbitrairement vite. En pratique, la vitesse de convergence est limitée par le bruit des capteurs et la qualité de la prédiction fournie par un modèle forcement inexact. Un choix judicieux des valeurs propres de $A - LC$, et donc de L, résultera d'un compromis entre la confiance accordée au modèle (14) et celle accordée à la mesure (15).

2) Filtre de Kalman: une façon de régler le compromis modèle/mesure est de faire apparaitre explicitement des “bruit” μ et ν de tailles q et p, entrant dans le système (14)-(15) via des matrices de pondération M de taille $n \times q$ et N inversible de taille $p \times p$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + M\mu \\ y &= Cx + Du + N\nu. \end{aligned}$$

Dans une approche stochastique, μ, ν sont des “vrais” bruits (blancs gaussiens indépendants), et MM^T est la covariance du bruit d'état et NN^T celle du bruit de mesure ; dans une approche équivalente mais purement déterministe, μ, ν sont des signaux fictifs et MM^T représente quantitativement la confiance (ou plutôt l'inverse de la confiance) qu'on a dans le modèle et NN^T celle qu'on a dans la mesure. On peut donc voir M, N comme de simples paramètres de réglage ; en particulier μ, ν n'ont pas nécessairement besoin de représenter la “réalité physique" des bruits des capteurs. Quelle que soit l'interprétation adoptée,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + \big(PC^T(NN^T)^{-1}\big)\big(y - (C\hat{x} + Du)\big) \\ \dot{P} &= AP + PA^T + MM^T - PC^T(NN^T)^{-1}CP \end{aligned}$$

est un observateur de (14)-(15), souvent appelé *filtre de Kalman* ; P est par construction une matrice $n \times n$ symétrique définie positive. Il a la même structure que l'observateur à gains constants (19), mais avec une matrice variable $L := PC^T(NN^T)^{-1}$. L'équation de l'erreur $e := \hat{x} - x$ est de la forme

$$\dot{e} = (A - LC)e \tag{20}$$

$$\dot{P} = G(P); \tag{21}$$

on montre que si (A, C) et (A^T, M^T) sont observables, P converge vers une matrice constante $\bar{P}$ telle que $\bar{L} := \bar{P}C^T(NN^T)^{-1}$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle< 0, ce qui entraine que e tend vers 0.

L'intérêt majeur du filtre de Kalman réside dans l'extension qui en sera faite en non-linéaire, cf section II-D2 ; en linéaire il n'apporte pas grand-chose, et on peut se contenter d'utiliser la valeur asymptotique $\bar{L}$ dans un observateur à gains constants.

D. Le cas non-linéaire

Le cas linéaire est très particulier dans la mesure où les équations d'erreur (20)-(21) ne dépendent pas de la trajectoire suivie. La situation est tout à fait différente en non-linéaire : en général les équation d'erreur dépendent également de la trajectoire suivie par l'observateur (ou le système),

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \eta(\hat{x}, u, P) \\ \dot{P} &= G\big(\hat{x}, u, h(\hat{x} - e, u)\big) \\ \dot{\hat{x}} &= F\big(\hat{x}, u, h(\hat{x} - e, u)\big) \end{aligned} \qquad \text{ou, ce qui revient même,} \qquad \begin{aligned} \dot{e} &= \eta(x + e, u, P) \\ \dot{P} &= G\big(x + e, u, h(x, u)\big) \\ \dot{x} &= f(x, u). \end{aligned}$$

Même si on linéarise ces équations autour de $e \approx 0$, on a des matrices qui dépendent de la trajectoire suivie. Ceci explique pourquoi il est difficile d'obtenir mieux que la convergence locale autour de tout point d'équilibre (car alors les matrices issues de la linéarisation sont constantes).

1) Observateur à gains "schedulés”: en s'inspirant de l'observateur linéaire, considérons le système

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + L(\hat{x}, u, y) \cdot \big(y - h(\hat{x}, u)\big) \tag{22}$$

L'erreur $e := \hat{x} - x$ est régie par

$$\begin{aligned} \dot{e} &= f(\hat{x}, u) + L\big(\hat{x}, u, h(\hat{x} - e, u)\big) \cdot \big(h(\hat{x} - e, u) - h(\hat{x}, u)\big) - f(\hat{x} - e, u) \\ &\approx f(\hat{x}, u) + L\big(\hat{x}, u, h(\hat{x}, u) - \partial_1 h(\hat{x}, u)e\big) \cdot \big(h(\hat{x}, u) - \partial_1 h(\hat{x}, u)e - h(\hat{x}, u)\big) - \big(f(\hat{x}, u) - \partial_1 f(\hat{x}, u)e\big) \\ &\approx \Big(\partial_1 f(\hat{x}, u) - L\big(\hat{x}, u, h(\hat{x}, u)\big) \cdot \partial_1 h(\hat{x}, u)\Big) \cdot e, \end{aligned} \tag{23}$$

où on a négligé tous les termes d'ordre supérieur en e. Si de plus $(\hat{x}, u)$ (et donc (x, u)) est proche d'un point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$, on peut choisir L de sorte que $\partial_1 f(\hat{x}, u) - L\big(\hat{x}, u, h(\hat{x}, u)\big) \cdot \partial_1 h(\hat{x}, u) \approx \partial_1 f(\bar{x}, u) - L\big(\bar{x}, u, h(\bar{x}, u)\big) \cdot \partial_1 h(\bar{x}, u)$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle < 0. L'observateur (22) convergera ainsi autour de tout point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$, et par extension autour de toute trajectoire "quasi-statique" parcourant "lentement" une famille de points d'équilibre.

Ce réglage, ou "scheduling", de L peut être assez compliqué, et on se contente parfois d'une matrice L constante réglée pour un point d'équilibre particulier (et donc pour tous les points d'équilibre voisins).

2) Filtre de Kalman étendu (Extended Kalman Filter, EKF): une façon de régler "automatiquement" la matrice L est d'écrire, par analogie avec le filtre de Kalman de la section II-C2,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, u) + \big(PC^T(NN^T)^{-1}\big) \cdot \big(y - h(\hat{x}, u)\big)\\ \dot{P} &= AP + PA^T + MM^T - PC^T(NN^T)^{-1}CP,\end{aligned}$$

où on a posé $A := \partial_1 f(\hat{x}, u)$ et $C := \partial_1 h(\hat{x}, u)$. Attention : *formellement* les équations d'erreur ont alors la même forme que (20)-(21), mais A et C ne sont pas constantes ; les conditions de convergence de la section II-C2 ne s'appliquent donc que si $(\hat{x}, u)$ est proche d'un point d'équilibre, et par extension d'une trajectoire "quasi-statique" parcourant "lentement" une famille de points d'équilibre.

Ce "filtre de Kalman étendu" (en anglais, EKF) est très souvent utilisé en pratique. Il est parfois considéré (surtout dans sa version discrète) comme un sorte de méthode "magique" produisant à coup sur une estimation "optimale". Il ne faut pas oublier que ce n'est qu'un observateur particulier, avec un domaine de convergence a priori limité. C'est néanmoins un algorithme en général plutôt efficace ; il a néanmoins le défaut d'être assez gourmand du point de vue calculatoire, car de dimension $n + n \times n$; son implémentation numérique peut-être de plus assez délicate, en particulier pour assurer que P reste bien symétrique définie positive malgré les erreurs numériques (il y a une abondante littérature sur le sujet).

3) Observateurs non-linéaires: pour obtenir de meilleures garanties de performance qu'avec un observateur à gains schedulés ou un EKF, plusieurs approches ont été proposées pour construire directement des observateurs non-linéaires dans certains cas particuliers. On mentionne ici uniquement l'approche géométrique proposée dans [3] : au lieu d'utiliser comme dans (22) des erreurs "linéaires" de sortie $y - h(\hat{x}, u)$ et d'état $\hat{x} - x$, l'idée est d'utiliser l'invariance du système vis-à-vis de certaines transformations géométriques (rotations, translations, etc.) pour construire un observateur (lui aussi invariant) de la forme

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + W(\hat{x})L(I, E)E$$

et une erreur (invariante) d'état $e := \eta(\hat{x}, x)$ de dimension n ; $E(\hat{x}, u, y)$ est une erreur (invariante) de sortie de dimension p, $I(\hat{x}, u, y)$ un ensemble de grandeur invariantes et W une matrice $n \times n$. E, e, I, W sont construits de manière systématique en utilisant des propriétés d'invariance. Le résultat principal est que si on sait trouver un groupe de transformations de dimension n, alors l'équation d'erreur

$$\dot{e} = \gamma(e, I),$$

c'est-à-dire ne dépend pas de la trajectoire suivie, mais seulement des grandeurs (connues) I, qu'on peut voir comme des entrées. Ceci permet alors facilement de choisir la matrice de gains L pour avoir une convergence meilleure que localement autour de tout point d'équilibre.

Cette approche, bien que très particulière, est bien adaptée au problèmes d'estimation vitesse/orientation, comme illustré sur deux exemples sections III-B et III-C.

III. Observateurs vitesse/orientation pour les drones aériens

On étudie dans cette section ce qu'on peut faire en termes d'observateurs vitesse/orientation pour un (mini)-drone aérien dans la situation très courante où on dispose de capteurs inertiels (gyroscope et accéléromètre triaxiaux), éventuellement aidés par un magnétomètre triaxial et un module GPS fournissant le vecteur vitesse V dans le repère Terre.

On peut distinguer essentiellement deux approches, chacune avec ses avantages et inconvénients :

– les estimateurs “génériques”, qui reposent sur (5)-(6) ; ils n’ont pas besoin d’un modèle de la résultante f des forces agissant sur le drone, considérée connue grâce à l’accéléromètre
– les estimateurs “spécifiques”, qui reposent sur (3)-(4) ; ils nécessitent un modèle explicite de f.

L’intérêt d’un estimateur générique est de pouvoir s’appliquer à tout drone aérien sans adaptation ; néanmoins on va voir que, dans le contexte des drones, on ne peut avoir une estimation totalement satisfaisante que si on dispose d’une mesure de la vitesse. Un estimateur spécifique peut fonctionner sans mesure de vitesse, mais demande une connaissance plus approfondie de l’aérodynamique de l’engin auquel il est destiné. On insistera ici principalement sur l’approche générique, avec seulement une courte discussion sur l’approche spécifique dans la section III-D. Les deux observateurs présentés en détail sont volontairement basés sur l’approche invariante de la section II-D3, afin d’en illustre l’intérêt ; de bons résultats peuvent également être obtenus avec un EKF. Pour plus de détails voir [1, chap.5] pour la section III-A ; [4], [5], [6] pour la section III-B ; [7] pour la section III-B ; [8] pour la section III-D.

A. Navigation inertielle “véritable”

Peut-on faire un estimateur générique vitesse/l’orientation en utilisant uniquement des capteurs inertiels ? La réponse à cette question fondamentale n’est pas si simple... Elle est clairement négative si on se base sur le modèle (5)-(6). En effet ce système est complètement inobservable (il n’y a pas de sortie, les mesures ω et a intervenant uniquement comme des entrées). Le seul observateur possible est donc, cf section II-B, une recopie de (5)-(6), c’est-à-dire

$$\begin{aligned}\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}\hat{q} * \omega \\ \dot{\hat{V}} &= A + \hat{q} * a * \hat{q}^{-1}.\end{aligned}$$

Malheureusement, cet observateur diverge. On le voit facilement en linéarisant le modèle (5)-(6) et son observateur autour du point d’équilibre $(\bar{q}, \bar{V}, \bar{\omega}, \bar{a}) := (1, 0, 0, -A)$ (c’est le point où le système est immobile, mais la conclusion est la même en tout autre point), soit

$$\begin{aligned}\delta\dot{q} &= \frac{1}{2}(\bar{q} * \delta\omega + \delta q * \bar{w}) = \frac{1}{2}\delta\omega \\ \delta\dot{V} &= \delta q * \bar{a} * \bar{q}^{-1} + \bar{q} * \bar{a} * (-\bar{q}^{-1} * \delta q * \bar{q}^{-1}) + \bar{q} * \delta a * \bar{q}^{-1} = 2A \times \delta q + \delta a\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}\delta\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}\delta\omega \\ \delta\dot{\hat{V}} &= 2A \times \delta\hat{q} + \delta a.\end{aligned}$$

L’erreur $(\delta\eta, \delta\nu) := (\delta\hat{q} - \delta q, \delta\hat{V} - \delta V)$ est donc régie par

$$\begin{aligned}\delta\dot{\eta} &= 0 \\ \delta\dot{\nu} &= 2A \times \delta\eta;\end{aligned}$$

on voit que les erreurs de vitesse horizontales diverge linéairement en temps et que l’erreur de vitesse verticale reste constante ; la situation est encore pire si on prend en compte les (inévitables) biais non-compensées des capteurs : divergence horizontale parabolique, et divergence verticale linéaire.

La conclusion est totalement différente si on écrit les équations du mouvement en prenant en compte que la Terre est ronde (en pratique on considère même qu’elle est plutôt ellipsoïdale, pour gagner un peu de précision) : l’observateur obtenu en recopiant les équations produit une estimation des vitesses horizontales qui ne diverge pas, même si les capteurs sont biaisés, mais plutôt oscille avec une période d’environ 85 minutes ; c’est ce qu’on appelle l’*effet Schuler*. Il faut par ailleurs également prendre en compte le fait que la gravité diminue avec l’altitude, ce qui a pour effet de faire diverger exponentiellement la vitesse verticale avec une constante de temps d’environ 14 minutes ; un recalage par un capteur d’altitude (en pratique capteur de pression) est donc indispensable pour que l’observateur fonctionne.

Il est donc possible d'estimer la vitesse et l'orientation en utilisant uniquement des capteurs inertiels (plus un capteur d'attitude) : c'est ce que font les "véritables" systèmes de navigation inertielle. Néanmoins on ne bénéficie de l'effet Schuler que si on utilise des capteurs qui assurent une erreur petite sur un temps de l'ordre de 85/4 minutes ; de tels capteurs doivent avoir des caractéristiques très stables de manière à ce que l'effet de leurs imperfections, compensées après une procédure de calibration, reste petit sur cette durée. Les capteurs MEMS utilisés dans les mini-drones sont loin d'avoir ces performances. C'est la raison pour laquelle l'hypothèse "Terre plate" de la section I-A est suffisante. Quant à l'hypothèse "gravité constante", elle est suffisante car il faut de toute façon recaler la divergence verticale linéaire par un capteur supplémentaire ; le fait que cette divergence soit en fait exponentielle de constante de temps 14 minutes est quantitativement négligeable, ramené à l'échelle de temps (de l'ordre de quelques secondes) des phénomènes importants pour la stabilisation du drone.

B. La navigation inertielle du pauvre : AHRS (Attitude Heading Reference Systems)

Si on dispose, comme dans le cas des mini-drones, seulement de capteurs MEMS "faible précision", il faut renoncer à estimer la vitesse. Mais si on peut supposer que l'accélération linéaire $\dot{V}$ est petite, l'accéléromètre mesure d'après (6) $a = q^{-1} * (\dot{V} - A) * q \approx -q^{-1} * A * q$, c'est-à-dire fournit une indication sur les angles de roulis et tangage. Pour connaitre le cap il est par contre indispensable d'utiliser le magnétomètre, l'accéléromètre n'en donnant aucune information. Le problème considéré se ramène ainsi à estimer l'orientation q sur la base du modèle

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q * \omega, \tag{24}$$

où on mesure l'entrée ω et la sortie

$$\begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q^{-1} * A * q \\ q^{-1} * B * q \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Si les capteurs étaient parfaits (c'est-à-dire ni bruités ni biaisés), déterminer q serait très simple : en effet on connait par (25) l'action de la matrice de rotation associée à q sur les deux vecteurs non-colinéaires A et B ; ceci détermine complètement la matrice (et donc q), sans même qu'il y ait besoin d'utiliser (24) ni la mesure ω. Le rôle de l'observateur sera donc d'estimer (une partie de) ces biais, et surtout de filtrer le bruit de l'accéléromètre.

Un dispositif estimant l'orientation à partir de capteurs inertiels "faible précision" et d'un magnétomètre est souvent désigné en aéronautique par l'acronyme AHRS (Attitude and Heading Reference System) ; l'*attitude* signifie ici les angles de roulis et tangage. L'hypothèse sous-jacente $\dot{V} \approx 0$, qui peut au premier regard sembler raisonnable, peut néanmoins être problématique en cas d'utilisation de l'estimation dans un contrôleur en boucle fermée, voir section III-D.

1) Modèle avec capteurs imparfaits: tout d'abord il est souhaitable d'utiliser les mesures magnétiques, facilement perturbées, seulement pour le cap ; une perturbation magnétique affectera ainsi seulement le cap et pas l'attitude. Un ingrédient pour y parvenir est d'utiliser $y_C := y_A \times y_B = q^{-1} * C * q$, où $C := A \times B$, au lieu de la mesure directe y_B. Noter que $\langle y_A, y_C \rangle = \langle A, C \rangle = 0$, si bien qu'il ne reste plus que $8 = 3 + 3 + 3 - 1$ mesures indépendantes au lieu de 9. On verra que ceci n'est pas un inconvénient, bien au contraire, puisque les mesures utilisées, et donc l'observateur, ne dépendent pas de la composante verticale du champ magnétique B, qui varie avec la latitude géographique.

Les capteurs sont évidemment imparfaits, en particulier ils sont habituellement biaisés. Ces biais sont à peu près constants, mais peuvent varier lentement, en particulier avec la température. Idéalement, on souhaiterait les estimer en ligne en même temps que l'orientation. Une analyse d'observabilité montre que c'est faisable pour les 3 biais de gyroscope, mais pas pour les 3 biais d'accéléromètre ; en fait il n'est possible d'estimer qu'une seule imperfection scalaire d'accéléromètre sans dépendre des mesures magnétiques. Les éventuelles perturbations du champ magnétique B constituent en effet un autre souci.

Une analyse d'observabilité montre qu'il n'est malheureusement pas possible d'estimer les 2 composantes horizontales du champ magnétique terrestre, ce qui aurait permis de s'affranchir des perturbations magnétiques. De plus il n'est possible d'estimer qu'une seule imperfection scalaire d'accéléromètre

Au final, on modélise les capteurs comme suit : le gyroscope mesure $\omega_m = \omega + \omega_b$, où ω_b est un biais vectoriel constant ; l'accéléromètre mesure $a_m = a_s a$, où $a_s > 0$ est un facteur d'échelle constant ; le magnétomètre mesure $y_B = b_s q^{-1} * B * q$, où $b_s > 0$ est un facteur d'échelle constant, ce qui implique $y_C := c_s q^{-1} * C * q$, avec $c_s := a_s b_s > 0$. On arrive ainsi au modèle complet

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \frac{1}{2} q * (\omega_m - \omega_b)\\ \dot{\omega}_b &= 0\\ \dot{a}_s &= 0\\ \dot{c}_s &= 0,\end{aligned}$$

où on mesure l'entrée ω et la sortie

$$\begin{pmatrix} y_A \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_s q^{-1} * A * q \\ c_s q^{-1} * C * q \end{pmatrix}.$$

On montre facilement que ce système est observable.

2) Un observateur non-linéaire (invariant): en utilisant le fait que le système est invariant par un groupe de symétries de dimension $3+3+1+1 = 8$ (rotation, translation sur biais du gyroscope, scaling sur accéléromètre et magnétomètre), on obtient un observateur de la forme

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) + (LE) * \hat{q} \tag{26}$$

$$\dot{\hat{\omega}}_b = \hat{q}^{-1} * (ME) * \hat{q} \tag{27}$$

$$\dot{\hat{a}}_s = \hat{a}_s NE \tag{28}$$

$$\dot{\hat{c}}_s = \hat{c}_s OE. \tag{29}$$

L'erreur de sortie (invariante) E est le vecteur 5×1 $E := \Big(\langle E_A, e_1\rangle, \langle E_A, e_2\rangle, \langle E_A, e_3\rangle, \langle E_C, e_1\rangle, \langle E_C, e_2\rangle\Big)^T$, c'est-à-dire cinq des six coordonnées dans le repère Terre de

$$\begin{aligned}E_A &:= A - \frac{1}{\hat{a}_s}\hat{q} * y_A * \hat{q}^{-1}\\ E_C &:= C - \frac{1}{\hat{c}_s}\hat{q} * y_C * \hat{q}^{-1}.\end{aligned}$$

La sixième coordonnée est inutile, car dépendante des cinq autres ; en effet $\langle A, C\rangle = \langle y_A, y_C\rangle = 0$ entraine $\langle E_A, E_C\rangle = \langle A, E_C\rangle + \langle E_A, C\rangle$. L, M sont des matrices 3×5 et N, O des matrices 1×5 dont les coefficients peuvent dépendre de E et de la grandeur invariante $I := \hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) * \hat{q}^{-1}$.

Cet observateur a par construction une "bonne" structure géométrique : d'une part $\|\hat{q}(t)\| = \|\hat{q}(0)\| = 1$, puisque LE est un vecteur $\mathbb{R}^3$, cf section I-B ; d'autre part $\hat{a}_s(t), \hat{c}_s(t) > 0$ dès que $\hat{a}_s(0), \hat{c}_s(0) > 0$.

L'erreur (invariante) d'état

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} \\ q * (\hat{\omega}_b - \omega_b) * q^{-1} \\ \frac{a_s}{\hat{a}_s} \\ \frac{c_s}{\hat{c}_s} \end{pmatrix}.$$

est régie par

$$\dot{\eta} = \dot{\hat{q}} * q^{-1} - \hat{q} * (q^{-1} * \dot{q} * q^{-1}) \qquad = (LE) * \eta - \frac{1}{2}\eta * \beta \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \dot{q} * (\hat{\omega}_b - \omega_b) * q^{-1} - q * (\hat{\omega}_b - \omega_b) * q^{-1} * \dot{q} * q^{-1} \\ &\quad + q * (\dot{\hat{\omega}}_b - \dot{\omega}_b) * q^{-1} \qquad = (\eta^{-1} * I * \eta) \times \beta + \eta^{-1} * (ME) * \eta \end{aligned} \tag{31}$$

$$\dot{\alpha} = -\frac{a_s \dot{\hat{a}}_s}{\hat{a}_s^2} \qquad = -\alpha NE \tag{32}$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{c_s \dot{\hat{c}}_s}{\hat{c}_s^2} \qquad = -\gamma OE. \tag{33}$$

Comme E est formé de composantes de

$$\begin{aligned} E_A &= A - \frac{a_s}{\hat{a}_s}\hat{q} * (q^{-1} * A * q) * \hat{q}^{-1} = A - \alpha\eta * A * \eta^{-1} \\ E_C &= C - \gamma\eta * C * \eta^{-1}, \end{aligned}$$

ces équations d'erreur ne dépendent que de $(\eta, \beta, \alpha, \gamma)$ et de la grandeur (invariante) connue $I := \hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) * q^{-1}$, mais pas de la trajectoire du système à observer. Cette propriété simplifie beaucoup l'étude de la convergence et le réglage de l'observateur.

Les équations d'erreur linéarisées autour du point d'équilibre sans erreur $(\overline{\eta}, \overline{\beta}, \overline{\alpha}, \overline{\gamma}) := (1, 0, 1, 1)$ sont

$$\delta\dot{\eta} = L\delta E - \frac{1}{2}\delta\beta \tag{34}$$

$$\delta\dot{\beta} = I \times \delta\beta + M\delta E \tag{35}$$

$$\delta\dot{\alpha} = -N\delta E \tag{36}$$

$$\delta\dot{\gamma} = -O\delta E, \tag{37}$$

où δE est le vecteur 5×1

$$\Big(\langle \delta E_A, e_1\rangle, \langle \delta E_A, e_2\rangle, \langle \delta E_A, e_3\rangle, \langle \delta E_C, e_1\rangle, \langle \delta E_C, e_2\rangle\Big)^T = g\big(-2\delta\eta_2, 2\delta\eta_1, -\delta\alpha, 2B_1\delta\eta_3, B_1\delta\gamma\big)^T$$

formé à partir de

$$\begin{aligned} \delta E_A &= A * \delta\eta - \delta\eta * A - \delta\alpha A = 2A \times \delta\eta - \delta\alpha A \\ \delta E_C &= 2C \times \delta\eta - \delta\gamma C. \end{aligned}$$

À noter que pour l'implémentation pratique, on complète (26) en

$$\dot{\hat{q}} = \frac{1}{2}\hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) + (LE) * \hat{q} + k(1 - \|\hat{q}\|^2)\hat{q}. \tag{38}$$

Le terme (invariant) $k(1 - \|\hat{q}\|^2)\hat{q}$ est une astuce numérique classique pour garantir $\|\hat{q}\| = 1$ malgré les erreurs numériques. Il apparait alors dans l'équation d'erreur (30) le terme supplémentaire d'ordre supérieur $k(1 - \|\eta\|^2)\eta$, qui ne modifie donc pas le réglage du linéarisé.

En choisissant

$$L := \frac{1}{2g}\begin{pmatrix} 0 & -l_1 & 0 & 0 & 0 \\ l_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{B_1}l_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad M := \frac{1}{2g}\begin{pmatrix} 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ -m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{B_1}m_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N := \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -n & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O := \frac{1}{B_1 g}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -o \end{pmatrix},$$

les équations d'erreur linéarisées (34)–(37) deviennent

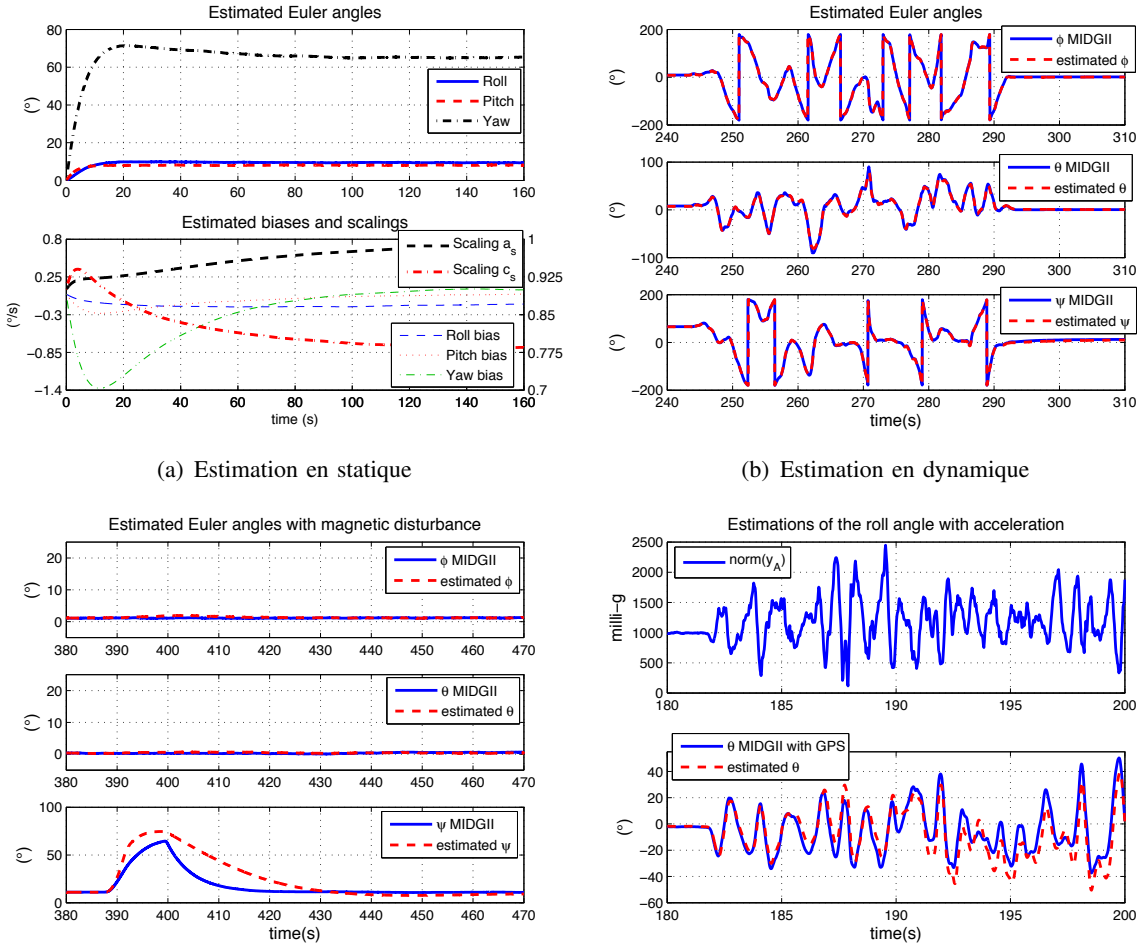
$$\delta\dot{\eta} = \begin{pmatrix} -l_1 & 0 & 0 \\ 0 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & -l_3 \end{pmatrix} \delta\eta - \frac{1}{2}\delta\beta \tag{39}$$

$$\delta\dot{\beta} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \delta\eta + I \times \delta\beta \tag{40}$$

$$\delta\dot{\alpha} = -n\delta\alpha \tag{41}$$

$$\delta\dot{\gamma} = -o\delta\gamma. \tag{42}$$

On peut alors facilement prouver que $(\delta\eta, \delta\beta, \delta\alpha, \delta\gamma) \to (0, 0, 0, 0)$ pour tous $l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n, o > 0$. C'est évident pour $\delta\alpha, \delta\gamma$, puisque (41) et (42) sont complètement découplées de (39)-(40) ; pour les autre variables, on utilise la fonction de Lyapounov $\frac{l_1}{2}\delta\eta_1^2 + \frac{l_2}{2}\delta\eta_2^2 + \frac{l_3}{2}\delta\eta_3^2 + \frac{1}{4}\|\delta\beta\|^2$. Par ailleurs on note que pour $I = 0$ les équations (39)-(40) se décomposent en trois sous-systèmes indépendants (longitudinal, latéral et cap), offrant ainsi une interprétation physique simple des paramètres de réglage ; quand $I \neq 0$, ces trois sous-systèmes sont légèrement couplés par les erreurs de biais $\delta\beta$.



(a) Estimation en statique

(b) Estimation en dynamique

(c) Effet d'une perturbation magnétique

(d) Estimation incorrecte quand $\dot{V} \neq 0$

FIGURE 1. Résultats expérimentaux

Avec le choix très simple proposé pour L, M, N, O on obtient donc sans problème la convergence locale

autour de toute trajectoire. On peut encore étendre le domaine de convergence par un réglage un peu plus sophistiqué, mais qui a les mêmes propriétés au premier ordre, cf [4], [5] ; voir aussi [6] pour une preuve de convergence quasi-globale, dans le cas où il n'y a pas de facteur multiplicatif sur les sorties.

3) Résultats expérimentaux: un des grands intérêts de l'observateur proposé est sa "légèreté" calculatoire (par rapport à un EKF). Pour le démontrer concrètement, on a fait une implémentation sur un micro-contrôleur 8-bit coûtant quelques euros et disposant donc de ressources très limitées : Atmel ATmega128, RAM 4ko, horloge 16MHz, et évidemment pas d'unité de calcul flottant ; de plus le micro-contrôleur doit aussi gérer l'interfaçage des capteurs (et des communications), ce qui utilise environ 25% de ses ressources de calcul. L'algorithme d'intégration utilisé est un simple schéma d'Euler explicite tournant à 50Hz. En fait l'observateur est si simple qu'il est possible de faire tous les calculs en C avec l'émulation virgule flottante du compilateur (évitant ainsi une implémentation en assembleur et/ou en virgule-fixe). Il est même possible d'augmenter la fréquence des calculs jusqu'à 75Hz.

Les résultats fournis par l'observateur ont été comparés avec le produit commercial MIDG2 [2], utilisé en mode "Vertical Gyro" (ce qui correspond à un AHRS, vraisemblablement basé sur un genre d'EKF). Les paramètres de l'observateur ont été (très facilement) réglés pour avoir une convergence "lente" des biais (de l'ordre de la minute) et une convergence "rapide" de l'orientation (de l'ordre de quelques secondes), ce qui correspond à peu près à ce que fait la MIDG2. Pour une interprétation plus aisée, les courbes présentent les angles d'Euler calculés à partir des quaternions estimés par l'observateur et la MIDG2.

On illustre le comportement de l'observateur sur une longue expérience ($500s$) comprenant trois parties :

- pour $t < 240s$, le système est immobile : comme prévu, les angles convergent rapidement vers une valeur qui évolue ensuite lentement jusqu'à ce que les biais aient convergé, Fig.1(a)
- pour $240s < t < 293s$ le système a été agité dans tous les sens. L'observateur et la MDG II donnent des résultats très proches, Fig.1(b)
- pour $t > 293s$ le système est de nouveau immobile, et un aimant est approché des capteurs pendant environ $10s$. Comme désiré, seul l'angle de cap ψ est affecté par cette perturbation magnétique, Fig.1(c) ; on remarque que la MIDG II réagit de manière similaire.

Finalement, la Fig.1(d) illustre que l'observateur ne converge évidemment pas vers les bonnes valeurs si l'hypothèse $\dot{V} = 0$ n'est pas vérifiée (seul l'angle de roulis ϕ est affiché) ; la comparaison est faite avec la MIDG II en mode INS (dans ce mode, les capteurs inertiels et magnétiques sont "aidés" par les informations issues d'un module GPS, et les estimations des angles et vitesses produisent les "vraies" valeurs, cf section suivante sur les AHRS "aidés").

C. AHRS "aidé" par un capteur de vitesse

1) Mise en forme du problème: On utilise maintenant quatre capteurs triaxiaux fournissant douze mesures scalaires : un gyroscope mesure $\omega_m = \omega + \omega_b$, où ω_b est un biais vectoriel constant ; un accéléromètre mesure $a_m = a_s a$, où $a_s > 0$ est un facteur multiplicatif constant ; un magnétomètre mesure $y_B = q^{-1} * B * q$, où $B = (B_1\ 0\ B_3)^T$ est le champ magnétique terrestre dans le repère Terre NED ; un module GPS fournit le vecteur vitesse V. On a ici directement mentionné les imperfections des capteurs, en suivant la même démarche qu'à la section III-B1 ; on aurait pu ici aussi considérer un facteur multiplicatif constant sur y_B. On aboutit ainsi au modèle

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{1}{2} q * (\omega_m - \omega_b) \\
\dot{V} &= A + \frac{1}{a_s} q * a_m * q^{-1} \\
\dot{\omega}_b &= 0 \\
\dot{a}_s &= 0,
\end{aligned}$$

2. www.microboticsinc.com

où on mesure l'entrée (ω_m, a_m) et la sortie

$$\begin{pmatrix} y_V \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ q^{-1} * B * q \end{pmatrix}.$$

On montre facilement que ce système est observable.

2) Un observateur non-linéaire (invariant): en utilisant le fait que le système est invariant par un groupe de dimension $3+3+3+1=10$, on obtient un observateur de la forme

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{q}} &= \frac{1}{2}\hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) + (L_V E_V + L_B E_B) * \hat{q} \\
\dot{\hat{V}} &= \frac{1}{\hat{a}_s}\hat{q} * a_m * \hat{q}^{-1} + A + (M_V E_V + M_B E_B) \\
\dot{\hat{\omega}}_b &= \hat{q}^{-1} * (N_V E_V + N_B E_B) * \hat{q} \\
\dot{\hat{a}}_s &= \hat{a}_s (O_V E_V + O_B E_B).
\end{aligned}$$

Cet observateur a par construction une "bonne" structure géométrique : d'une part $\|\hat{q}(t)\| = \|\hat{q}(0)\| = 1$, puisque $L_V E_V + L_B E_B$ est un vecteur $\mathbb{R}^3$, cf section I-B ; d'autre part $\hat{a}_s(t) > 0$ dès que $\hat{a}_s(0) > 0$. L'astuce numérique (38) sera ici aussi utilisée, avec les mêmes bénéfices.

L'erreur d'état (invariante)

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \nu \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q} * q^{-1} \\ \hat{V} - V \\ q * (\hat{\omega}_b - \omega_b) * q^{-1} \\ \frac{\hat{a}_s}{a_s} \end{pmatrix}.$$

est régie par

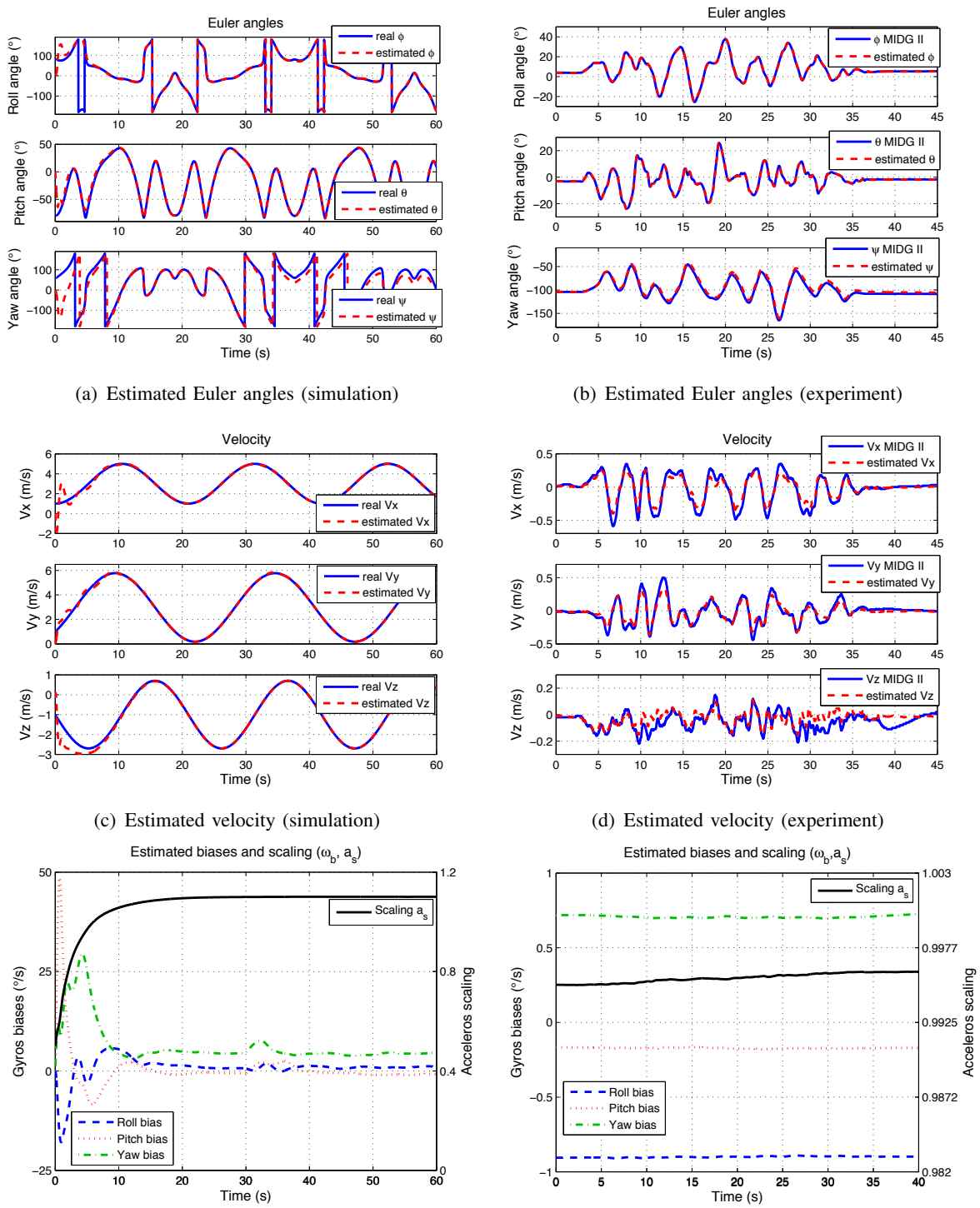
$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \dot{\hat{q}} * q^{-1} + \hat{q} * (-q^{-1} * \dot{q} * q^{-1}) && = -\frac{1}{2}\eta * \beta + (L_A E_A + L_C E_C) * \eta \\
\dot{\nu} &= \dot{\hat{V}} - \dot{V} && = I_a - \alpha\eta^{-1} * I_a * \eta + (M_V E_V + M_B E_B) \\
\dot{\beta} &= q * (\dot{\hat{\omega}}_b - \dot{\omega}_b) * q^{-1} + \dot{q} * (\hat{\omega}_b - \omega_b) * q^{-1} \\
&\quad - q * (\hat{\omega}_b - \omega_b) * q^{-1} * \dot{q} * q^{-1} && = (\eta^{-1} * I_\omega * \eta) \times \beta + \eta^{-1} * (N_V E_V + N_B E_B) * \eta \\
\dot{\alpha} &= \frac{\dot{\hat{a}}_s}{a_s} && = \alpha(O_V E_V + O_B E_B).
\end{aligned}$$

Comme $E_V = \nu$ et $E_B = B - \eta * B * \eta^{-1}$, ces équations d'erreur ne dépendent que de $(\eta, \nu, \beta, \alpha)$ et des grandeurs (invariantes) connues $I_\omega := \hat{q} * (\omega_m - \hat{\omega}_b) * q^{-1}$ et $I_a := \frac{1}{\hat{a}_s}\hat{q} * a_m * q^{-1}$, mais pas de la trajectoire du système à observer.

Les équations d'erreur linéarisées autour du point d'équilibre sans erreur $(\overline{\eta}, \overline{\nu}, \overline{\beta}, \overline{\alpha}) := (1, 0, 0, 1)$ sont

$$\begin{aligned}
\delta\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\delta\beta + (L_V \delta E_V + L_B \delta E_B) \\
\delta\dot{\nu} &= -2 I_a \times \delta\eta - \delta\alpha I_a + (M_V \delta E_V + M_B \delta E_B) \\
\delta\dot{\beta} &= I_\omega \times \delta\beta + (N_V \delta E_V + N_B \delta E_B) \\
\delta\dot{\alpha} &= (O_V \delta E_V + O_B \delta E_B),
\end{aligned}$$

où $\delta E_V = \delta\nu$ et $\delta E_B = 2B \times \delta\eta$. On peut montrer que ces équations linéarisées, mis à part les termes de corrections à choisir, se découplent en quatre sous-systèmes indépendants (longitudinal, latéral, vertical et cap) quand I_a est constant I_a et $I_\omega = 0$. Il est intéressant de respecter cette structure pour avoir une



(a) Estimated Euler angles (simulation)

(b) Estimated Euler angles (experiment)

(c) Estimated velocity (simulation)

(d) Estimated velocity (experiment)

(e) Estimated velocity (simulation)

(f) Estimated biases (experiment)

FIGURE 2. Résultats expérimentaux

interprétation physique des réglages, et surtout pour assurer qu'une perturbation magnétique n'affecte de

manière sensible que le cap. C'est possible en choisissant comme réglage

$$\begin{array}{ll} L_V E_V = -l_V I_a \times E_V & L_B E_B = l_B \langle B \times E_B, I_a \rangle I_a \\ M_V E_V = -m_V E_V & M_B E_B = 0 \\ N_V E_V = n_V I_a \times E_V & N_B E_B = -n_B \langle B \times E_B, I_a \rangle I_a \\ O_V E_V = o_V \langle I_a, E_V \rangle & O_B E_B = 0 \end{array}$$

où $l_V, l_B, m_V, n_V, n_B, o_V > 0$ sont des nombres à choisir. On montre alors facilement que l'observateur converge autour de toute trajectoire telle que I_a ne varie pas trop rapidement et I_a n'est pas trop grand (par rapport aux l_V, l_B, m_V, n_V choisis) ; on pourrait d'ailleurs, au prix d'un réglage un peu plus complexe dépendent de I_ω, assurer la convergence autour de toute trajectoire telle que I_a et I_w ne varient pas trop rapidement. On rappelle qu'un EKF ne garantit a priori que la convergence autour de tout point d'équilibre lentement variable.

3) Résultats en simulation et expérimentaux: On illustre le bon comportement de l'observateur d'abord en simulation, Fig.2(a)-2(c)-2(e). On fait suivre au système une trajectoire à peu près représentative d'un mini-drone en vol. Bien que (volontairement) très mal initialisé, l'observateur converge sans problème vers les bonnes valeurs, ce qui illustre la grande taille du domaine de convergence. À $t = 30$ le champ magnétique est brutalement perturbé : seul l'estimation du cap ψ est faussée.

On montre ensuite une comparaison expérimentale avec la MIDG2 en mode INS. Après avoir attendu quelques minutes que les deux systèmes aient estimé leurs biais, on les a agités en tout sens jusqu'à $t = 40s$. Les résultats sont très similaires. On insiste encore une fois sur la simplicité de l'observateur proposé, qui permet son implémentation sur un calculateur très peu puissant, à la différence d'un EKF.

D. Estimateurs "spécifiques"

On se contente de citer l'exemple d'un drone de type quadrirotor traité dans [8]. On peut montrer que la résultante des forces apparaissant dans l'équation (4) s'écrit

$$\frac{f}{m} \approx \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{m}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)u \\ -\frac{\lambda}{m}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)v \\ -\frac{\alpha}{m}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2\right) \end{pmatrix},$$

où u, v sont les deux premières composantes dans le repère avion de $\vec{V_C}$ (en fait il s'agit de la vitesse par rapport au flux d'air, ce qui revient au même quand il n'y a pas de vent) ; ω_1 à ω_4 les vitesses de rotation des hélices ; λ, α des constantes liées à la géométrie des hélices.

D'après la section I-C1, un accéléromètre placé au centre de masse fournira donc de l'information sur deux des composantes du vecteur vitesse, information qui peut-être utilisée dans un observateur. On trouvera aussi dans [8] une discussion sur la validité de l'approximation $\dot{V} \approx 0$ faite dans la section III-B.

RÉFÉRENCES

[1] P. D. Groves, *Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems*. Artech House, 2008.

[2] J. L. Crassidis, F. L. Markley, and Y. Cheng, "Survey of nonlinear attitude estimation methods," *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 30, no. 1, pp. 12–28, JAN-FEB 2007.

[3] S. Bonnabel, P. Martin, and P. Rouchon, "Symmetry-preserving observers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 11, pp. 2514–2526, 2008.

[4] P. Martin and E. Salaün, "Invariant observers for attitude and heading estimation from low-cost inertial and magnetic sensors," in *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2007, pp. 1039–1045.

[5] ——, "Design and implementation of a low-cost attitude and heading nonlinear estimator," in *Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2008, pp. 53–61.

[6] R. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218, 2008.

[7] P. Martin and E. Salaün, "An invariant observer for Earth-velocity-aided attitude heading reference systems," in *IFAC World Congress*, 2008, paper identifier 10.3182/20080706-5-KR-1001.3577.

[8] ——, "The true role of accelerometer feedback in quadrotor control," 2009, preprint HAL. [Online]. Available : http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00422423/en/