



**HAL**  
open science

# Estimation des vitesses à partir de la mesure des déplacements pour une équation des ondes

Pierre Rouchon

► **To cite this version:**

Pierre Rouchon. Estimation des vitesses à partir de la mesure des déplacements pour une équation des ondes. 2010. hal-00473034

**HAL Id: hal-00473034**

**<https://minesparis-psl.hal.science/hal-00473034>**

Preprint submitted on 13 Apr 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Estimation des vitesses à partir de la mesure des déplacements pour une équation des ondes

Pierre Rouchon \*

7 avril 2010

Cette note a pour origine le séminaire donné par Mathias Fink le 2 avril au laboratoire Jacques-Louis Lions. Il y soulevait une question intéressante: l'estimation du champ spatial des vitesses de propagation à partir de la mesure en temps réel du champ des déplacements. Cette note suggère que les observateurs asymptotiques non-linéaires avec réglage des gains reposant sur deux échelles de temps pourraient donner une réponse raisonnable à cette question.

## L'équation des ondes et le filtre estimant les vitesses

On suppose que le déplacement mesuré  $u(t, r)$  obéit à une equation des ondes dans le domaine  $\Omega$  (dimension 2 ou 3) où  $r$  varie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot (p \nabla u) \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On souhaite estimer le champ  $p(r) = c^2(r) > 0$  dépendant uniquement de  $r$ . Il convient de mettre le système sous la forme de deux equations d'ordre un en temps:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot (p \nabla u).$$

On note alors  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  et  $\hat{p}$  les estimées de  $u$ ,  $v$  et  $p$ . Elles obéissent aux équations suivantes où les mesures  $u(t, r)$  sont vues comme des termes sources:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \hat{v} - k_u(\hat{u} - u) \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} &= \nabla \cdot (\hat{p} \nabla \hat{u}) - k_v(\hat{v} - v) \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} &= k_p \nabla \hat{u} \cdot \nabla (\hat{u} - u) \end{aligned}$$

Les gains  $k_u$ ,  $k_v$  et  $k_p$  sont positifs et donnés en fonction d'un petit paramètre  $0 < \epsilon \ll 1$  homogène à un temps:

$$k_u = \frac{\bar{k}_u}{\epsilon}, \quad k_v = \frac{\bar{k}_v}{\epsilon^2}, \quad k_p = \frac{\bar{k}_v}{\epsilon^2 \tau (\Delta \bar{u})^2},$$

avec  $\bar{k}_u, \bar{k}_v > 0$  constantes sans dimension,  $\tau > 0$  une constante de temps caractéristique de la convergence de  $\hat{p}$  et  $\Delta \bar{u} > 0$  la taille caractéristique du Laplacien de  $u$ . Nous allons voir que ce système dynamique instationnaire, dont les estimées  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  et  $\hat{p}$  sont solutions, est stable pour ce choix des gains  $k_u$ ,  $k_v$  et  $k_p$ , choix reposant sur deux échelles de temps: une convergence rapide de  $\hat{u}$  et  $\hat{v}$  (échelle de temps  $\epsilon$ ); une convergence lente de  $\hat{p}$  (échelle de temps  $\tau$ ). La stabilité veut dire que ce système dynamique oublie sa condition initiale et donc fonctionne comme un filtre. La

---

\*Mines ParisTech, Centre Automatique et Systèmes, Mathématiques et Systèmes, 60 Bd Saint-Michel, 75272 Paris cedex 06, France. E-mail: pierre.rouchon@mines-paristech.fr

construction de ce filtre repose sur un modèle dynamique des données (ici l'équation des ondes): c'est donc un observateur asymptotique<sup>1</sup>.

## Un modèle réduit reposant sur l'oscillateur harmonique

Pour comprendre la structure de cet observateur non-linéaire et la façon dont les gains  $k_u$ ,  $k_v$  et  $k_p$  sont choisis, il est utile de considérer dans un premier temps un modèle réduit de dimension finie. L'équation des ondes devient alors un oscillateur harmonique de position  $u$ , de vitesse  $v$  et de pulsation  $\sqrt{p}$ :

$$\frac{d}{dt}u = v, \quad \frac{d}{dt}v = -pu$$

On mesure en temps réel de la position  $u(t)$ . On souhaite estimer  $p > 0$ . Les estimées  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  et  $\hat{p}$  obéissent à la dynamique suivante:

$$\frac{d}{dt}\hat{u} = \hat{v} - k_u(\hat{u} - u), \quad \frac{d}{dt}\hat{v} = -\hat{p}\hat{u} - k_v(\hat{u} - u), \quad \frac{d}{dt}\hat{p} = k_p\hat{u}(\hat{u} - u)$$

où les gains  $k_u$ ,  $k_v$  et  $k_p$  sont donnés en fonction d'un petit paramètre  $0 < \epsilon \ll 1$  par

$$k_u = \frac{\bar{k}_u}{\epsilon}, \quad k_v = \frac{\bar{k}_v}{\epsilon^2}, \quad k_p = \frac{\bar{k}_p}{\epsilon^2}$$

avec  $\bar{k}_u, \bar{k}_v > 0$  gains constants et  $\bar{k}_p > 0$  gain pouvant dépendre du temps. Des calculs élémentaires donnent la dynamique suivante pour les erreurs  $\tilde{u} = \hat{u} - u$ ,  $\tilde{v} = \hat{v} - v$  et  $\tilde{q} = \hat{p} - p$

$$\frac{d}{dt}\tilde{u} = \frac{\tilde{v} - \bar{k}_u\tilde{u}}{\epsilon}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{v} = \frac{-(\bar{k}_v + \tilde{q} + \epsilon^2 p)\tilde{u} - u\tilde{q}}{\epsilon}, \quad \frac{d}{dt}\tilde{q} = \bar{k}_p(\tilde{u} + u)\tilde{u}.$$

Les variables  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont des variables rapides. La variable  $\tilde{q}$  est lente.  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  se stabilisent rapidement et vérifient à des termes d'ordre un en  $\epsilon$  (système lent/rapide sous la forme standard de Tikhonov et approximation quasi-statique):

$$\tilde{u} = -\frac{u\tilde{q}}{\bar{k}_v + \tilde{q} + \epsilon^2 p}, \quad \tilde{v} = -\frac{\bar{k}_u u \tilde{q}}{\bar{k}_v + \tilde{q} + \epsilon^2 p}.$$

La dynamique de  $\tilde{q}$  est donc au premier ordre en  $\tilde{q}$  et  $\epsilon$ :

$$\frac{d}{dt}\tilde{q} \approx -\frac{\bar{k}_p u^2}{\bar{k}_v}\tilde{q}.$$

Ainsi  $\tilde{q}$  converge localement vers 0 et donc  $\tilde{p} = \hat{p} - p$  converge aussi vers 0 quand  $t$  tends vers  $+\infty$ . On peut même régler l'échelle de temps de convergence  $\tau > 0$  posant  $\bar{k}_p = \frac{\bar{k}_v}{\tau(u^2 + \bar{u}^2)}$  où  $\bar{u} > 0$  est une valeur caractéristique de  $|u|$ . En effet on aura alors

$$\frac{d}{dt}\tilde{q} \approx -\frac{u^2}{u^2 + \bar{u}^2} \frac{\tilde{q}}{\tau}.$$

## Retour à l'équation des ondes

Reprenons la démarche précédente pour l'équation des ondes et l'observateur asymptotique régit par le système aux dérivées partielles ( $k_p = \frac{\bar{k}_p}{\epsilon^2}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \hat{v} - \frac{\bar{k}_u}{\epsilon}(\hat{u} - u) \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} &= \nabla \cdot (\hat{p} \nabla \hat{u}) - \frac{\bar{k}_v}{\epsilon^2}(\hat{u} - u) \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} &= \frac{\bar{k}_p}{\epsilon^2} \nabla \hat{u} \cdot \nabla (\hat{u} - u) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Le filtre de Kalman étendu est un type particulier d'observateur asymptotique où les gains sont donnés par une équation différentielle matricielle de Riccati. Les observateurs asymptotiques sont souvent utilisés pour les systèmes non-linéaires décrits par des équations différentielles ordinaires avec une forte structure (passivité, contraction, symétries, ...).

On pose donc  $\tilde{u} = \hat{u} - u$ ,  $\tilde{w} = \epsilon(\hat{v} - v)$  et  $\tilde{q} = \epsilon^2(\hat{p} - p)$ . On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \frac{\hat{w} - \bar{k}_u \tilde{u}}{\epsilon} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial t} &= \frac{\nabla \cdot (\tilde{q} \nabla u) + \nabla \cdot (\tilde{q} \nabla \tilde{u}) + \epsilon^2 \nabla \cdot (p \nabla \tilde{u}) - \bar{k}_v \tilde{u}}{\epsilon} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} &= \bar{k}_p \nabla \cdot (\tilde{u} + u) \cdot \nabla \tilde{u}\end{aligned}$$

Ainsi  $\tilde{u}$  et  $\tilde{w}$  sont des variables rapides qui suivent de façon quasi-statique la variable lente  $\tilde{q}$  avec au premier ordre en  $\tilde{q}$  et en  $\epsilon$  (équations approximatives de la "couche limite")

$$\tilde{w} = \bar{k}_u \tilde{u}, \quad \tilde{u} = \frac{1}{\bar{k}_v} \nabla \cdot (\tilde{q} \nabla u).$$

Ainsi la dynamique lente de  $\tilde{q}$  s'écrit toujours au premier ordre en  $\tilde{q}$  et  $\epsilon$ :

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} \approx \frac{\bar{k}_p}{\bar{k}_v} \nabla u \cdot \nabla (\nabla \cdot (\tilde{q} \nabla u)).$$

Suite à une intégration par partie où les termes de bord sont nuls, on obtient ( $\frac{\bar{k}_p}{\bar{k}_v}$  supposé indépendant de  $r$ )

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \tilde{q}^2 \right) = -2 \int_{\Omega} \frac{\bar{k}_p}{\bar{k}_v} (\nabla \cdot (\tilde{q} \nabla u))^2.$$

Ainsi la norme  $L^2$  de  $\tilde{q}$  décroît vers 0. La norme  $L^2$  de  $\tilde{q}$  est une fonction de Lyapounov pour la dynamique lente de  $\tilde{q}$ , cela pourvu de  $\bar{k}_p$  soit positif. Il est assez tentant de choisir  $\bar{k}_p$  de façon à compenser  $(\Delta u)^2$ ,

$$\bar{k}_p = \frac{\bar{k}_v}{\tau (\Delta \bar{u})^2},$$

avec  $\tau > 0$  une constante de temps caractéristique de la convergence de  $\tilde{q}$  et avec  $\Delta \bar{u} > 0$  la taille caractéristique du Laplacien de  $u$ . D'autres réglages de  $\bar{k}_p$  sont possibles ...

## Pré-filtrage spatial

Comme les données  $u(t, r)$  sont bruitées il peut être intéressant d'effectuer un pré-filtrage spatial et de considérer la convolution de  $u$  avec une fonction  $\phi$  positive, régulière, à support compact autour de l'origine et vérifiant  $\int_{\Omega} \phi = 1$ . On pose donc

$$u_m(t, r) \equiv \phi * u_{(t, r)} = \int_{\Omega} \phi(r - r') u(t, r') dr'.$$

Alors  $u_m$  est solution du système intégro-différentiel

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}(t, r) = v_m(t, r), \quad \frac{\partial v_m}{\partial t}(t, r) = \int_{\Omega} p(r') \nabla \phi_{(r-r')} \cdot \nabla u_{(t, r')} dr' \equiv \nabla \phi * (p \nabla u)_{(t, r)}$$

On note alors  $\hat{u}_m$ ,  $\hat{v}_m$  et  $\hat{p}$  les estimées de  $u_m$ ,  $v_m = \phi * v$  et  $p$ . Elles obéissent aux équations suivantes où les mesures brutes  $u(t, r)$  et pré-filtrées  $u_m(t, r)$  sont vues comme des termes sources:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_m}{\partial t} &= \hat{v}_m - k_u (\hat{u}_m - u_m) \\ \frac{\partial \hat{v}_m}{\partial t} &= \nabla \phi * (\hat{p} \nabla u) - k_v (\hat{u}_m - u_m) \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}(t, r) &= -k_p \int_{\Omega} ((\hat{u}_m - u_m)_{(t, r+r')} \nabla \phi_{(r')} \cdot \nabla u_{(t, r)}) dr'\end{aligned}$$

où

$$k_u = \frac{\bar{k}_u}{\epsilon}, \quad k_v = \frac{\bar{k}_v}{\epsilon^2}, \quad k_p = \frac{\bar{k}_p}{\epsilon^2},$$

avec  $\bar{k}_u, \bar{k}_v > 0$  constantes sans dimension,  $0 < \epsilon \ll 1$  homogène à un temps,  $\bar{k}_p > 0$  un gain que l'on fixera plus loin. On pose  $\tilde{u}_m = \hat{u}_m - u_m$ ,  $\tilde{w}_m = \epsilon^2(\hat{v}_m - v_m)$  et  $\tilde{q} = \epsilon^2(\hat{p} - p)$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial t} &= \frac{\tilde{w}_m - \bar{k}_u \tilde{u}_m}{\epsilon} \\ \frac{\partial \tilde{v}_m}{\partial t} &= \frac{\nabla \phi * (\tilde{q} \nabla u) - \bar{k}_v \tilde{u}_m}{\epsilon} \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}(t, r) &= -\bar{k}_p \int_{\Omega} (\tilde{u}_m(t, r+r') \nabla \phi_{(r')} \cdot \nabla u_{(t,r)}) \, dr' \end{aligned}$$

Les quantités  $\tilde{u}_m$  et  $\tilde{w}_m$  convergent donc rapidement vers  $\frac{1}{\bar{k}_v} \nabla \phi * (\tilde{q} \nabla u)$  et  $\frac{\bar{k}_p}{\bar{k}_v} \nabla \phi * (\tilde{q} \nabla u)$ , respectivement. Ainsi  $\tilde{q}$  évolue lentement selon

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t}(t, r) = -\frac{\bar{k}_p}{\bar{k}_v} \int_{\Omega} (\nabla \phi * (\tilde{q} \nabla u)_{(t, r+r')} \nabla \phi_{(r')} \cdot \nabla u_{(t,r)}) \, dr'.$$

Un calcul direct montre la décroissance de la norme  $L^2$  de  $\tilde{q}$  (fonction de Lyapounov):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tilde{q}^2 \right) = -\frac{\bar{k}_p}{\bar{k}_v} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \tilde{q}(t, r') \nabla \phi_{(r-r')} \cdot \nabla u_{(t, r')} \, dr' \right)^2 \, dr \leq 0.$$

Un premier choix raisonnable pour  $\bar{k}_p$  (qui peut dépendre de  $t$  mais pas de  $r$  dans le calcul précédent) serait donc

$$\bar{k}_p = \frac{\bar{k}_v \int_{\Omega} dr}{\tau \left( \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_{(r-r')} \cdot \nabla u_{(t, r')} \, dr' \right)^2 \, dr + \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_{(r-r')} \cdot \nabla \bar{u}_{(r')} \, dr' \right)^2 \, dr \right)}$$

où  $\tau$  est une constante de temps et  $\bar{u}$  est un champs caractéristique de  $u$ . D'autres choix sont ici possibles.