



**HAL**  
open science

## Dynamique et contrôle des systèmes - exercices

Nicolas Petit, Pierre Rouchon

► **To cite this version:**

Nicolas Petit, Pierre Rouchon. Dynamique et contrôle des systèmes - exercices. Master. France. 2016. cel-01454411

**HAL Id: cel-01454411**

**<https://minesparis-psl.hal.science/cel-01454411>**

Submitted on 2 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Nicolas Petit, Pierre Rouchon

---

# Dynamique et contrôle des systèmes

---

Recueil d'exercices

MINES PARISTECH  
PSL Research University  
CAS - Centre automatique et systèmes, 60 bd St Michel 75006 Paris, France  
AOÛT 2016



### Exercice 1 Un actionneur

On considère un système ayant pour fonction de transfert  $\frac{K}{s(s+a)}$  où  $K$  et  $a$  sont deux coefficients strictement positifs. On notera  $u$  l'entrée et  $y$  la sortie.

1. Proposer une réalisation de cette fonction de transfert. Est-elle commandable et observable?
2. Étudier la stabilité du système.
3. On ne mesure que la sortie du système. Proposer un observateur permettant de reconstituer tout l'état. Expliciter la fonction de transfert entre chaque composante du vecteur d'état observé et la mesure.
4. Calculer un retour d'état stabilisant le système autour de 0 lui procurant des pôles en boucle fermée valant  $-2a$  et  $-3a$ .
5. On souhaite stabiliser le système autour d'une valeur de sortie constante  $y^{ref}$ . Comment faire?
6. Au lieu d'un contrôle par retour d'état, on souhaite n'utiliser que les valeurs mesurées à la sortie du système. Expliciter le schéma d'un observateur contrôleur répondant à la question. De quel ordre est alors le système bouclé? Quelles en sont l'entrée et la sortie? Quelles en sont les valeurs propres?
7. On souhaite maintenant asservir le système autour d'une trajectoire de référence (non constante). Comment doit-on utiliser le schéma précédent?
8. On cherche maintenant à optimiser cette trajectoire en calculant le transitoire optimal entre deux points de fonctionnement (par exemple 1 et 0) au sens du critère quadratique

$$\min \int_0^T u^2(t) dt$$

où  $T$  est une constante strictement positive. Former les équations différentielles permettant de calculer cette trajectoire.

9. Le système sur lequel nous venons de concevoir un régulateur est en fait l'actionneur du système non linéaire satisfaisant l'équation

$$\dot{\chi} = -\varepsilon(1 + \chi^2)(\chi - f(y))$$

où  $\varepsilon$  est un coefficient proche de 0 et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction strictement croissante. Le contrôle est  $y^{ref}$ , la consigne que l'on passe au régulateur de l'actionneur. En utilisant comme possible fonction de Lyapounov

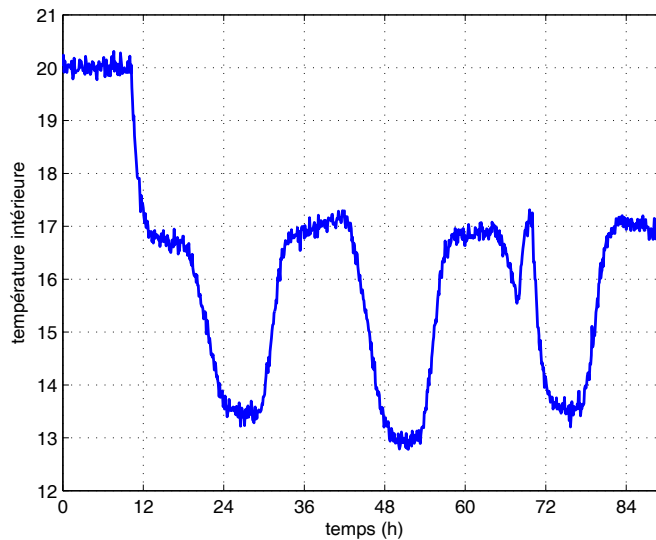
$$V(\chi) = \|\chi - f(y)\|^2$$

étudier la convergence de la dynamique en  $\chi$  à  $y$  fixé. En déduire que le système en  $\chi$  avec le régulateur de  $y$  à  $y^{ref}$  converge vers  $\chi = f(y^{ref})$ .

### Exercice 2 Chauffage

On considère un bâtiment d'habitation disposant d'un chauffage et d'une sonde de température. On a reporté ci-dessous les relevés de température au cours du temps. Sur cette période, on a coupé le chauffage et sa régulation, puis laissé la température évoluer librement. On s'aperçoit que la température intérieure subit les influences de la température extérieure qui est fluctuante

entre la nuit et le jour.



1. Proposer un modèle linéaire simple de ce système.
2. A quel moment a-t-on coupé le chauffage et sa régulation?
3. Quelle est la constante de temps du système? A quelle grandeur physique correspond-elle? Comment pourrait-on la modifier?
4. Pourquoi observe-t-on des oscillations, et quelle en est approximativement la période?
5. Une des trois journées d'étude a été plus froide que les autres. Laquelle?
6. Pendant un temps bref, on a remis le chauffage en route. Quel est ce moment?
7. Pour faire des économies, on souhaite complètement couper le chauffage la nuit au moyen d'une minuterie. Comment choisir la plage horaire sur laquelle on peut faire cette coupure?

### Exercice 3 Engins à poussée vectorisée

On s'intéresse ici au pilote de systèmes aérospatiaux à poussée vectorisée qui forment une classe de systèmes sous-actionnés: avion à décollage vertical, quadricoptère, lanceurs réutilisables, atterrisseur lunaire (voir Figure 1). Dans un premier temps, on va considérer un des systèmes de cette classe, un avion. Un objectif est de suivre une trajectoire horizontale ou une trajectoire verticale (décollage).

**Modélisation.** — On considère que l'avion se déplace dans un plan vertical. Le comportement dynamique de l'avion est alors décrit par

$$\begin{aligned}
 (1) \quad m\dot{v}_x &= (F_1 - F_2) \sin \alpha \cos \theta - (F_1 + F_2) \cos \alpha \sin \theta + f_x(v_x, v_z, \theta, \dot{\theta}) \\
 (2) \quad m\dot{v}_z &= (F_1 - F_2) \sin \alpha \sin \theta + (F_1 + F_2) \cos \alpha \cos \theta - mg + f_z(v_x, v_z, \theta, \dot{\theta}) \\
 (3) \quad J\ddot{\theta} &= l(F_1 - F_2) \cos \alpha + f_\theta(v_x, v_z, \theta, \dot{\theta}),
 \end{aligned}$$

où  $(v_x, v_z)$  est la vitesse du centre de masse,  $\theta$  l'angle par rapport à l'horizontale,  $F_1, F_2$  les poussées des réacteurs,  $l$  leur distance par rapport au centre de masse,  $\alpha$  leur inclinaison (proche de 0),  $m$  la masse de l'appareil, et  $J$  son moment d'inertie. Les fonctions  $f_x, f_z$  et  $f_\theta$  représentent



(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 1. Engins à poussée vectorisée: (a) Dassault Mirage III V “Balzac”, (b) Parrot Bebop, (c) Space X Falcon 9, (d) Lunar Landing Research Vehicle

des effets aérodynamiques. Ces effets sont négligeables à faible vitesse et s'annulent quand l'avion ne bouge pas.

Un tel engin est schématisé sur la Figure 2.

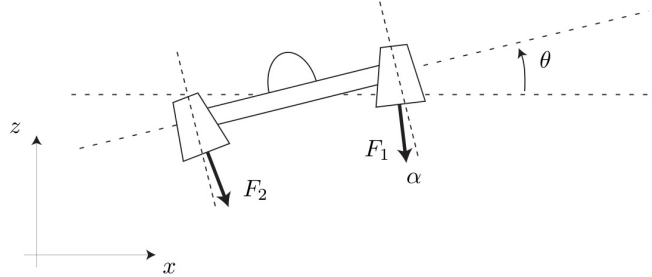


FIGURE 2. Avion à décollage vertical.

Les poussées  $F_1$ ,  $F_2$  évoluent en fonction des commandes des moteurs  $u_1$ ,  $u_2$  d'après les équations

$$(4) \quad \dot{F}_1 = K(u_1 - F_1)$$

$$(5) \quad \dot{F}_2 = K(u_2 - F_2)$$

où  $K > 0$  est grand.

1. Quels sont, dans le modèle proposé, le nombre de variables d'état et le nombre de commandes?
2. Simplifier ce modèle en notant: *i*) que les effets aérodynamiques sont négligeables à basse vitesse *ii*) que certaines variables sont très rapides (et asymptotiquement stables) devant d'autres.
3. En posant

$$a = \frac{m}{\cos \alpha}, \quad b = \frac{J}{l \cos \alpha}, \quad c = \frac{J}{ml} \tan \alpha, \quad v_1 = \frac{u_1 + u_2}{a} \text{ et } v_2 = \frac{u_1 - u_2}{b}$$

montrer qu'on a

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= cv_2 \cos \theta - v_1 \sin \theta \\ \dot{v}_z &= cv_2 \sin \theta + v_1 \cos \theta - g \\ \ddot{\theta} &= v_2 \end{aligned}$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont les commandes.

4. Quels sont les points d'équilibre de ce modèle?
5. Établir que le linéarisé tangent autour d'un équilibre est donné par

$$\begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= -g\delta\theta + c\delta v_2 \\ \delta \dot{v}_z &= \delta v_1 \\ \delta \ddot{\theta} &= \delta v_2 \end{aligned}$$

6. Mettre ce système sous forme de Brunovsky.
7. Proposer un bouclage stabilisant.
8. Peut-on choisir arbitrairement les pôles en boucle fermée?
9. Comment effectuer un décollage? Comment effectuer un mouvement latéral?

10. Reprendre l'étude pour l'appareil à poussée vectorisée schématisé sur la Figure 3. Les deux commandes sont dans ce cas la valeur de la poussée et son angle de vectorisation. Montrer qu'on aboutit à la même forme de Brunovsky.

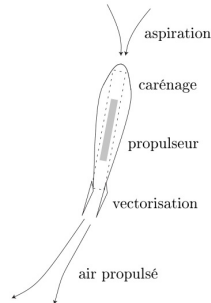
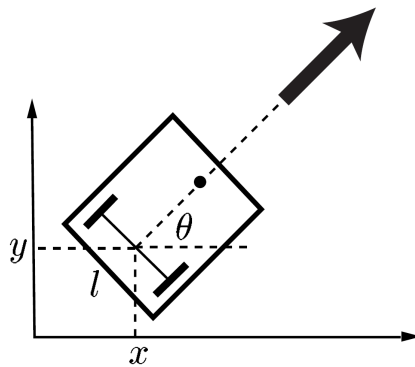


FIGURE 3. Propulseur vectorisé.

#### Exercice 4 Robot à roues



On considère un robot mobile (tel qu'utilisé dans de nombreux concours de robotique). Ce robot admet sur un même essieu deux roues motorisées de manière indépendante. On note  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  les coordonnées cartésiennes du milieu de l'essieu,  $\theta \in [0, 2\pi[$  l'angle du robot avec un axe fixe,  $\Omega_d$  et  $\Omega_g$  les vitesses de rotation des roues droite et gauche. On suppose que les roues roulent sans glisser ni dérapier.

1. Montrer que la dynamique est

$$(6) \quad \frac{d}{dt}x = v \cos \theta, \quad \frac{d}{dt}y = v \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}\theta = \omega$$

où  $(x, y, \theta)$  est l'état et  $u = (v, \omega) \in \mathbb{R}^2$  est le contrôle que l'on reliera à  $\Omega_d$  et  $\Omega_g$ , le rayon  $\rho$  des roues et  $l$  la distance entre les roues.

2. La dynamique des moteurs est décrite par  $(\nu = d, g)$

$$J \frac{d}{dt}\Omega_\nu = C_\nu + kI_\nu, \quad L \frac{d}{dt}I_\nu = -RI_\nu - k\Omega_\nu + V_\nu$$

où  $(J, k, R, L)$  sont des paramètres positifs. Le contrôle est la tension  $V_\nu$ ;  $\Omega_\nu$  est la vitesse de rotation et  $I_\nu$  le courant.  $C_\nu$  est le couple extérieur supposé constant. Sous l'hypothèse



$J$  et  $L$  petits, montrer que l'on a  $\Omega_\nu \approx \frac{1}{k}V_\nu + \frac{R}{k^2}C_\nu$ . Dans la suite on néglige  $\frac{R}{k^2}C_\nu$  et donc  $\Omega_\nu \approx \frac{1}{k}V_\nu$ . Réécrire le modèle de la question précédente en fonction de  $V_d$  et  $V_g$ .

3. Quels sont les points d'équilibre du système ? Écrire autour d'un point d'équilibre le système linéarisé. Étudier sa commandabilité.
4. Dans cette question on désire suivre l'axe des abscisses à une vitesse  $a > 0$  constante :

$$x_r(t) = at, \quad y_r(t) = 0, \quad \theta_r(t) = 0, \quad v_r(t) = a, \quad \omega_r(t) = 0$$

Pour cela on pose  $x = x_r + \Delta_x$ ,  $y = y_r + \Delta_y$ ,  $\theta = \theta_r + \Delta_\theta$ ,  $v = v_r + \Delta_v$  et  $\omega = \omega_r + \Delta_\omega$  où les écarts  $\Delta_\sigma$ ,  $\sigma = x, y, \theta, v, \omega$  sont supposés petits.

(a) Montrer qu'au premier ordre, les équations linéaires satisfaites par les  $\Delta_\sigma$  sont

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta_x = \Delta_v \\ \frac{d}{dt}\Delta_y = a\Delta_\theta \\ \frac{d}{dt}\Delta_\theta = \Delta_\omega \end{cases}$$

avec  $(\Delta_v, \Delta_\omega)$  comme commande.

(b) Donner un bouclage d'état qui stabilise asymptotiquement le système ci-dessus.

5. Dans cette question on désire suivre une courbe régulière paramétrée en abscisse curviligne  $s \mapsto (x_r(s), y_r(s))$ . On note  $\theta_r(s)$  l'angle de sa tangente et  $\kappa_r(s)$  sa courbure. On rappelle que (formules de Frénet pour les courbes planes)

$$\frac{dx_r}{ds} = \cos \theta_r, \quad \frac{dy_r}{ds} = \sin \theta_r, \quad \frac{d\theta_r}{ds} = \kappa_r$$

On souhaite suivre cette courbe avec une vitesse constante  $a > 0$ . Aux écarts cartésiens  $(\Delta_x, \Delta_y)$  utilisés dans la question précédente on préfère les écarts tangentiel  $\Delta_{\parallel}$  et normal  $\Delta_{\perp}$  définis par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} + \Delta_{\parallel} \begin{pmatrix} \cos \theta_r \\ \sin \theta_r \end{pmatrix} + \Delta_{\perp} \begin{pmatrix} -\sin \theta_r \\ \cos \theta_r \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que les commandes de référence sont

$$v_r(t) = a, \quad \omega_r(t) = a\kappa_r(at)$$

En déduire qu'au premier ordre les écarts  $\Delta_\sigma$  ( $\sigma = \parallel, \perp, \theta, v, \omega$ ) vérifient

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\Delta_{\parallel} = a\kappa_r(at)\Delta_{\perp} + \Delta_v \\ \frac{d}{dt}\Delta_{\perp} = -a\kappa_r(at)\Delta_{\parallel} + a\Delta_\theta \\ \frac{d}{dt}\Delta_\theta = \Delta_\omega \end{cases}$$

avec  $(\Delta_v, \Delta_\omega)$  comme commande.

- (b) On suppose dans (8) que la courbure  $\kappa_r(s)$  varie peu en fonction de  $s$  si bien que  $\kappa_r(at) \approx \bar{\kappa}_r$  est en première approximation indépendant de  $t$ . Donner un bouclage d'état stabilisant.
- (c) Comment se ramener à ce qui précède si l'on souhaite parcourir la même courbe  $s \mapsto (x_r(s), y_r(s))$  mais avec une vitesse variable  $a(t) = \frac{d}{dt}s_r$  régulière correspondant à une loi horaire de  $t \mapsto s_r(t)$  définie par avance ?

### Exercice 5 Sur la pêche

Soit le système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N = N(1 - N/K) - EN \\ \frac{d}{dt}E = E(pN - c) \end{cases}$$

où  $N > 0$  est la population de poissons,  $E > 0$  l'effort de pêche,  $p$  le prix du poisson, et  $c$  le coût de l'effort de pêche et le paramètre  $K > c/p$ .

1. On suppose que  $p = \bar{p}$  et  $c = \bar{c}$  sont constants et  $> 0$ . Montrer que le système n'admet qu'un seul point d'équilibre  $(\bar{N}, \bar{E})$  dans le quart de plan  $> 0$ . Etudier sa stabilité. Montrer en utilisant le critère de la divergence en échelle log que ce système n'admet pas d'orbite périodique.
2. On suppose que le poisson est taxé. Cela permet de considérer la grandeur exogène  $p = \bar{p} + \Delta p$  comme une entrée :
  - (a) Calculer le linéaire tangent autour du point d'équilibre  $(\bar{N}, \bar{E})$ .
  - (b) Montrer qu'il est commandable et donner sa sortie de Brunovsky.
  - (c) Une innovation fait que le coût de la pêche  $c$  diminue brutalement de  $-\Delta c$ . En supposant que le système était à l'équilibre, calculer à partir de l'approximation linéaire une commande en boucle ouverte régulière (politique fiscale)  $[0, T] \ni t \mapsto \Delta p(t)$  qui ramène au bout du temps  $T$  le système à l'équilibre avec la même population de poissons (préservation de l'éco-système). Pour assurer la régularité, on pourra étendre l'état.
3. Reprendre la question 2c sur le système non linéaire directement.

### Exercice 6 La montgolfière

Il s'agit de piloter la dynamique verticale d'une montgolfière telle que représentée sur la Figure 4,

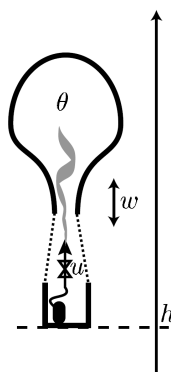


FIGURE 4. Montgolfière à contrôler.

la dynamique horizontale étant très peu commandable.

On note  $\theta$  l'écart de température par rapport à l'équilibre dans le ballon,  $v$  la vitesse ascendante et  $h$  l'altitude. Un premier modèle simple est le suivant :

$$\frac{d}{dt}\theta = -\theta/\tau_1 + u, \quad \frac{d}{dt}v = -v/\tau_2 + \sigma\theta + w/\tau_2, \quad \frac{d}{dt}h = v$$

où  $\tau_1 > 0$  et  $\tau_2 > 0$  sont des constantes de temps fixes,  $\sigma$  est un paramètre de couplage correspondant à la poussée d'Archimède.  $w$  est la vitesse verticale du vent, considérée ici comme une perturbation.  $u$  est la commande proportionnelle à la chaleur fournie au ballon par le brûleur.

1. On suppose que l'on ne dispose que d'un seul capteur, un altimètre donnant  $h$ . Peut-on en déduire  $v$ ,  $\theta$  et  $w$  en supposant que l'on connaisse  $u$  (c'est un minimum) et que  $w$  varie peu, i.e.  $\frac{d}{dt}w = 0$  ?
2. Construire l'observateur qui permet de reconstruire asymptotiquement l'état  $(h, v, \theta, w)$ .
3. On suppose ici la perturbation  $t \mapsto w(t)$  connue. Montrer que le système est commandable. Quelle est sa sortie de Brunovsky  $y$  ? Construire un contrôleur qui permet de suivre une trajectoire régulière  $t \mapsto y_c(t)$  sur  $y$ .
4. Donner les équations de l'observateur-contrôleur qui permet de suivre la trajectoire  $y_c$  en ne mesurant que  $h$  et avec  $w$  perturbation constante inconnue et donc à estimer.
5. On désire maintenant aller d'une altitude stabilisée  $h_0$  vers une autre altitude stabilisée  $h_1$ . Comment choisir la trajectoire de référence  $t \mapsto y_c(t)$ , en sachant que la commande doit rester comprise entre deux bornes  $-a \leq u \leq b$  ( $a, b, > 0$  donnés) et en supposant  $|w|$  assez petit ?

### Exercice 7 Stabilisation LQ d'un pendule

On s'intéresse à la stabilisation d'un pendule vertical (tel que représenté sur la figure 5) satisfaisant aux équations (normalisées)

$$\ddot{x} = -x + u$$

où  $u$  est une commande librement choisie. On souhaite qu'en temps infini il rejoigne le point d'équilibre  $(0, 0)^T$ . On se propose de calculer une commande réalisant cet objectif par la méthode LQR.

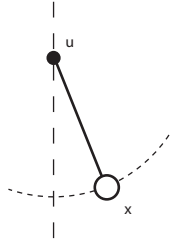


FIGURE 5. Pendule contrôlé.

1. Mettre le système sous forme d'état. Quelles sont les valeurs propres du système en boucle ouverte? Comment se comporte-t-il?
2. Considérer le problème de minimisation du critère

$$J = \int_0^{+\infty} ((x(t))^2 + \dot{x}(t)^2 + u(t)^2) dt$$

Former l'équation de Riccati algébrique correspondante.

3. Résoudre cette équation. Donner l'expression du contrôle optimal.
4. On considère maintenant le problème un peu plus général de minimisation du critère

$$J = \int_0^{+\infty} ((x(t))^2 + \dot{x}(t)^2 + qu(t)^2) dt$$

On réalise deux expériences en boucle fermée en ayant choisi  $q = 1$  et  $q = 1/3$ . Associer ces réglages aux courbes de la figure 6. Que constate-t-on?

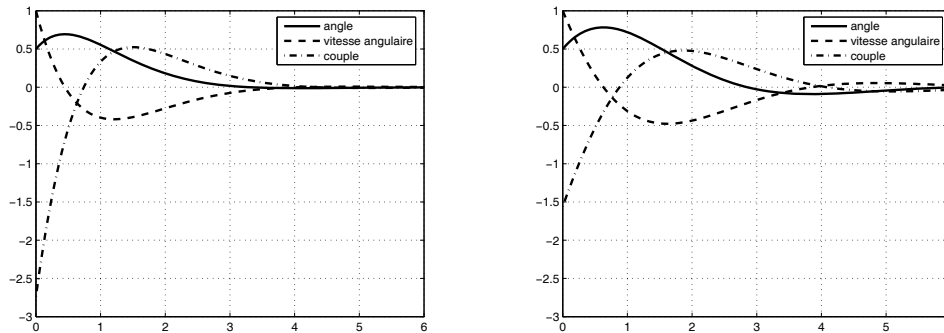


FIGURE 6. Différents réglages de la commande LQR.

### Exercice 8 Placement des pôles avec parties réelles garanties

On considère un système sous forme d'état

$$\dot{X} = AX + BU$$

Ce système est supposé commandable, et on cherche à placer ses pôles en boucle fermée dans le demi-plan complexe  $\Re(z) < -\alpha \leq 0$ .

1. Effectuer un changement de variables

$$(X(t), U(t)) \mapsto (\bar{X}(t) = e^{\alpha t} X(t), \bar{U}(t) = e^{\alpha t} U(t))$$

Quelles sont sous forme d'état les équations satisfaites par  $(\bar{X}, \bar{U})$ ?

2. Le système obtenu est-il commandable?
3. Proposer une commande stabilisante par la méthode LQR. Quelle est l'équation de Riccati algébrique associée?
4. En déduire une loi de commande stabilisant le système original  $\dot{X} = AX + BU$  et garantissant que les pôles en boucle fermée sont dans le demi-plan complexe  $\Re(z) < -\alpha \leq 0$ .

### Exercice 9 Planification optimale et résonance

On considère le problème suivant (avec  $w > 0$ ,  $t_f > 0$ ,  $a_1, a_2, a_3, a_4$  étant des paramètres fixes)

$$\min_{\substack{[0, t_f] \ni t \mapsto (x_1(t), x_2(t), u(t)) \in \mathbb{R}^3 \\ \left\{ \begin{array}{l} x_1(0) = a_1, x_2(0) = a_2, x_1(t_f) = b_1, x_2(t_f) = b_2 \\ \frac{d}{dt}x_1(t) = wx_2, \frac{d}{dt}x_2(t) = w(u - x_1), t \in [0, t_f] \end{array} \right.}} \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

1. Montrer que la solution optimale est donnée par un contrôle de la forme

$$u(t) = p \cos(\omega t) + q \sin(\omega t)$$

avec  $p$  et  $q$  des paramètres constants.

2. Calculer  $p$  et  $q$  pour  $\omega t_f = 2n\pi$  ( $n > 0$  entier),  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $b_1 = b$  et  $b_2 = 0$ . On pourra faire un changement de variables avec une matrice de rotation d'angle  $\omega t$ . Que constate-t-on lorsque la phase  $\omega t_f = 2n\pi$  est très grande? Interpréter le phénomène.
3. Généraliser ce qui précède au cas de plusieurs oscillateurs de fréquences différentes soumis au même contrôle scalaire  $u$ .

### Exercice 10 La balle sur une barre

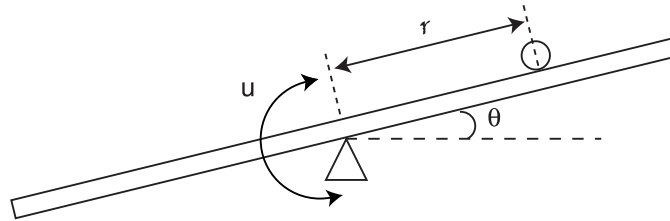


FIGURE 7. La balle et rail “ball and beam”.

On considère le système à deux degrés de liberté représenté sur la Figure 7 : l'angle  $\theta$  que fait la barre par rapport à l'horizontale et la position  $r$  de la balle qui roule sans glisser sur cette barre. Ce système est équipé d'un seul moteur. Fixé sur l'axe de rotation de la barre ce moteur délivre un couple  $u$ . On note  $J$  le moment d'inertie de la barre par rapport à son axe de rotation,  $m$  la masse de la balle de rayon  $R$ ,  $J_b$  le moment d'inertie par rapport à son centre,  $g$  l'accélération de la pesanteur. On souhaite concevoir un algorithme de contrôle qui, à partir des capteurs de positions  $r$  et  $\theta$ , puisse jouer avec des balles de masses  $m$ , d'inerties  $J_b$  et de tailles  $R$  très diverses. Noter que  $J_b = \sigma m R^2$  avec  $\sigma$  entre 0 et 1 dépendant de la densité en fonction du rayon.

#### 1. Modélisation

- (a) Montrer que l'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{J}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{J_b}{2} \left( \frac{\dot{r}}{R} \right)^2$$

(on négligera dans l'énergie cinétique de la balle en rotation sur elle-même, l'effet de la rotation de la barre  $\dot{\theta}$ ).

- (b) Calculer l'énergie potentielle  $U$  en fonction de  $r$  et  $\theta$ . On supposera que l'axe de rotation est au niveau du centre de gravité de la barre.

(c) Déduire de ce qui précède les équations de Lagrange suivantes :

$$(1 + \sigma) \frac{d}{dt}(\dot{r}) = r\dot{\theta}^2 - g \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}((J + mr^2)\dot{\theta}) = -mgr \cos \theta + u$$

On rappelle que les équations de Lagrange d'un système mécanique (holonome, à  $n$  degrés de liberté) décrit par les variables de configurations  $q = (q_1, \dots, q_n)$  (ici  $q = (r, \theta)$ ) s'obtiennent directement (sans passer par le calcul des efforts de liaison) à partir du Lagrangien,  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = W_i \quad i = 1, \dots, n$$

où  $W_i \delta q_i$  est le travail des forces extérieures (non prises en compte dans l'énergie potentielle  $U$ ) lors d'un petit déplacement  $\delta q_i$  associ e à uniquement la variation de la variable  $q_i$ , les autres  $q_j$  ( $j \neq i$ ) restant inchangées.  $W_i$  est en général une fonction de  $q, \dot{q}$  du contrôle et des perturbations extérieures.

(d) Avec  $x = (r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta})$ , montrer que le système sous-forme d'état  $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$  s'écrit:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = \frac{1}{1 + \sigma}x_1(x_4)^2 - \frac{g}{1 + \sigma} \sin x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 = x_4 \\ \frac{d}{dt}x_4 = \frac{1}{J + m(x_1)^2}u - \frac{mg}{J + m(x_1)^2}x_1 \cos x_3 - \frac{2m}{J + m(x_1)^2}x_1x_2x_4 \end{cases}$$

## 2. Placement de pôles.

(a) Donner le point d'équilibre de (9) associ e à  $u = 0$ . Ecrire les équations du système lin earis e. Calculer les pôles en boucle ouverte (on posera  $\omega = \sqrt[4]{\frac{mg^2}{(1 + \sigma)J}}$ ) et discuter la stabilité.

(b) Montrer que le linéaire tangent est commandable. Quelle est sa sortie de Brunovsky.

(c) Calculer le bouclage d'état  $u = Kx$  qui place les pôles en  $(-\omega, -\omega, \omega e^{\frac{3i\pi}{4}}, \omega e^{-\frac{3i\pi}{4}})$ .

3. **Contrôle hi erarchis e.** On pose  $u = \frac{J\omega}{\epsilon}(v - x_4)$  où  $\epsilon$  est un petit paramètre  $> 0$  (typiquement  $\epsilon = 1/10$ ) et où  $v$ , le nouveau contrôle, est une consigne lentement variable de la vitesse de rotation de la barre ( $|\dot{v}| \ll \omega|v|$ ).

(a) Justifier l'approximation lente suivante:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = \frac{1}{1 + \sigma}x_1v^2 - \frac{g}{1 + \sigma} \sin x_3 \\ \frac{d}{dt}x_3 = v \end{cases}$$

(b) Quel est le linéaire tangent autour de l'équilibre  $v = 0$  et  $x_1 = 0$ . Calculer les pôles en boucle ouverte de (10).

(c) Donner le bouclage d'état lent:  $v = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$  qui place les pôles en  $(-\omega, \omega e^{\frac{3i\pi}{4}}, \omega e^{-\frac{3i\pi}{4}})$ .

4. **Discussion.** Avec les questions 2c et 3c, on dispose de deux algorithmes pour stabiliser la balle autour de l'origine. Quel est l'algorithme a priori le plus à même de répondre à la question de départ (la robustesse par rapport aux types de balle)? Quels sont aussi ses inconvénients cependant?

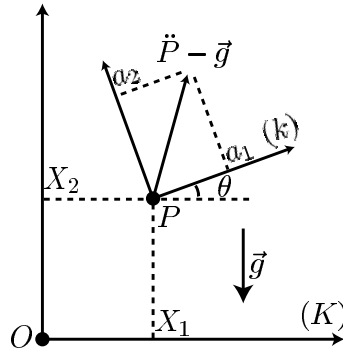


FIGURE 8. Schéma des capteurs.

### Exercice 11 Navigation inertielle et fusion de données

Un corps solide (un avion par exemple) se déplace dans un plan vertical. On dispose à bord de deux accéléromètres et d'un gyromètre. Ces trois capteurs fournissent avec une fréquence d'échantillonnage rapide (de l'ordre du  $kHz$ ) les deux composantes  $a_1(t)$  et  $a_2(t)$  de  $\ddot{P} - \vec{g}$  dans le repère mobile  $(k)$  et la vitesse de rotation  $\omega(t)$  de  $(k)$  par rapport au repère fixe  $(K)$ , voir Figure 8. On dispose aussi d'un GPS, qui fournit avec une fréquence d'échantillonnage bien plus lente (de l'ordre de quelques fractions de  $Hz$ ) les coordonnées  $(X_1, X_2)$  de  $P$  dans  $(K)$ . L'objectif est de faire la fusion des données issues de ces deux types de capteurs pour en déduire une estimation, à la fréquence rapide, de la position  $(X_1, X_2)$  et de l'orientation  $\theta$ . On souhaite aussi être robuste à des biais constants sur les accéléromètres et sur le gyromètre.

1. Montrer que:

$$(11) \quad \frac{d^2}{dt^2} X_1 = a_1(t) \cos \theta - a_2(t) \sin \theta, \quad \frac{d^2}{dt^2} X_2 = a_1(t) \sin \theta + a_2(t) \cos \theta - g, \quad \frac{d}{dt} \theta = \omega(t)$$

2. Montrer que (11) est observable avec comme données d'entrée  $t \mapsto (a_1(t), a_2(t), \omega(t))$  et comme mesure (sortie)  $y(t) = (X_1, X_2)$ .

3. On suppose  $\theta$  petit,  $|a_1| \ll g$  et  $|a_2 - g| \ll g$ . Montrer que

$$(12) \quad \frac{d^2}{dt^2} X_1 = a_1(t) - g\theta, \quad \frac{d^2}{dt^2} X_2 = a_2(t) - g, \quad \frac{d}{dt} \theta = \omega(t)$$

est alors une bonne approximation de (11).

4. Vérifier que (12) reste bien observable (au sens de la question 2) et construire un observateur asymptotique qui reconstruit l'état  $(X_1, \dot{X}_1 = V_1, \theta, X_2, \dot{X}_2 = V_2)$ .

5. Comment choisir les gains de l'observateur ci-dessus si on suppose que la sortie  $y(t)$  est échantillonnée avec la période  $\tau_y$  ( $\tau_y \approx 2$  s pour un GPS) alors que  $a_1$ ,  $a_2$  et  $\omega$  sont des signaux en temps quasi-continu (période d'échantillonnage  $\ll \tau_y$ ).

6. On suppose que les mesures en temps quasi-continu  $a_1$ ,  $a_2$  et  $\omega$  ont chacune un biais constant mais inconnu. Ainsi (12) devient:

$$(13) \quad \frac{d^2}{dt^2} X_1 = a_1(t) + p_1 - g\theta, \quad \frac{d^2}{dt^2} X_2 = a_2(t) + p_2 - g, \quad \frac{d}{dt} \theta = \omega(t) + p$$

où  $(p_1, p_2, p)$  sont trois paramètres constants inconnus. Le système avec biais (13) est-il observable avec  $y = (X_1, X_2)$  comme sortie ? Quel nombre de biais peut-on espérer estimer à partir de  $y$  ?

7. On considère uniquement  $\frac{d^2}{dt^2} X_2 = a_2(t) + p_2 - g$  avec  $y = X_2$ . Donner l'observateur asymptotique qui estime l'état  $(X_2, \dot{X}_2 = V_2, p_2)$  à partir de la mesure  $y_2 = X_2$ . Compte tenu du fait que  $y_2$  est échantillonné à la période  $\tau_y$ , comment choisir les gains d'observateur ?